Conjuntos, funções e suas propriedades

Victor Huff

December 2020

1 Conjuntos e suas propriedades

1.1 A definição de conjunto

A forma mais simples de definir um *conjunto* é a de uma reunião de elementos quaisquer. E quando falamos elementos qualquer, realmente pode ser qualquer um, como por exemplo: conjuntos de pessoas, de objetos e de números. Esses últimos, obviamente são os mais importantes nos conteúdos iniciais da matemática, porém é sempre importante frisar a natureza geral do conjuntos.

Podemos denotar um conjunto, ou representa-lo, de algumas maneiras, a mais comum é com chaves. Por exemplo, o conjuntos formado pelas letras "a", "b" e "c", pode ser escrito como $\{a, b, c\}$, dos números 1,3 e 4 como $\{1, 3, 4\}$. Lembrando ainda, que esta notação não tem ordem, como por exemplo, $\{1, 3, 4\} = \{1, 4, 3\}$. E também interessante notar, que um termo repetido dentro das chaves não altera o conjunto, ou seja, $\{1, 3, 4\} = \{1, 1, 4, 3, 4\}$. Quando queremos dizer em forma mais reduzida que um elemento *a pertence* a um conjunto A, basta escrevermos $a \in A$, e se *a não pertence* a A, pode-se escrever $a \notin A$. Como por exemplo, $1 \in \{1, 3, 4\}$ e $2 \notin \{1, 3, 4\}$.

Podemos denotar conjuntos mais gerais simplesmente por letras maiúsculas, como A, B, C..., estas notações ajudam bastante a poupar espaço, principalmente com conjuntos muito grandes ou mesmo infinitos.

Não é difícil encontrar casos em que um conjunto A contem todos os termos de um outro conjunto B, neste caso podemos dizer que A *contém* B, e denotar por $B \subset A$. Neste caso, tomando $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, vê-se que $A \subset B$, já que todos os termos de B estão em A.

Um conjunto muito peculiar, e surpreendentemente muito utilizado em conteúdos mais avançados, é o conjunto chamado de vazio (ou conjunto vazio), denotado por $\varnothing$. Este é o único conjunto que não contém elementos, ou seja, na notação de chaves temos $\varnothing = \{\}$

1.2 Algumas operações e propriedades

Tais como os números, podemos operar conjuntos, fazendo literalmente contas com os mesmos. A primeira operação bem definida entre conjuntos é a união.

Basicamente, a união de dois conjuntos A e B é um outro conjunto que denotamos por $A \cup B$, que possui tanto os elementos de A quanto de B.

Tomando $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{1, 3, 4\}$, então $A \cup B = \{a, b, c, 1, 3, 4\}$.

Ela é a mais simples operação em termos teóricos, já que devemos "apenas juntar" os elementos de cada conjunto para formar um grupo maior ou igual que os primeiros.

È certeiro escrever maior ou igual, pois tomado algum grupo A qualquer, então a união $A \cup A = A$, já que teríamos uma repetição de cada elemento, mas como vimos anteriormente, isto não alterará o conjunto.

A segunda operação, é a interseção de conjuntos. Dados dois conjuntos A e B, dizemos que a interseção $A \cap B$ é o conjunto dos elementos que estão tanto em A quanto em B, desta forma tomando $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 3, 4, d\}$, então $A \cap B = \{d\}$.

Outra operação importante, é a operação diferença entre dois conjuntos A e B, denotada por $A - B$ e A/B. Esta operação basicamente tira de A os elementos que são comuns a B, ou analogamente, ela tira de A a interseção de ambos os conjuntos.

Desta maneira podemos definir o que é um conjunto complementar. Dado um *conjunto universo* A, ou seja, um conjunto "maior" e um conjunto $B \subset A$, o seu complementar de B em A é definido como $B^c = A - B$. A importância de tal conjunto vem em certas definições, mais especificamente as *funções*, que são relações entre conjuntos, e frequentemente usam de conjuntos complementares para provar alguns resultados relacionados as mesmas.

Dados os conjuntos A, B e C, seguem algumas igualdades interessantes relacionadas a essas operações:

1. $A \cap B = B \cap A$
2. $A \cup B = B \cup A$
3. $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
4. $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$
5. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

1.3 Os conjuntos numéricos mais utilizados

Na matemática básica, existem 4 conjuntos compostos por números que são os mais utilizados. Esses conjuntos são denotados por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, e $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{R}$.

O primeiro deles, que é representado por $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...\}$ é o conjunto dos números naturais, e geralmente esta relacionado a contagem.

O conjunto posterior $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...\}$, é o conjunto dos números inteiros, ele basicamente toma os elementos simétricos dos números naturais (ou os negativos) e os uni com os próprios naturais. Percebe-se que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, pela observação anterior.

Mas é recorrente pensar em números fracionários, que não estão contidos no conjunto dos inteiros (e consequentemente não estão nos naturais). Nos denotamos por $\mathbb{Q}$ o conjunto dos números racionais, isto é, o conjunto dos números que podem ser escritos em forma de fração. De maneira mais precisa podemos escrever $\mathbb{Q} = \{\frac{p}{q}; p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{Z} - \{0\}; mdc(p,q) = 1\}$, onde o $mdc(p,q) = 1$ assegura que não teremos repetições, já que podemos ter representações diferentes para um mesmo valor, como no caso $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$.

Mas existem números que não podem ser escritos em forma de fração. E isso já é conhecido a bastante tempo, como por exemplo, na Grécia antiga já era sabido que $\sqrt{2}$ não pertencia aos racionais, ou seja, não poderia ser escrito como $\frac{p}{q}$, para inteiros. Outro exemplo de número com essa propriedade é o π, aquele das relações trigonométricas.

Desta forma, fazendo a união dos racionais com os irracionais, encontramos os números reais $\mathbb{R}$, o conjunto mais "geral" em um primeiro estudo.

2 Funções e suas propriedades

2.1 Definição de função

Quando falamos em conjuntos, é interessante pensar se de alguma forma pudéssemos associar termos de algum conjunto A aos termos de um conjunto B. Seria conveniente encontrarmos uma *relação* que faz essa associação entre conjuntos.

Uma função f entre dois conjuntos A e B, nada mais é que uma relação, que toma um ponto de $a \in A$ e associa um único elemento $b = f(a)$ em B. È importante notar que f tem um sentido sempre bem definido, ou seja, ela toma termos de A e os associa a termos de B.

Tomando os conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, então a relação f definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$ e $f(5) = 6$ é um exemplo de função. Porém tomando os mesmos conjuntos A e B, a relação g definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$ e $f(4) = 5$, não é função pois não "usa" todos os termos de A, e a relação h definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$, $f(5) = 6$ e $f(1) = 5$ também não o é, pois associa dois elementos ao termo $1 \in A$.

Pontuamos que, não podemos associar a um elemento de A mais de um elemento de B, porém podemos associar a mais de um elemento de A um mesmo B. Como a função f definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$ e $f(5) = 5$. Poderíamos ainda, associar a todos os elementos de A, um mesmo elemento de B, esta é chamada a função constante.

O conjunto A de onde "saem" os termos é chamado de domínio da função e o conjunto onde "chegam" os tais termos é chamado de contradomínio. Todo o domínio é utilizado na relação, mas isso não necessariamente acontece no contradomínio, que pode ser só parcialmente atingido pela função, como ocorre nos exemplos acima.

O conjunto contido no contradomínio que corresponde aos termos atingidos

pela função é chamado de imagem, por exemplo tomados $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, então a relação f definida por $f(1) = 2$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$ e $f(5) = 6$, tem como imagem o conjunto $\{2, 4, 5, 6\} \subset A$.

Quando uma função tem sua imagem igual ao seu contradomínio, então dizemos que essa função é sobrejetiva. E analogamente, quando cada termo da imagem é a associação de um único elemento do domínio, dizemos que a função é injetiva.

Existem funções que podem ser tanto injetivas, quanto sobrejetivas, essas funções são chamadas bijetivas ou bijetoras. Denotando por $f : A \to B$ a função que vai de A até B, podemos dizer que f é uma *bijeção*.

2.2 Exemplos de funções mais importantes

Nos exemplos acima foram associados termo a termo do conjunto, porém não é incomum (não mesmo), termos funções com infinitos termos no seu domínio. Desta forma, se torna mais conveniente definirmos uma "fórmula" para a nossa função. Como por exemplo tomando os conjuntos, podemos definir $f(x) = x$, repare que o termo x pode ser considerado uma *variável* dentro do conjunto A. Em termos de tabela, podemos escrever os termos de tal função assim:

x	$f(x)$
1	1
2	2
3	3
4	4
5	5

Esta é uma das funções mais simples, chamada de identidade, e associa um termo do domínio a ele mesmo no contradomínio. Vê-se que a função f como foi definida é uma bijeção.

Outro exemplo de função muito importante, é a função $g(x) = x^2$, tal função deve ter mais atenção no que tange seu contradomínio, já que tomando $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, um contradomínio/imagem adequado seria $B = \{1, 4, 9, 16, 25\}$ ou qualquer conjunto que os contenha.

Mais geralmente definimos os domínios e contradomínios de tais funções como os números Reais ($\mathbb{R}$) ou *intervalos*. Os intervalos são conjuntos de números infinitos, que representam partes da reta e geralmente são representados pelas notações (a, b)(intervalo aberto) e $[a, b]$(intervalo fechado), com a e b números reais quaisquer. A definição mais correta de intervalo é a seguinte

$(a, b) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x < b\}$

$[a, b] = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x \leq b\}$

Onde observamos que o intervalo aberto não toma os números dos "extremos", mas toma números muito próximos dos mesmos. Como exemplo,

tomando o intervalo $(1,2)$, $1 \notin (1,2)$, porém $1.99999... \in (1,2)$. E já nos intervalos fechados, temos que os extremos também pertencem ao intervalo.

Podemos mesclar os intervalos, fazendo $[a,b)$ e $(a,b]$, que tomam a forma de

1. $[a,b) = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ e } a \leq x < b\}$
2. $(a,b] = \{x; x \in \mathbb{R} \text{ e } a < x \leq b\}$

Desta forma, podemos tomar, por exemplo as funções f e g em intervalos, cujas imagens nos darão outros intervalos (este fato não é tão obvio quanto parece). Por exemplo, tomando $f(x) = x^2$ sobre o intervalo $[1,2]$, então sua imagem será dada por $[1,4]$.

2.3 A função inversa e função composta

Outra propriedade interessante, é a propriedade de composição, que nada mais é que "colocar uma função dentro da outra", porém não é algo tão simples. De maneira resumida, a composição de uma função $f : A \to B \in C$ com outra função $g : C \to D$, denotada por $g \circ f : AD$, toma um ponto $x \in A$, aplica f no mesmo, o enviando para B sob a forma de $f(x)$, e posteriormente aplicamos g no mesmo, tendo resultado o ponto $g(f(x))$ em D. Um fato importante de se notar, é que a composição não é (em geral) uma operação comutativa, ou seja, compor f e g no geral gera uma função diferente do que compor g com f (isso se os domínios e contradomínios estiverem bem definidos).

Dada uma função $f : A \to B$ qualquer, temos um sentido natural, os pontos de A são associados a um ponto de B. Mas será que existe uma forma de desfazer o que f faz? Conseguir uma função que leva os termos da imagem novamente aos pontos de A? A resposta é sim, porém existem algumas limitações.

Para uma função $f : A \to B$ bijetora, é sempre possível encontrar uma função inversa denotada por $f^{-1} : B \to A$, tal que $f^{-1}(f(x)) = x$(a composição das mesmas é igual a função identidade). Repare que a mesma ser bijetora é importantíssima, já que se ela não for sobrejetiva, terão termos do contradomínio que não pertencerão a imagem, logo não teremos termos associados ao mesmo (portanto f^{-1} não seria função). Se f não fosse injetiva então teríamos vários termos de A que se associam a um mesmo ponto de B, logo f^{-1} associaria a esse ponto, múltiplas imagens, o que não pode acorrer. como por exemplo, a função inversa da função $f : [1,2] \to [1,4]$ definida por $f(x) = x^2$, é dada por $f^{-1} : [1,4] \to [1,2]$ definida como $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$