rede e-Tec Brasil

Eletricidade em CA

Alan Kardek Rêgo Segundo

Cristiano Lúcio Cardoso Rodrigues

INSTITUTO FEDERAL DE EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
MINAS GERAIS
Campus Ouro Preto

Ouro Preto - MG
2015

Presidência da República Federativa do Brasil

Ministério da Educação

Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica

Este caderno foi elaborado em parceria entre o Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – Campus Ouro Preto e a Universidade Federal de Santa Maria para a Rede e-Tec Brasil.

Equipe de Elaboração
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Minas Gerais – IFMG-Ouro Preto

Reitor
Caio Mário Bueno Silva/IFMG-Ouro Preto

Direção Geral
Arthur Versiani Machado/IFMG-Ouro Preto

Coordenação Institucional
Sebastião Nepomuceno/IFMG-Ouro Preto

Coordenação de Curso
Ronaldo Silva Trindade/IFMG-Ouro Preto

Professor-autor
Alan Kardek Rêgo Segundo/IFMG-Ouro Preto
Cristiano Lúcio Cardoso Rodrigues/IFMG-Ouro Preto

Equipe de Acompanhamento e Validação
Colégio Técnico Industrial de Santa Maria – CTISM

Coordenação Institucional
Paulo Roberto Colusso/CTISM

Coordenação de Design
Erika Goellner/CTISM

Revisão Pedagógica
Elisiane Bortoluzzi Scrimini/CTISM
Jaqueline Müller/CTISM

Revisão Textual
Carlos Frederico Ruviaro/CTISM

Revisão Técnica
Adriano Peres de Morais/CTISM

Ilustração
Marcel Santos Jacques/CTISM
Ricardo Antunes Machado/CTISM

Diagramação
Emanuelle Shaiane da Rosa/CTISM
Tagiane Mai/CTISM

Catalogação: Biblioteca Tarquínio J. B. de Oliveira
IFMG – Campus Ouro Preto

R343e Rêgo, Alan Kardek
Eletricidade em CA. Alan Kardek Rêgo; Cristiano Lúcio Cardoso Rodrigues. Ouro Preto: Instituto Federal de Minas Gerais – CEAD, 2015.
127 f. : il.
ISBN: 978-85-68198-03-2

1. Análise em CA. 2. Circuitos elétricos. 3. Corrente alternada. 4. Sistema trifásico. I. Rodrigues, Cristiano Lúcio Cardoso. II. Instituto Federal de Minas Gerais, Campus Ouro Preto. III. Título.

CDU 537

Apresentação e-Tec Brasil

Prezado estudante,
Bem-vindo à Rede e-Tec Brasil!

Você faz parte de uma rede nacional de ensino, que por sua vez constitui uma das ações do Pronatec – Programa Nacional de Acesso ao Ensino Técnico e Emprego. O Pronatec, instituído pela Lei nº 12.513/2011, tem como objetivo principal expandir, interiorizar e democratizar a oferta de cursos de Educação Profissional e Tecnológica (EPT) para a população brasileira propiciando caminho de o acesso mais rápido ao emprego.

É neste âmbito que as ações da Rede e-Tec Brasil promovem a parceria entre a Secretaria de Educação Profissional e Tecnológica (SETEC) e as instâncias promotoras de ensino técnico como os Institutos Federais, as Secretarias de Educação dos Estados, as Universidades, as Escolas e Colégios Tecnológicos e o Sistema S.

A educação a distância no nosso país, de dimensões continentais e grande diversidade regional e cultural, longe de distanciar, aproxima as pessoas ao garantir acesso à educação de qualidade, e promover o fortalecimento da formação de jovens moradores de regiões distantes, geograficamente ou economicamente, dos grandes centros.

A Rede e-Tec Brasil leva diversos cursos técnicos a todas as regiões do país, incentivando os estudantes a concluir o ensino médio e realizar uma formação e atualização contínuas. Os cursos são ofertados pelas instituições de educação profissional e o atendimento ao estudante é realizado tanto nas sedes das instituições quanto em suas unidades remotas, os polos.

Os parceiros da Rede e-Tec Brasil acreditam em uma educação profissional qualificada – integradora do ensino médio e educação técnica, – é capaz de promover o cidadão com capacidades para produzir, mas também com autonomia diante das diferentes dimensões da realidade: cultural, social, familiar, esportiva, política e ética.

Nós acreditamos em você!
Desejamos sucesso na sua formação profissional!

Ministério da Educação
Janeiro de 2015

Nosso contato
etecbrasil@mec.gov.br

Indicação de ícones

Os ícones são elementos gráficos utilizados para ampliar as formas de linguagem e facilitar a organização e a leitura hipertextual.

Atenção: indica pontos de maior relevância no texto.

Saiba mais: oferece novas informações que enriquecem o assunto ou "curiosidades" e notícias recentes relacionadas ao tema estudado.

A-Z

Glossário: indica a definição de um termo, palavra ou expressão utilizada no texto.

Mídias integradas: sempre que se desejar que os estudantes desenvolvam atividades empregando diferentes mídias: vídeos, filmes, jornais, ambiente AVEA e outras.

Atividades de aprendizagem: apresenta atividades em diferentes níveis de aprendizagem para que o estudante possa realizá-las e conferir o seu domínio do tema estudado.

Sumário

Palavra do professor-autor

Prezado aluno,

Nessa disciplina você irá aprender conceitos básicos sobre corrente alternada. Basta você olhar ao seu redor para observar a quantidade de aparelhos que utilizam esta energia para funcionar. Desde o chuveiro elétrico que aquece a água do seu banho até a lâmpada que ilumina a sua casa. Você já deve ter imaginado a importância deste assunto para a sua formação. Por se tratar de uma matéria básica do curso, procure absorver ao máximo o conteúdo, principalmente os conceitos físicos abordados, pois este assunto estará presente na maioria das disciplinas que você irá estudar no curso de Eletroeletrônica.

Bons estudos!

Alan Kardek Rêgo Segundo
Cristiano Lúcio Cardoso Rodrigues

Apresentação da disciplina

Ao longo do curso, você deve focar sua atenção nos conceitos físicos apresentados, para tornar mais claro o funcionamento de cada elemento do circuito como um todo. Dessa maneira, você certamente terá maior facilidade na hora de realizar os cálculos necessários para completar o aprendizado.

Projeto instrucional

Disciplina: Eletricidade em CA (carga horária: 75h).

Ementa: Números complexos ou imaginários. Sinais senoidais. Análise de circuitos em CA – Circuitos básicos. Análise de circuitos em CA – Circuitos RC e RL. Sistemas trifásicos.

AULA	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	MATERIAIS	CARGA HORÁRIA (horas)
1. Números complexos ou imaginários	Aprender a representar os números complexos nas formas cartesiana, polar e trigonométrica. Aprender a transformar um número complexo da forma cartesiana para polar, e vice-versa. Aprender a realizar as quatro operações básicas com os números complexos: adição, subtração, multiplicação e divisão.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	05
2. Sinais senoidais	Relembrar os conceitos básicos de um sinal em corrente alternada: período, frequência, velocidade angular, valor de pico, valor médio e valor eficaz. Aprender a representar um sinal senoidal na forma matemática e no diagrama fasorial.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	06
3. Corrente alternada – circuitos básicos	Aprender os princípios básicos de corrente alternada. Aprender a analisar circuitos puros em corrente alternada utilizando as diversas formas de representação vistas anteriormente: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial. Conhecer o indutor e o conceito de indutância e reatância indutiva, bem como aprender o princípio de funcionamento do indutor em corrente alternada.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08
4. Circuitos básicos em corrente alternada – continuação	Continuar o estudo sobre circuitos básicos iniciado na aula anterior. Conhecer o capacitor e o conceito de capacitância e reatância capacitiva, bem como aprender o princípio de funcionamento do capacitor em corrente alternada.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08

AULA	OBJETIVOS DE APRENDIZAGEM	MATERIAIS	CARGA HORÁRIA (horas)
5. Análise de circuitos indutivos em CA – circuitos RL	Aprender analisar circuitos RL em série e em paralelo em corrente alternada, utilizando as diversas formas de representação: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08
6. Análise de circuitos capacitivos em CA – circuitos RC	Aprender analisar circuitos RC em série e em paralelo em corrente alternada, utilizando as diversas formas de representação: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08
7. Circuitos RLC	Aprender analisar circuitos RLC em série e em paralelo em corrente alternada, utilizando as diversas formas de representação: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial. Entender o conceito de ressonância.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08
8. Correção de fator de potência	Compreender a importância da correção do fator de potência. Aprender a dimensionar capacitores que corrijam o fator de potência de uma carga, de um grupo de cargas e de um conjunto de grupos de cargas.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08
9. Sistemas trifásicos	Aprender a representação das tensões fornecidas por um gerador trifásico. Aprender analisar um circuito trifásico. Aprender as relações entre as tensões de fase e de linha e entre as correntes de fase e de linha para as ligações estrela e triângulo. Aprender a representar as tensões e correntes de um sistema trifásico no diagrama fasorial.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08
10. Potência em sistemas trifásicos	Aprender a calcular as potências totais e o fator de potência de uma carga trifásica.	Ambiente virtual: plataforma Moodle. Apostila didática. Recursos de apoio: *links*, exercícios.	08

Aula 1 – Números complexos ou imaginários

Objetivos

Aprender a representar os números complexos nas formas cartesiana, polar e trigonométrica.

Aprender a transformar um número complexo da forma cartesiana para polar, e vice-versa.

Aprender a realizar as quatro operações básicas com os números complexos: adição, subtração, multiplicação e divisão.

1.1 Considerações iniciais

Os números complexos servirão de instrumento matemático para a resolução de circuitos em corrente alternada. Portanto, o domínio desta ferramenta matemática será imprescindível no decorrer do curso.

1.2 Representação dos números complexos

Os números complexos surgiram devido à necessidade de se representar as raízes quadradas de números negativos, que não fazem parte do conjunto dos números reais.

Foi feita a seguinte consideração sobre a unidade imaginária j:

Equação 1.1

$$j = \sqrt{-1} \quad \text{ou} \quad j^2 = -1$$

No caso clássico, a unidade complexa é representada pela letra i. No entanto, em eletricidade a corrente elétrica é representada pela letra i. Logo, para não haver confusão, iremos utilizar a letra j para representar a unidade imaginária ao invés da letra i.

A raiz quadrada de qualquer número negativo pode ser representada utilizando a unidade imaginária j. É utilizado o seguinte raciocínio para realizar tal representação:

Equação 1.2

$$\sqrt{-x} = \sqrt{-1}\ \sqrt{x} = j\sqrt{x}$$

Em que x é um número real qualquer.

Vejam os exemplos:

a) $\sqrt{-4} = \sqrt{-1}\ \sqrt{4} = j2$

b) $\sqrt{-5} = \sqrt{-1}\ \sqrt{5} = j\sqrt{5}$

c) $\sqrt{-9} = \sqrt{-1}\ \sqrt{9} = j3$

Você pode estar achando estranha a indicação de j3 ao invés de 3j por exemplo. Embora todas as duas estejam corretas, a primeira é mais utilizada, pois a representação fica mais organizada quando o número complexo possui parte real e parte imaginária.

Ainda podem ser feitas as seguintes deduções:

a) $j^3 = j^2\ j = (-1)\ j = -j$

b) $j^4 = j^2\ j^2 = (-1)(-1) = 1$

c) $j^5 = j^2\ j^2\ j = (-1)(-1)\ j = j$

E assim por diante.

A seguir serão apresentadas três formas diferentes de se representar um número complexo: forma cartesiana, forma polar e forma trigonométrica. É muito importante aprender sobre essas três maneiras de representação para facilitar na realização das operações básicas envolvendo os números complexos.

1.2.1 Forma cartesiana

Um número complexo é representado na forma cartesiana da seguinte forma:

Equação 1.3

$$\vec{Z} = a + jb$$

Em que: $\vec{Z}$ – número complexo

a – parte real

b – parte imaginária

O plano cartesiano para representar um número complexo $\vec{Z}$ possui: um eixo real (abscissa), onde é localizada a parte real a; e um eixo imaginário, onde é localizada a parte imaginária b, de acordo com a Figura 1.1.

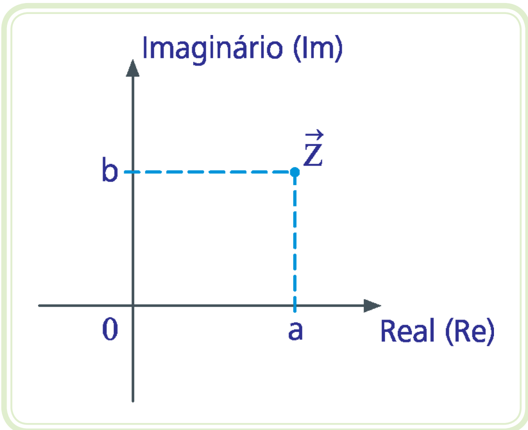

Figura 1.1: Plano cartesiano para números complexos
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Exemplo

a) $\vec{Z}_1 = 4 + j6$

b) $\vec{Z}_2 = 20 + j9$

c) $\vec{Z}_3 = j8$ (parte real igual a zero)

d) $\vec{Z}_4 = -3$ (parte imaginária igual a zero)

1.2.2 Forma polar

Um número complexo pode ser representado na forma polar da seguinte maneira:

Equação 1.4

$$\vec{Z} = Z \underline{|\phi}$$

Em que: Z – módulo do número complexo $\vec{Z}$

ϕ – argumento, ângulo ou fase do número complexo $\vec{Z}$, em graus

Observe que o módulo (ou tamanho) do número complexo $\vec{Z}$ é igual ao tamanho do segmento de reta ($\overline{OZ}$) na Figura 1.2. Observe ainda que o ângulo ϕ deve ser medido tomando-se como referência a parte positiva do eixo real e o sentido anti-horário como positivo.

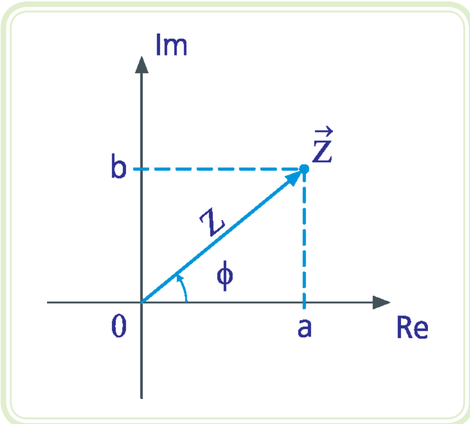

Figura 1.2: Representação da forma polar
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

A maioria das calculadoras científicas permitem fazer de forma rápida e eficiente a conversão da forma polar para cartesiana e vice-versa. Consulte o manual de sua calculadora e aprenda como realizar estas operações. Mas atenção!

Observe se a unidade de ângulo da calculadora está configurada em radianos ou graus, pois esta é a maior fonte de confusão nessas operações.

Exemplo

a) $\vec{Z}_1 = 10 \underline{|30°}$

b) $\vec{Z}_2 = 3 \underline{|-90°}$

c) $\vec{Z}_3 = 13 \underline{|120°}$

1.2.3 Forma trigonométrica

Observe que na Figura 1.2 existe um triângulo retângulo formado pelos catetos a e b e pela hipotenusa Z. Utilizando as funções seno e cosseno, é possível representar os catetos em função do ângulo ϕ e da hipotenusa do triângulo:

Equação 1.5

$$a = Z\cos\phi \qquad e \qquad b = Z\,\text{sen}\phi$$

Portanto, um número complexo pode ser representado na forma trigonométrica da seguinte maneira:

Equação 1.6

$$\vec{Z} = Z(\cos\phi + j\text{sen}\phi)$$

É importante perceber que esta expressão serve para realizar a transformação de um número complexo na forma polar para a forma cartesiana.

Exemplo

Transforme os números complexos a seguir da forma polar para a forma cartesiana:

a) $\vec{Z} = 10\,\underline{|30°} = 10(\cos 30° + j\text{sen}30°) = 8{,}66 + j5$

b) $\vec{Z} = 4\,\underline{|-60°} = 4[\cos(-60°) + j\text{sen}(-60°)] = 2 - j3{,}46$

c) $\vec{Z} = 7\,\underline{|180°} = 7(\cos 180° + j\text{sen}180°) = -7$ (parte imaginária igual a zero)

1.3 Transformação da forma cartesiana em polar

Muitas vezes será necessário transformar um número complexo da forma cartesiana em polar, com a finalidade de facilitar determinada operação matemática entre os números complexos. Não se preocupe ainda com estas operações, pois elas serão detalhadas posteriormente.

Transformar um número complexo $\vec{Z}$ da forma cartesiana para a forma polar consiste em encontrar o módulo Z e o ângulo ϕ a partir de sua parte real a e de sua parte imaginária b, ou seja:

Equação 1.7

$$\vec{Z} = a + jb$$

Como foi dito anteriormente, na Figura 1.2, Z é a hipotenusa do triângulo retângulo de catetos a e b. Logo, podemos calcular Z utilizando o teorema de Pitágoras:

Equação 1.8

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2}$$

O ângulo ϕ pode ser calculado por meio da função trigonométrica arco-tangente:

Equação 1.9

$$\phi = \text{arctg} \frac{|b|}{|a|}$$

Dependendo do quadrante em que está localizado o segmento $\overline{0Z}$, o cálculo do ângulo precisa ser corrigido para que o seu valor tenha como referência sempre a parte positiva do eixo real.

A princípio, é muito importante esboçar o número complexo no plano cartesiano para você não confundir esta questão dos quadrantes. Quando o número só possui a parte real ou só a parte imaginária, fica claro no plano cartesiano qual é o ângulo que o segmento $\overline{0Z}$ faz com a parte positiva do eixo real.

A seguir serão apresentados quatro exemplos de transformação da forma cartesiana em polar, abordando os quatro quadrantes.

Exemplo

Realize a transformação da forma cartesiana para a forma polar dos seguintes números complexos.

a) $\vec{Z} = 2 + j6$

Representação no plano cartesiano:

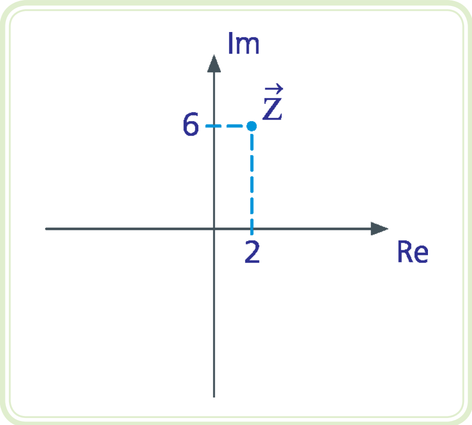

Figura 1.3: Representação do número complexo no plano cartesiano
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que o número complexo está localizado no primeiro quadrante.

Módulo:

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2^2 + 6^2} = 6{,}32$$

Ângulo:

$$\phi = \operatorname{arctg} \frac{|b|}{|a|} = \operatorname{arctg} \frac{6}{2} = 71{,}57°$$

Número complexo na forma polar:

$$\vec{Z} = 6{,}32 \,\underline{|71{,}57°}$$

b) $\vec{Z} = -4 + j7$

Representação no plano cartesiano:

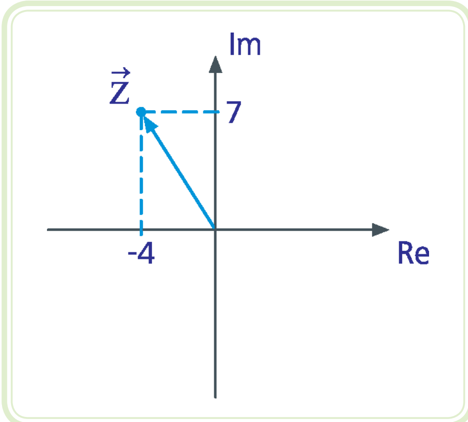

Figura 1.4: Representação do número complexo no plano cartesiano
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que o número complexo está localizado no segundo quadrante.

Módulo:

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + 7^2} = 8{,}06$$

Ângulo:

$$\phi' = \text{arctg}\,\frac{|b|}{|a|} = \text{arctg}\,\frac{7}{4} = 60{,}26°$$

Observe que o ângulo encontrado não está localizado no segundo quadrante. Na verdade ele é o ângulo do triângulo retângulo de catetos a = 4 e b = 7 da Figura 1.5. O ângulo da forma polar deve fazer referência com a parte positiva do eixo real. Portanto, sempre que o número complexo estiver localizado no segundo quadrante, devemos utilizar a seguinte equação de correção:

$$\phi = 180° - \phi'$$

$$\phi = 180° - 60{,}26° = 119{,}74°$$

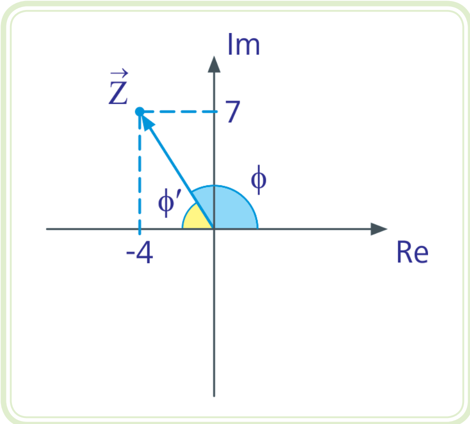

Figura 1.5: Representação do número complexo no plano cartesiano
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

c) $\vec{Z} = -3 - j8$

Observe que o número complexo está localizado no terceiro quadrante, pois ambas as partes real e imaginária são negativas.

Módulo:

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-8)^2} = 8{,}54$$

Ângulo:

$$\phi' = \text{arctg}\,\frac{|b|}{|a|} = \text{arctg}\,\frac{8}{3} = 69{,}44°$$

Sempre que o número complexo estiver localizado no terceiro quadrante, devemos utilizar a seguinte equação de correção:

$$\phi = 180° + \phi'$$

$$\phi = 180° + 69{,}44° = 249{,}44°$$

Número complexo na forma polar:

$$\vec{Z} = 8{,}54\,\underline{|\,249{,}44°}$$

d) $\vec{Z} = 4 - j6$

Representação no plano cartesiano:

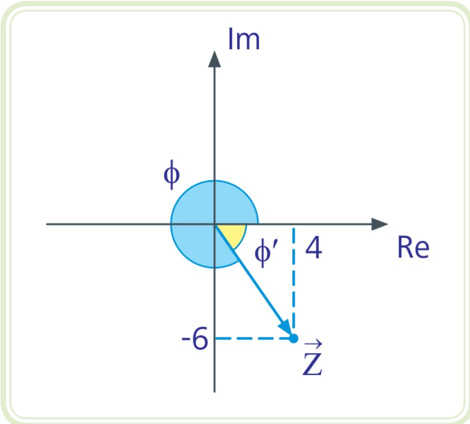

Figura 1.6: Representação do número complexo no plano cartesiano
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que o número complexo está localizado no quarto quadrante.

Módulo:

$$Z = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-4)^2 + 6^2} = 7{,}21$$

Ângulo:

$$\phi' = \operatorname{arctg} \frac{|b|}{|a|} = \operatorname{arctg} \frac{6}{4} = 56{,}31°$$

Observe que o ângulo encontrado não está localizado no quarto quadrante. Portanto, sempre que o número complexo estiver localizado no segundo quadrante, devemos utilizar a seguinte equação de correção:

$$\phi = 360° - \phi'$$

$$\phi = 360° - 56{,}31° = 303{,}69°$$

Número complexo na forma polar:

$$\vec{Z} = 7{,}21 \,\underline{|\,303{,}69^\circ}$$

1.4 Operações com números complexos

A seguir serão apresentadas as quatro operações básicas envolvendo números complexos.

1.4.1 Soma e subtração

- **Soma** – somam-se separadamente as partes reais e as partes imaginárias.
- **Subtração** – subtraem-se separadamente as partes reais e as partes imaginárias.

Exemplo

Realize as seguintes operações de soma e subtração envolvendo os números complexos:

$$\vec{Z}_1 = 4 - j5 \qquad \vec{Z}_2 = -2 - j3 \qquad \vec{Z}_3 = -1 + j3$$

a) $\vec{Z}_1 + \vec{Z}_2 = [4 + (-2)] + j[(-5) + (-3)] = 2 - j8$

b) $\vec{Z}_1 - \vec{Z}_2 = [4 - (-2)] + j[(-5) - (-3)] = 6 - j2$

c) $\vec{Z}_2 + \vec{Z}_3 = [(-2) + (-1)] + j[(-3) + 3] = -3$

1.4.2 Multiplicação e divisão

Para multiplicar ou dividir dois números complexos, utiliza-se a representação complexa polar, procedendo da seguinte maneira:

- **Multiplicação** – multiplicam-se os módulos e somam-se os ângulos.
- **Divisão** – dividem-se os módulos e subtraem-se os ângulos.

Exemplo

Realize as seguintes operações de multiplicação e divisão envolvendo os números complexos:

$$\vec{Z}_1 = 10\angle 30^\circ \qquad \vec{Z}_2 = 5\angle 120^\circ \qquad \vec{Z}_3 = 7\angle -90^\circ$$

a) $\vec{Z}_1 \times \vec{Z}_2 = 10\angle 30^\circ \times 5\angle 120^\circ = 10 \times 5\angle 30^\circ + 120^\circ = 50\angle 150^\circ$

b) $\dfrac{\vec{Z}_1}{\vec{Z}_2} = \dfrac{10\angle 30^\circ}{5\angle 120^\circ} = \dfrac{10}{5}\angle 30^\circ - 120^\circ = 2\angle -90^\circ$

c) $\vec{Z}_1 \times \vec{Z}_3 = 10\angle 30^\circ \times 7\angle -90^\circ = 10 \times 7\angle 30^\circ - 90^\circ = 70\angle -60^\circ$

d) $\dfrac{\vec{Z}_3}{\vec{Z}_2} = \dfrac{7\angle -90^\circ}{5\angle 120^\circ} = \dfrac{7}{5}\angle -90^\circ - 120^\circ = 1{,}4\angle -210^\circ$

Resumo

Nessa aula, aprendemos a representar os números complexos nas formas cartesiana, polar e trigonométrica. Aprendemos, também, a transformar um número complexo da forma cartesiana para polar, e vice-versa. Por fim, foi apresentada uma maneira simples de realizar as quatro operações básicas envolvendo números complexos.

Atividades de aprendizagem

1. Transforme os números complexos a seguir da forma cartesiana para a forma polar:

a) $\vec{Z}_1 = -3$

b) $\vec{Z}_2 = -2 + j5$

c) $\vec{Z}_3 = -2 - j4$

d) $\vec{Z}_4 = -j8$

2. Transforme os números complexos a seguir da forma polar para a forma cartesiana:

a) $\vec{Z}_5 = 10\angle 90^\circ$

b) $\vec{Z}_6 = 4\underline{|-60°}$

c) $\vec{Z}_7 = 2\underline{|120°}$

d) $\vec{Z}_8 = 9\underline{|210°}$

3. Realize as seguintes operações:

a) $\vec{Z}_5 + \vec{Z}_6 =$

b) $\dfrac{\vec{Z}_2}{\vec{Z}_3} =$

c) $-\vec{Z}_3 + \vec{Z}_8 =$

d) $\vec{Z}_4 \times (-\vec{Z}_5) =$

Aula 2 – Sinais senoidais

Objetivos

Relembrar os conceitos básicos de um sinal em corrente alternada: período, frequência, velocidade angular, valor de pico, valor médio e valor eficaz.

Aprender a representar um sinal senoidal na forma matemática e no diagrama fasorial.

2.1 Considerações iniciais

Nessa aula, iremos explorar a representação dos sinais em corrente alternada na forma senoidal, como está exemplificado pela Figura 2.1. Esta forma de representação é muito útil, e sua aplicação se torna bastante evidente quando utilizamos um osciloscópio para analisar sinais de tensão ou corrente, por exemplo.

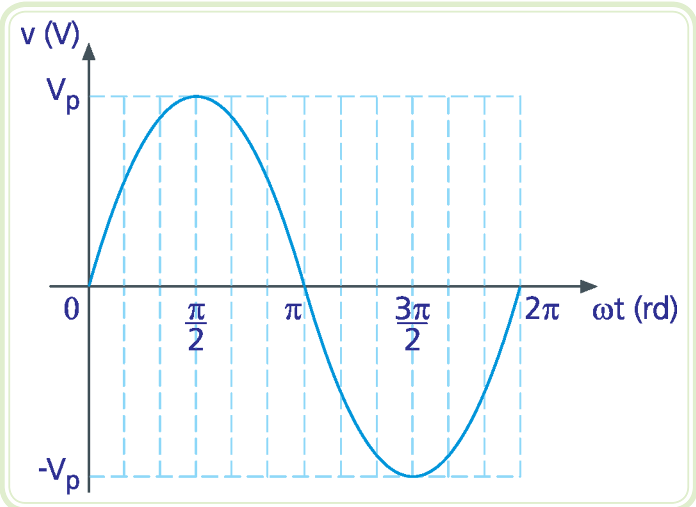

Figura 2.1: Forma de onda senoidal
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

2.2 Conceitos básicos

A seguir iremos apresentar os principais conceitos que descrevem os sinais senoidais.

2.2.1 Ciclo

Quando observamos a repetição de um sinal senoidal entre dois pontos, dizemos que este sinal completou um ciclo. Isto fica mais claro quando observamos o sinal se repetindo entre dois picos da forma de onda, por exemplo.

2.2.2 Período

Medida de tempo que um sinal periódico leva para completar um ciclo. Geralmente o período é representado pela letra T e sua unidade no Sistema Internacional (SI) é dada em segundos.

2.2.3 Frequência

Medida do número de ciclos que um sinal periódico realiza durante um segundo. Geralmente a frequência é representada pela letra f e sua unidade no SI é dada em Hertz (Hz).

Existe a seguinte relação entre a frequência e o período de um sinal:

Equação 2.1

$$f = \frac{1}{T}$$

2.2.4 Velocidade angular

A velocidade angular ou frequência angular mede a variação do ângulo θ de um sinal senoidal em função do tempo. Geralmente, utiliza-se a letra grega ω para representá-la, e sua unidade no SI é dada em radiano por segundo (rd/s).

Existem as seguintes relações entre o ângulo θ a velocidade angular ω de um sinal senoidal:

Equação 2.2

$$\theta = \omega t$$

Quando $t = T$, tem-se que $\theta = 2\pi$. Considerando-se também a Equação 2.1, pode-se chegar à seguinte expressão:

Equação 2.3

$$\omega = 2\pi f$$

2.2.5 Valor de pico

O valor de pico V_p é o máximo valor que um sinal pode atingir, tanto no sentido positivo como no sentido negativo. Também pode ser denominado de amplitude máxima. A amplitude total, entre os valores máximos positivo e negativo, é denominada valor de pico a pico V_{pp}, ou seja:

Equação 2.4

$$V_{pp} = 2\ V_p$$

2.2.6 Valor médio

O valor médio V_m de um sinal senoidal, quando considerado um período inteiro, é nulo, pois a resultante entre os somatórios dos valores instantâneos dos semiciclos positivo e negativo é nula, ou seja:

Equação 2.5

$$V_m = 0\ V$$

O valor médio de um sinal periódico é calculado tomando-se a média dos valores instantâneos do sinal durante o período de tempo T. Graficamente, o valor médio pode ser representado como a área sob a curva, no intervalo de tempo correspondente ao período T, dividido pelo período T.

Se o sinal senoidal apresenta somente os semiciclos positivo e não apresenta os semiciclos negativos, como é o caso de um sinal retificado em meia onda, o valor médio desse sinal será diferente de zero e pode ser calculado pela seguinte relação:

Equação 2.6

$$V_m = 0{,}637\ V_p$$

2.2.7 Valor eficaz

O valor eficaz V_{ef} ou V_{rms} de uma tensão alternada corresponde ao valor de uma tensão contínua que, se aplicada a uma resistência, faria com que ela dissipasse a mesma potência média caso fosse aplicada essa tensão alternada. Em outras palavras, o valor eficaz é uma maneira de comparar a produção de trabalho entre sistemas de corrente alternada e de corrente contínua. Por exemplo, qual tensão em corrente contínua que deveria ser aplicada em um chuveiro elétrico para ele produzir a mesma quantidade de calor ao invés de ser aplicada uma tensão alternada com valor de pico V_p = 179,6 V?

A-Z

rms
Significa *Root Mean Square*, ou seja, raiz média quadrática.

A resposta é o valor eficaz dessa tensão. Matematicamente, tem-se para formas de onda senoidais a seguinte relação:

Equação 2.7

$$V_{ef} = \frac{V_p}{\sqrt{2}} = 0{,}707\ V_p$$

Verifiquem por meio de uma pesquisa na internet que o valor eficaz de onda quadrada e triangular não apresenta a mesma relação de raiz quadrada de 2.

Portanto, a resposta para a pergunta anterior seria:

Equação 2.8

$$V_{ef} = 127\ V_{ef}$$

A relação entre valor de pico e valor eficaz também é válida para a corrente.

2.2.8 Fase inicial

A fase inicial θ_0 de um sinal senoidal representa seu deslocamento angular em relação à origem, ou seja:

Equação 2.9

$$\omega t = 0\ rd$$

Por convenção, quando o sinal estiver adiantado, θ_0 é positivo; já quando o sinal estiver atrasado, θ_0 é negativo.

A Figura 2.2 mostra um sinal senoidal adiantado de $\pi/6$ radianos (30°) em relação à origem.

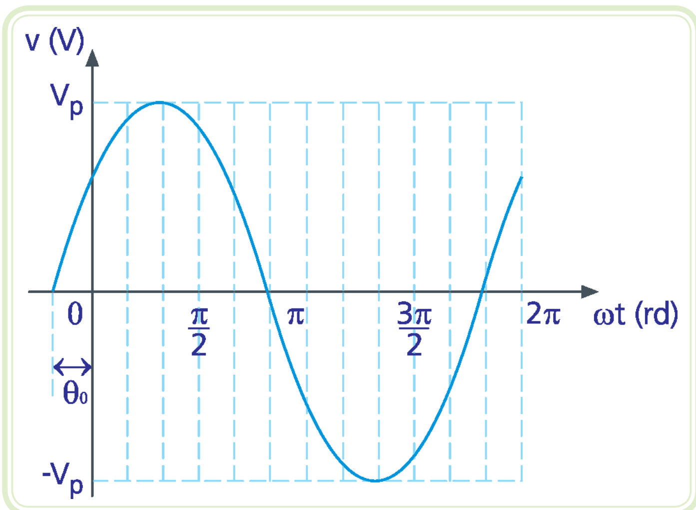

Figura 2.2: Sinal senoidal adiantado
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que um sinal adiantado inicia antes de θ_0 radianos em relação à origem.

A Figura 2.3 mostra um sinal senoidal atrasado de $\pi/6$ radianos (30°) em relação à origem.

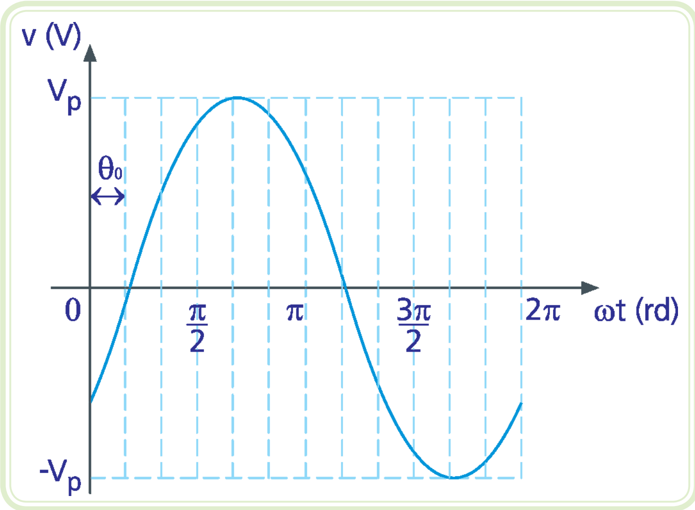

Figura 2.3: Sinal senoidal atrasado
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que um sinal atrasado inicia depois de θ_0 radianos em relação à origem.

2.2.8.1 Representação matemática

Um sinal senoidal em função do tempo, v(t), é representado de acordo com a seguinte expressão:

Equação 2.10

$$v(t) = V_p \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0) \text{ V}$$

$\theta_0 > 0 \rightarrow$ sinal adiantado ("inicia antes").

$\theta_0 < 0 \rightarrow$ sinal atrasado ("inicia depois").

Exemplo

As formas de onda representadas a seguir foram observadas em um osciloscópio. A primeira (Figura 2.4) é referente a uma rede de tensão alternada de 220 V_{rms}; já a segunda (Figura 2.5) de 127 V_{rms}. Observe que a primeira forma de onda está adiantada de 30° e a segunda forma de onda está atrasada de 30°. Represente matematicamente essas tensões em função do tempo.

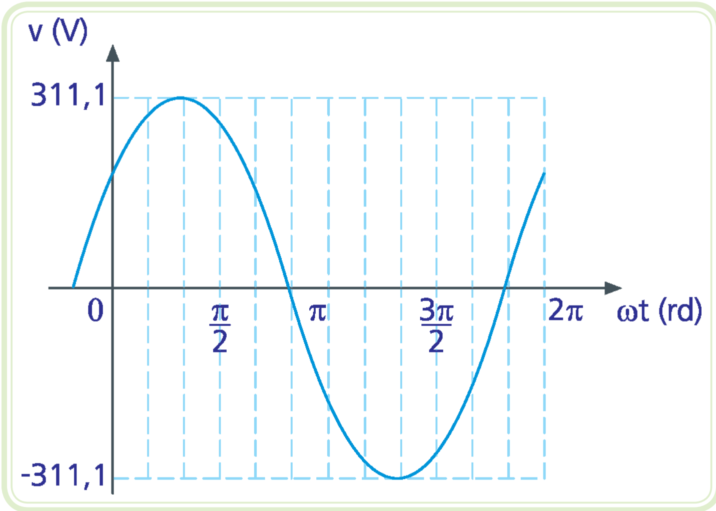

Figura 2.4: Forma de onda da tensão
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Resposta

$$v(t) = 311{,}1\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)\ V$$

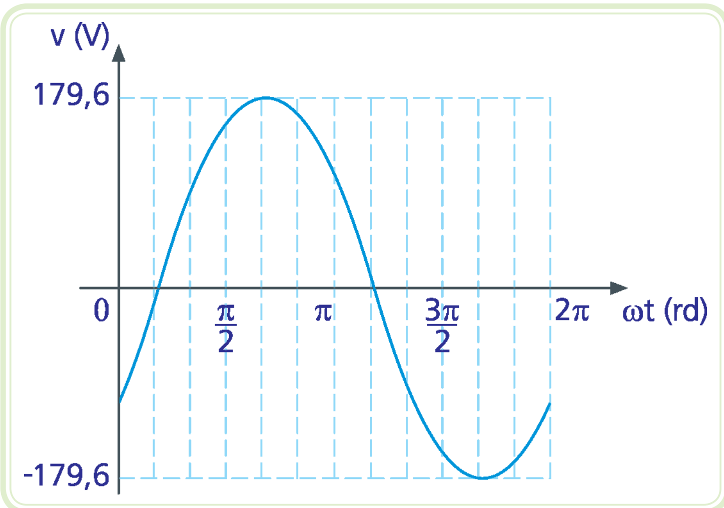

Figura 2.5: Forma de onda da tensão
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Resposta

$$v(t) = 179{,}6\ \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)\ V$$

2.3 Diagrama fasorial

Outra forma de representar um sinal senoidal é por meio de um fasor (vetor girante) de amplitude igual ao valor de pico (V_p) ou igual ao valor eficaz (V_{rms}) do sinal, girando no sentido anti-horário com velocidade angular ω (Figura 2.6).

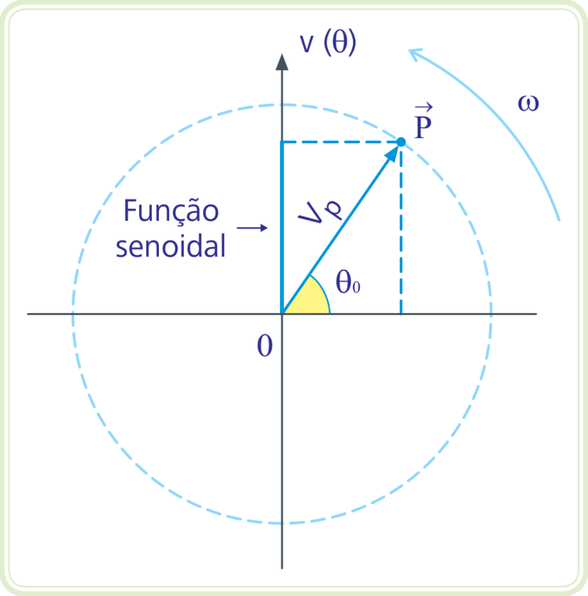

Figura 2.6: Diagrama fasorial de um sinal senoidal
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

O ângulo θ_0 é medido em relação à parte positiva do eixo horizontal do diagrama fasorial. Tomando o sentido anti-horário, θ_0 é positivo, ou seja, o sinal está adiantado em relação ao instante t = 0 s. Já para o sentido horário, θ_0 é negativo, ou seja, o sinal está atrasado em relação ao instante t = 0 s.

A representação de um fasor pode ser feita por meio de um ponto acima da letra letra que o nomeia. Deve-se ressaltar que um fasor deve estar associado a uma frequência. A impedância não é um fasor, pois é um vetor que não gira, mas tensão e corrente são fasores, pois são girantes.

A projeção do segmento $\overline{0P} = V_p$ no eixo vertical é uma função seno, reproduzindo, portanto, a tensão senoidal v(t) ou v(θ). A forma complexa polar está intimamente relacionada com o diagrama fasorial, pois nela estão representados o módulo do fasor e o seu ângulo inicial. Geralmente utiliza-se um ponto em cima da variável para representar um fasor.

Exemplo

$$\dot{V} = 100 \underline{|30°} \text{ V}$$

A Figura 2.7 mostra detalhadamente a relação gráfica entre um sinal senoidal e seu diagrama fasorial.

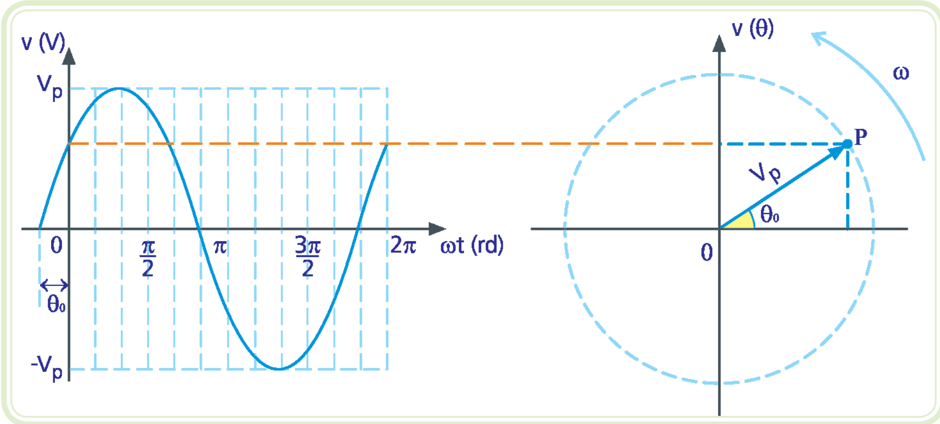

Figura 2.7: Relação gráfica entre sinal senoidal e diagrama fasorial
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que se as duas representações estiverem na mesma escala e dispostas uma do lado da outra, a prolongação de uma linha paralela ao eixo horizontal do ponto de interseção entre o sinal senoidal e o eixo vertical até o diagrama fasorial sempre coincidirá com o P do fasor, conforme pode ser observado por meio da linha laranja representada na Figura 2.7.

Alguns autores tratam os fasores, mesmo graficamente, com o valor eficaz, e não usam o valor de pico na sua representação. Sabe-se que matematicamente ele é representado pelo valor de pico, mas deve-se ter especial atenção à notação de diferentes autores de livros de circuitos elétricos. Geralmente, em livros de sistemas elétricos de potência, utiliza-se os fasores com valor eficaz, já em livros de eletrônica é mais comum o valor de pico.

Exemplo

Desenhe o diagrama fasorial e escreva a representação fasorial correspondente na forma complexa polar dos sinais senoidais a seguir:

a) $v(t) = 10\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{3}\right)$

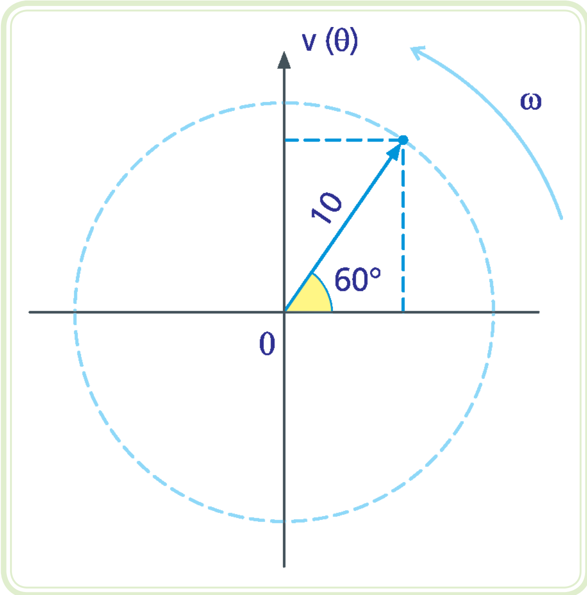

Figura 2.8: Representação fasorial correspondente na forma complexa polar dos sinais senoidais
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

b) $v(t) = 18\ \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{6}\right)$

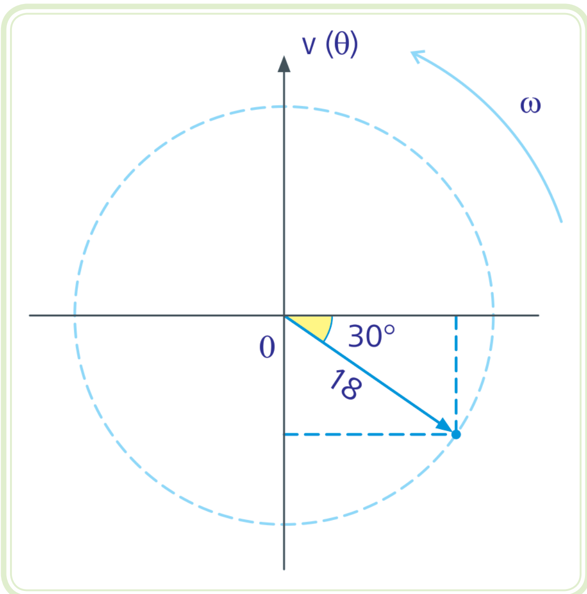

Figura 2.9: Representação fasorial correspondente na forma complexa polar dos sinais senoidais
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Resumo

Nessa aula, você aprendeu os conceitos básicos de um sinal em corrente alternada: período, frequência, velocidade angular, valor de pico, valor médio e valor eficaz. Além disso, foram apresentadas outras maneiras de representar este sinal: forma senoidal, forma matemática e diagrama fasorial.

Atividades de aprendizagem

1. Defina os seguintes conceitos:

a) Período.

b) Frequência.

c) Velocidade angular.

2. Diferencie valor de pico, pico a pico, médio e eficaz de um sinal senoidal.

3. Quais as formas de representação de um sinal senoidal? Exemplifique e explique cada uma.

4. Esboce a forma de onda, desenhe o diagrama fasorial e represente as formas complexas polar e cartesiana das seguintes expressões. Deixe claro no desenho da forma de onda os valores de pico e o ângulo de defasagem em relação à $\omega t = 0$ rd. Sugestão: nas formas complexas, utilize o módulo igual ao valor eficaz do sinal senoidal.

a) $v_1(\theta) = 10\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$

b) $v_2(\theta) = 5\ \text{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$

c) $v_2(\theta) = 7\ \text{sen}\left(\omega t - \frac{3\pi}{2}\right)$

d) $v_2(\theta) = 4\ \text{sen}\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right)$

Aula 3 – Corrente alternada – circuitos básicos

Objetivos

Aprender os princípios básicos de corrente alternada.

Aprender a analisar circuitos puros em corrente alternada utilizando as diversas formas de representação vistas anteriormente: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial.

Conhecer o indutor e o conceito de indutância e reatância indutiva, bem como aprender o princípio de funcionamento do indutor em corrente alternada.

3.1 Corrente alternada

O estudo de circuitos de corrente alternada (CA) é muito importante visto que a grande maioria das instalações elétricas utiliza este tipo de circuitos.

A corrente alternada ou CA, como o próprio nome diz, é a corrente elétrica na qual a intensidade e a direção são grandezas que variam ciclicamente com o passar do tempo, ao contrário da corrente contínua, CC, que tem direção bem definida e não varia com o tempo. Em outras palavras, na corrente contínua, o fluxo de elétrons se dá em um único sentido, já na corrente alternada, a corrente circula ora num sentido, ora no outro.

Atualmente, sabe-se que em longas distâncias (acima de 800 km) a transmissão em CC tem vantagens sobre a CA. As novas linhas das usinas do Rio Madeira e a linha que interliga ITAIPU a Ibiúna – SP são realizadas em CC.

A alternância da corrente e da tensão elétrica é natural do processo de geração da energia elétrica por meio de geradores. No Brasil, a maior parte de energia elétrica que está disponível em qualquer tomada residencial ou industrial é produzida em grandes geradores presentes nas usinas hidroelétricas e desta maneira é alternada.

Como dissemos acima, na corrente alternada, os elétrons invertem o seu sentido várias vezes por segundo. Quanto maior a inversão do sentido de condução dos elétrons, maior será a frequência da corrente alternada. Na maioria dos países da América, inclusive no Brasil e nos Estados Unidos, a frequência da rede elétrica é de 60 Hz. Em alguns países da América Latina, como por exemplo, Argentina, Bolívia, Chile e Paraguai, a frequência da rede elétrica é de 50 Hz. A frequência de 50 Hz é também utilizada em alguns países da Europa, tal como em Portugal.

A corrente alternada é uma forma eficaz de se transmitir energia elétrica por longas distâncias. Quando essa energia é transmitida por uma corrente alternada, ela não perde muita força no meio caminho. Se usássemos a corrente contínua para transmissão de energia elétrica, o desperdício seria muito grande.

O motivo pelo qual a corrente alternada foi adotada para transmissão de energia elétrica a longas distâncias deve-se à facilidade de elevação ou diminuição do valor de sua tensão alternada por intermédio de transformadores. Quando se eleva a tensão, a corrente diminui. Portanto, as perdas elétricas por efeito Joule ao longo de uma linha de transmissão, que são proporcionais ao quadrado da corrente, também diminuem. Além do mais, como a corrente é menor, condutores de bitola menores podem ser usados, tornando o investimento na infraestrutura da rede de transmissão também menor.

3.1.1 Energia elétrica

A energia elétrica é uma forma de energia baseada na geração de diferença de potencial elétrico entre dois pontos, que permite estabelecer uma corrente elétrica entre ambos. A geração é obtida a partir da transformação da energia de fontes primárias disponíveis no planeta. No atual estágio de desenvolvimento, a energia elétrica se destaca das demais modalidades energéticas devido, principalmente, aos seguintes fatores:

- É facilmente transportável, podendo ser produzida no local mais conveniente e transmitida para consumidores distantes por uma simples rede de condutores (fios).

- Apresenta baixo índice de perda energética durante conversões.

- É facilmente transformável em outras formas de energia: calor, luz e movimento.

- É elemento fundamental para a ocorrência de muitos fenômenos físicos e químicos que formam a base de operação de máquinas e equipamentos modernos.

3.1.2 Gerador de corrente alternada elementar

Os geradores de corrente alternada, também denominados alternadores, são máquinas destinadas a converter energia mecânica em energia elétrica. A transformação de energia nos geradores fundamenta-se nas Leis de Faraday e Lenz.

O gerador elementar monofásico de CA foi concebido por Michael Faraday em 1831, na Inglaterra. Aproximadamente na mesma época também foi concebido por Joseph Henry, nos Estados Unidos. Ele era constituído por uma espira que girava entre os polos de um ímã, de acordo com a Figura 3.1.

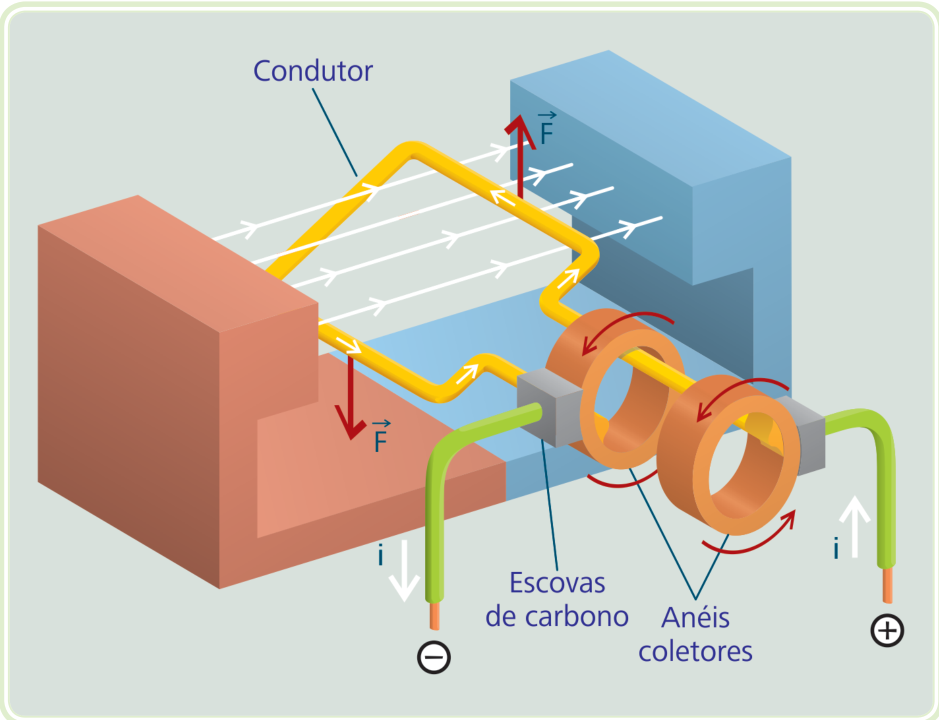

Figura 3.1: Esquema de gerador monofásico elementar
Fonte: CTISM

No gerador monofásico elementar, uma espira de fio girando em um campo magnético produz uma força eletromotriz induzida (fem). Os terminais da bobina são ligados ao circuito externo por meio dos anéis coletores e escovas.

As escovas são pequenos blocos de grafite (material condutor). Sem elas não seria possível estabelecer a força eletromotriz alternada (ou tensão alternada) de saída do gerador.

A força eletromotriz e a corrente de um gerador elementar mudam de direção cada vez que a espira gira 180°. A tensão de saída deste gerador é alternada do tipo senoidal, de acordo a Figura 3.2, para uma volta completa da espira.

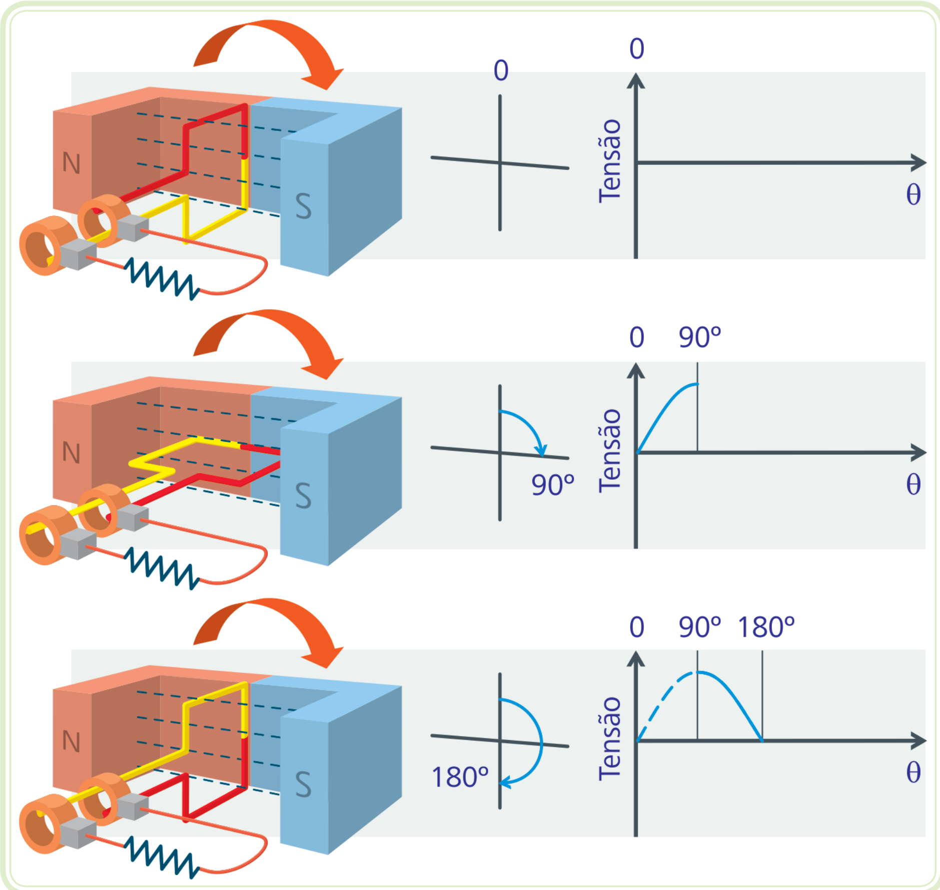

Figura 3.2: Tensão de saída de um gerador CA elementar
Fonte: CTISM

Os valores instantâneos da força eletromotriz podem ser calculados da seguinte maneira:

Equação 3.1

$$e = B \times l \times v \times \text{sen}(\theta)$$

Em que: e – força eletromotriz induzida, em volts
B – indução do campo magnético, em teslas
l – comprimento do condutor, em metros
v – velocidade linear de deslocamento do condutor, em metros por segundo
θ – ângulo formado entre B e v

3.2 Circuitos básicos

Os circuitos básicos em corrente alternada servem de base para a compreensão dos demais circuitos. Por isso, é importante compreender bem o funcionamento de cada circuito básico separadamente, visto que os circuitos mais complexos são construídos a partir da soma dos efeitos de cada circuito básico.

3.2.1 Circuito puramente resistivo

Nesse livro, por questões didáticas e práticas, iremos utilizar valores eficazes na representação dos fasores ao invés dos valores de pico.

Quando aplicada uma tensão senoidal em um resistor, passará através dele uma corrente elétrica com a mesma forma de onda, mesma frequência e mesma fase da tensão. A amplitude da corrente é função da tensão aplicada e da impedância do resistor.

A impedância $\dot{Z}$ representa o efeito de oposição à passagem de corrente que os elementos de um circuito oferecem. Ela determina a amplitude do sinal de corrente e sua defasagem em relação ao sinal de tensão. A impedância é dada em função da resistência elétrica (R) e da reatância (X) do circuito, cuja unidade é Ohm (Ω). Trata-se da relação entre o fasor de tensão pelo fasor da corrente, de modo semelhante à primeira Lei de Ohm:

Equação 3.2

$$\dot{Z} = \frac{\dot{V}}{\dot{I}}$$

A impedância equivalente de um circuito é representada nas formas complexas da seguinte maneira:

Forma cartesiana:

Equação 3.3

$$\dot{Z}_{eq} = R + jX$$

Forma polar:

Equação 3.4

$$\dot{Z}_{eq} = Z\underline{|\varphi}$$

Ou seja:

Equação 3.5

$$\dot{Z}_{eq} = \sqrt{R^2 + X^2}\;\underline{\left|\operatorname{tg}^{-1}\frac{X}{R}\right.}$$

A impedância é um número complexo, sendo a relação entre dois números complexos: a tensão dividida pela corrente. No entanto, a impedância não é um fasor, ou seja, ela não possui uma função senoidal correspondente no domínio do tempo de sentido físico, como a corrente e a tensão fasorial o tem.

A reatância é uma propriedade de elementos reativos tais como indutores e capacitores e que será vista no item 3.2.2 e na Aula 4.

Em que: R – componente resistiva (parte real), em Ω
X – componente reativa (parte imaginária), em Ω

Um resistor não provoca defasagem entre tensão e corrente, logo o ângulo de defasagem é nulo.

A impedância de um circuito puramente resistivo nas formas complexas é representada da seguinte maneira:

Forma polar:

Equação 3.6

$$\dot{Z}_R = R\underline{|0°} \ \ \Omega$$

Forma cartesiana:

Equação 3.7

$$\dot{Z}_R = R + j0 = R \ \ \Omega$$

Exemplo

Uma tensão senoidal:

$$\dot{V} = 127\ \underline{|30°}\ \ V_{rms}$$

É aplicada sobre um resistor de resistência elétrica igual a 50 Ω, de acordo com a Figura 3.3. Pede-se:

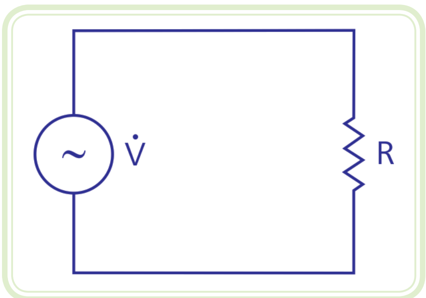

Figura 3.3: Circuito puramente resistivo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a corrente elétrica na forma complexa polar.

Da primeira Lei de Ohm para corrente alternada:

Equação 3.8

$$\dot{V} = \dot{Z} \times \dot{I}$$

Vem:

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}}{\dot{Z}}$$

$$\dot{Z} = \dot{Z}_R = 50\underline{|0°}\ \ \Omega$$

$$\dot{I} = \frac{127\underline{|30°}}{50\underline{|0°}} = \frac{127}{50}\underline{|30° - 0°} = 2{,}54\ \underline{|30°}\ A_{rms}$$

b) Represente a expressão matemática da tensão e da corrente em função do tempo.

Valor de pico da tensão:

$$V_P = \sqrt{2}\, V_{rms} = 179{,}61\ V$$

Transformação de graus para radianos da fase inicial da tensão:

$$\theta_0 = \frac{30°}{180°}\pi\ rd = 1{,}67\pi\quad rd$$

Expressão matemática da tensão:

$$v(t) = V_P\ sen(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = 179{,}61\ sen(\omega t + 1{,}67\pi)\ V$$

Valor de pico da corrente:

$$I_P = \sqrt{2}\ I_{rms} = 3{,}59\ A$$

Expressão matemática da corrente:

$$i(t) = I_P \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$i(t) = 3{,}59 \operatorname{sen}(\omega t + 1{,}67\pi)\ A$$

c) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico.

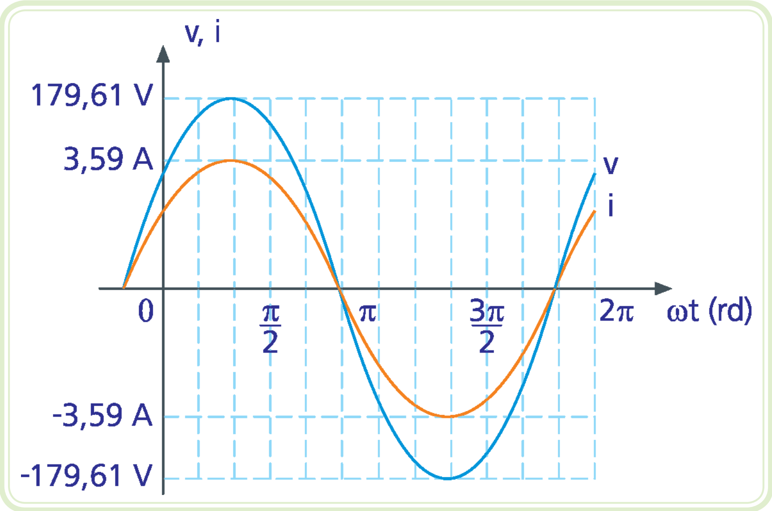

Figura 3.4: Forma de onda da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

d) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

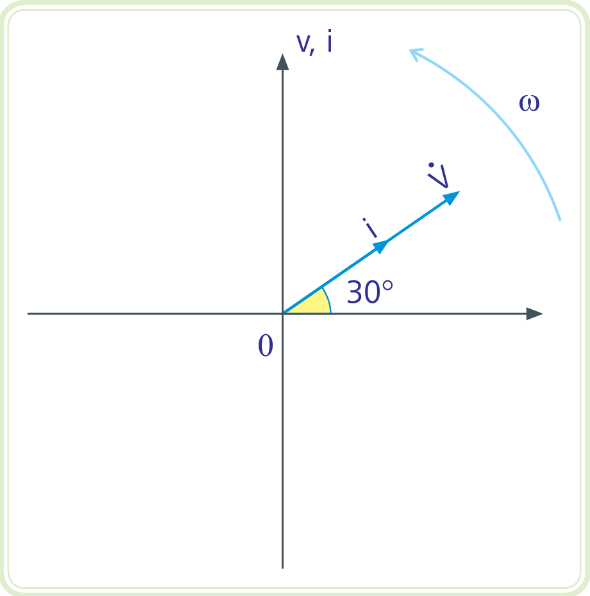

Figura 3.5: Diagrama fasorial da corrente e da tensão
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

3.2.1.1 Potência dissipada pela resistência elétrica

A potência instantânea dissipada por uma resistência elétrica é obtida por meio da multiplicação entre os sinais de tensão v(t) e de corrente i(t), ou seja:

Equação 3.9

$$p(t) = v(t)\, i(t)$$

A partir desta expressão e da primeira Lei de Ohm, podemos reescrever a equação em função do valor da resistência elétrica da carga:

Equação 3.10

$$p(t) = R\, i^2(t) \quad \text{ou} \quad p(t) = \frac{v^2(t)}{R}$$

A Figura 3.6 mostra as formas de onda da potência, da tensão e da corrente em função do tempo.

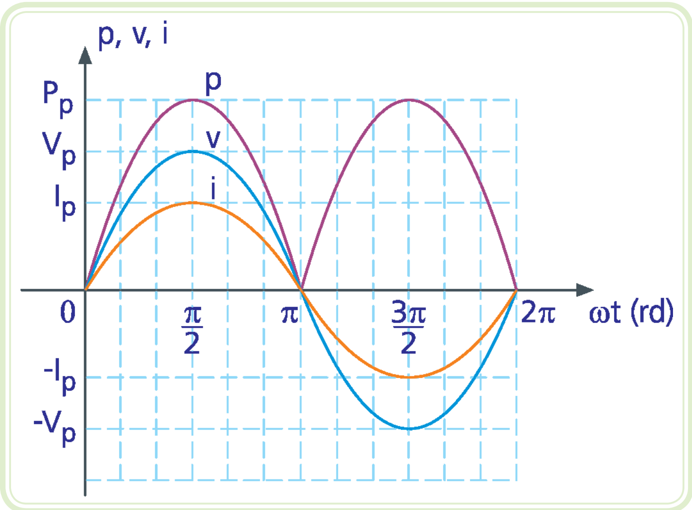

Figura 3.6: Sinais de potência, tensão e corrente instantâneos de um circuito puramente resistivo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a potência instantânea sempre é positiva, pois os sinais de tensão e de corrente ou são ambos positivos ou são ambos negativos num mesmo instante de tempo. Fisicamente isto significa que uma carga puramente resistiva consome toda a energia fornecida pelo gerador.

A potência ativa, real ou útil representa a taxa de transformação de energia elétrica em trabalho, medida em watt (W). Matematicamente, é a média do sinal de potência p(t), dada por:

Equação 3.11

$$P = V_{rms}\, I_{rms}\, \cos\varphi$$

Em que: φ – ângulo de defasagem entre tensão e corrente

3.2.2 Circuito puramente indutivo

A-Z

indutor
Armazena energia na forma de campo magnético. A capacidade de armazenamento desta energia é indicada por sua indutância L, medida em Henry (H).

O **indutor** é um elemento que armazena energia na forma de campo magnético. A seguir será abordado o funcionamento de um indutor quando alimentado por uma tensão alternada.

3.2.2.1 Considerações importantes sobre o indutor

A Figura 3.7 mostra esquematicamente um indutor e seu símbolo. Trata-se de um fio condutor enrolado helicoidalmente sobre um núcleo, geralmente de ar, ferro ou ferrite.

Figura 3.7: Esquema de um indutor à esquerda e seu símbolo à direita
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

A indutância de um indutor é diretamente proporcional ao número de voltas (espiras) do fio condutor em torno do núcleo, à permeabilidade magnética do núcleo, à área da seção do núcleo e inversamente proporcional ao comprimento do indutor. Por sua vez, a permeabilidade magnética é definida como o grau de magnetização de um material em resposta a um campo magnético aplicado. Em indutores cujo núcleo é um material ferromagnético (por exemplo ferrite), a permeabilidade magnética do seu núcleo é elevada, aumentando-se assim a sua indutância.

A-Z

Lei de Lenz
A corrente elétrica induzida tem um sentido tal que cria um outro campo magnético que se opõe à variação do campo magnético que a produziu.

Um indutor se opõe à variação de corrente, pois a variação do campo magnético através das espiras da bobina faz surgir uma tensão autoinduzida. Esta, por sua vez, produz uma corrente induzida que se opõe à causa que a originou (variação da corrente), de acordo com a **Lei de Lenz**.

3.2.2.2 Indutor ideal em CA

Devemos observar com muita atenção o comportamento da corrente em relação à tensão em um circuito puramente indutivo.

Num indutor a corrente está atrasada em relação à tensão. Se for aplicada uma tensão senoidal sobre um indutor ideal, a corrente fica atrasada de 90° em relação à tensão, de acordo com a Figura 3.8.

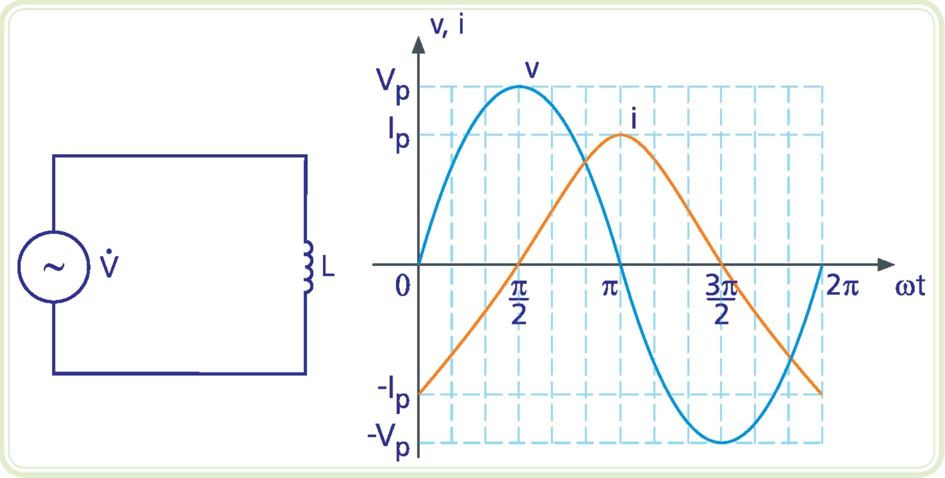

Figura 3.8: Circuito puramente indutivo à esquerda e formas de onda à direita
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

3.2.2.3 Reatância indutiva (X_L)

A reatância indutiva mede a oposição que o indutor oferece à variação de corrente, dada pela seguinte expressão:

Equação 3.12

$$X_L = 2\pi f \, L$$

A unidade da reatância indutiva é dada em ohms (Ω).

Em regime permanente, um indutor comporta-se como um curto-circuito em corrente contínua, pois $f = 0$ implica $X_L = 0$; e como uma impedância em corrente alternada. Se a frequência da tensão for muito alta, ele comporta-se como um circuito aberto.

A impedância de um circuito puramente indutivo nas formas complexas é representada da seguinte maneira:

Forma polar:

Equação 3.13

$$\dot{Z}_L = X_L \underline{|90°} \quad \Omega$$

Forma cartesiana:

Equação 3.14

$$\dot{Z}_L = jX_L \quad \Omega$$

3.2.2.4 Potência num indutor ideal

A Figura 3.9 mostra as formas de onda da potência, da tensão e da corrente em função do tempo de um circuito puramente indutivo.

A-Z

potência ativa
É a potência média fornecida para um elemento ou dissipada por um elemento. Esta potência mede o trabalho realizado num intervalo de tempo. Ela é dada pela relação:
$P = V_{rms} \times I_{rms} \times \cos\varphi$
Sua unidade é watt (W).

potência reativa
Mede a potência trocada entre o gerador e a carga, dada pela seguinte relação:
$Q = V_{rms} \times I_{rms} \times \text{sen}\varphi$
Sua unidade é volt-àmpere-reativo (VAR).

potência aparente
Representa tanto a parcela de potência utilizada quanto de potência trocada. É a soma vetorial entre as potências ativa e reativa, dada pelas relações:
$S = V_{rms} \times I_{rms}$
Sua unidade é volt-àmpere (VA).

Em corrente alternada existem três tipos de potência: **potência ativa** (P), **potência reativa** (Q) e **potência aparente** (S).

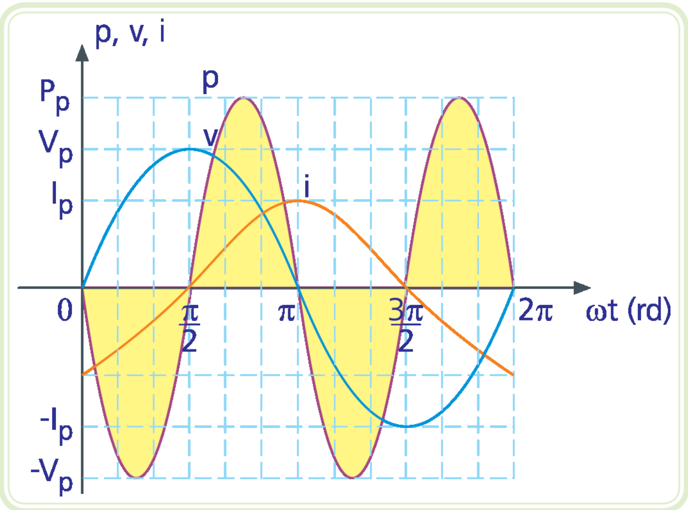

Figura 3.9: Sinais de potência, tensão e corrente instantâneos de um circuito puramente indutivo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a média do sinal de potência (potência ativa, real ou útil) é igual a zero. Isto indica que em um circuito puramente indutivo não há dissipação de energia. Na verdade, ocorre apenas uma troca de energia, que é medida pela potência reativa. Quando a potência é positiva, o indutor está recebendo energia do gerador, armazenando-a na forma de campo magnético. Por outro lado, quando a potência é negativa, o indutor comporta-se como um gerador, devolvendo a energia armazenada para o circuito. Como neste circuito não há potência ativa, a potência aparente é igual à potência reativa.

Exemplo

Uma tensão senoidal:

$$\dot{V} = 220\underline{|0^\circ} \ V_{rms}/60 \text{ Hz}$$

É aplicada sobre um indutor de indutância igual a 100 mH, de acordo com a Figura 3.10. Pede-se:

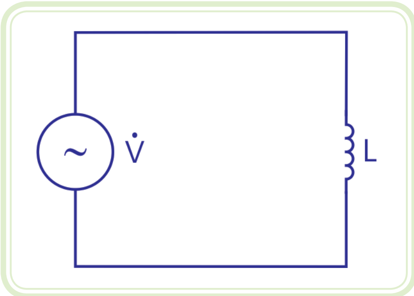

Figura 3.10: Circuito puramente indutivo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a reatância indutiva e expresse a impedância do circuito na forma complexa polar.

$$X_L = 2\pi f L = 37{,}70 \ \Omega$$

$$\dot{Z}_L = 37{,}70\underline{|90^\circ} \ \Omega$$

b) Calcule a corrente elétrica na forma complexa polar.

Da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, vem:

$$\dot{V}_L = \dot{Z}_L \times \dot{I}_L \quad \Rightarrow \quad \dot{I}_L = \frac{\dot{V}_L}{\dot{Z}_L}$$

$$\dot{I} = \frac{220\underline{|0^\circ}}{37{,}70\underline{|90^\circ}} = \frac{220}{37{,}70}\underline{|0^\circ - 90^\circ} = 5{,}84\underline{|-90^\circ} \ A_{rms}$$

c) Represente a expressão matemática da tensão e da corrente em função do tempo.

Valor de pico da tensão:

$$V_P = \sqrt{2}\, V_{rms} = 311{,}13 \text{ V}$$

Expressão matemática da tensão:

$$v(t) = V_P \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = 311{,}13 \operatorname{sen}(\omega t) \text{ V}$$

Valor de pico da corrente:

$$I_P = \sqrt{2}\, I_{rms} = 8{,}26 \text{ A}$$

Expressão matemática da corrente:

$$i(t) = I_P \operatorname{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$i(t) = 8{,}26 \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \text{A}$$

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

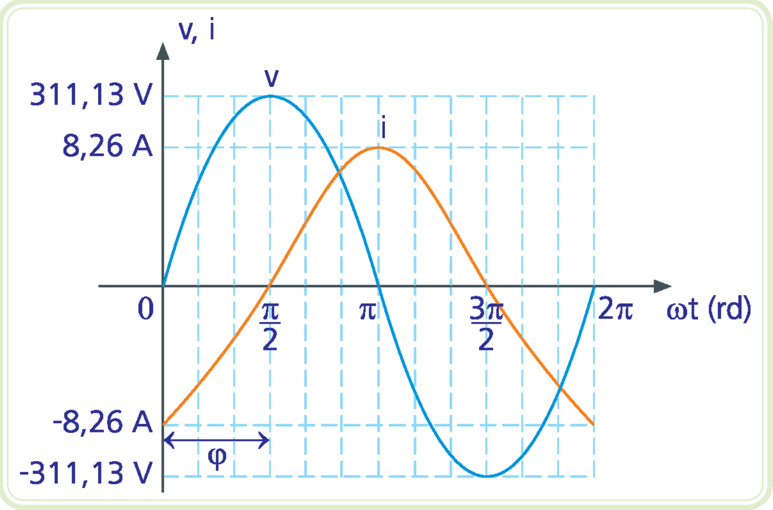

Figura 3.11: Forma de onda da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

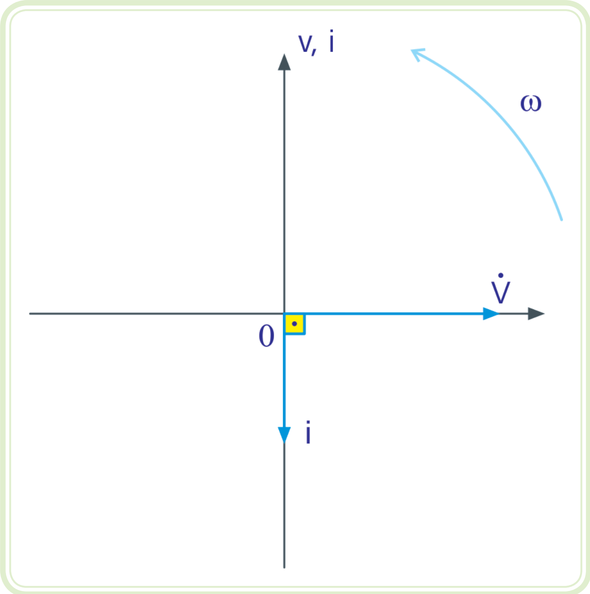

Figura 3.12: Digrama fasorial da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

f) Calcule as potências ativa (P) e reativa (Q)

$$P = V_{rms}\ I_{rms}\ \cos\varphi = 220 \times 5{,}84 \times \cos 90° = 0\ \text{W}$$

$$Q = V_{rms}\ I_{rms}\ \text{sen}\varphi = 220 \times 5{,}84 \times \text{sen}90° = 1284{,}8\ \text{VAR}$$

Resumo

Nessa aula, você aprendeu alguns conceitos sobre a importância da corrente alternada. Além disso, foi abordado o princípio de funcionamento de um gerador elementar de corrente alternada e a análise de dois circuitos básicos foi mostrada: o circuito puramente resistivo e o circuito puramente indutivo.

Atividades de aprendizagem

1. Explique o princípio de funcionamento de um gerador elementar de corrente alternada.

2. De que depende a tensão induzida nas bobinas de um gerador de corrente alternada? Represente matematicamente.

3. Uma tensão senoidal:

$$\dot{V} = 127\angle -30° \ V_{rms}/60\ Hz$$

É aplicada sobre um resistor de resistência igual a 100 Ω. Pede-se:

a) Expresse a impedância do circuito na forma complexa polar.

b) Calcule a corrente elétrica na forma complexa polar.

c) Represente a expressão matemática da tensão e da corrente em função do tempo.

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

f) Calcule as potências ativa (P) e reativa (Q).

4. Uma tensão senoidal:

$$\dot{V} = 220\angle 90° \ V_{rms}/60\ Hz$$

É aplicada sobre um indutor de indutância igual a 100 mH. Pede-se:

a) Expresse a impedância do circuito na forma complexa polar. Lembre-se que para isso, você deve primeiro calcular a reatância do indutor.

b) Calcule a corrente elétrica na forma complexa polar.

c) Represente a expressão matemática da tensão e da corrente em função do tempo.

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

f) Calcule as potências ativa (P) e reativa (Q).

Aula 4 – Circuitos básicos em corrente alternada – continuação

Objetivos

Continuar o estudo sobre circuitos básicos iniciado na aula anterior.

Conhecer o capacitor e o conceito de capacitância e reatância capacitiva, bem como aprender o princípio de funcionamento do capacitor em corrente alternada.

4.1 Circuito puramente capacitivo

Depois de analisarmos os circuitos resistivos e indutivos puros, chegou a vez do último circuito básico: o circuito puramente capacitivo.

4.1.1 Considerações importantes sobre o capacitor

Um capacitor ou condensador é um dispositivo que armazena cargas elétricas. A Figura 4.1 mostra esquematicamente um capacitor de placas paralelas e seu símbolo. Trata-se de duas placas condutoras paralelas, denominadas armaduras, separadas por um material isolante, denominado dielétrico.

Um capacitor armazena energia na forma de campo elétrico. A capacidade de armazenar cargas elétricas de um capacitor é medida por meio de sua capacitância C, cuja unidade é dada em Farad (F).

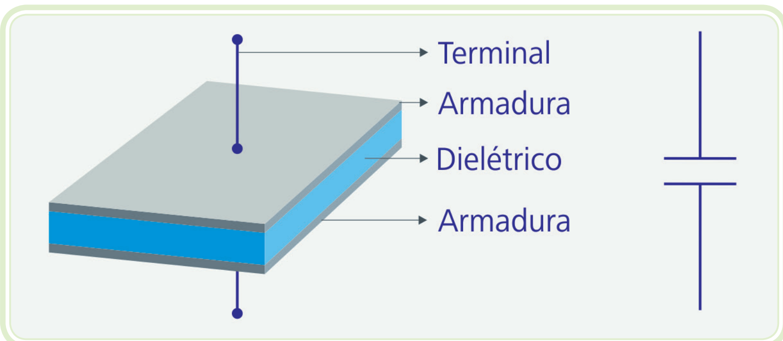

Figura 4.1: Esquema de um capacitor à esquerda e seu símbolo à direita
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

A capacitância de um capacitor de placas paralelas é diretamente proporcional à área de suas placas e da constante dielétrica do material isolante introduzido entre essas placas e inversamente proporcional à distância de separação das placas do capacitor. Quanto maior for a constante dielétrica do material não condutor introduzido entre as placas, maior será a capacitância do capacitor.

Um capacitor se opõe à variação de tensão. Quando uma tensão é aplicada em um capacitor, há um acúmulo de cargas em suas placas. Então surge uma corrente de deslocamento de valor máximo inicialmente, que diminui à medida que o capacitor é carregado. Quando as placas se carregam totalmente, essa corrente é nula. Por outro lado, a tensão no capacitor começa em zero e cresce até atingir o valor praticamente igual da tensão que o alimenta.

Um capacitor comporta-se como um circuito aberto em tensão contínua quando atingido o regime permanente (processo de carga já finalizado, por exemplo), mas permite a condução em tensão variável.

4.1.2 Capacitor ideal em CA

Num capacitor, a corrente está adiantada em relação à tensão.

Se for aplicada uma tensão senoidal sobre um capacitor ideal, a corrente fica adiantada de 90° em relação à tensão (Figura 4.2).

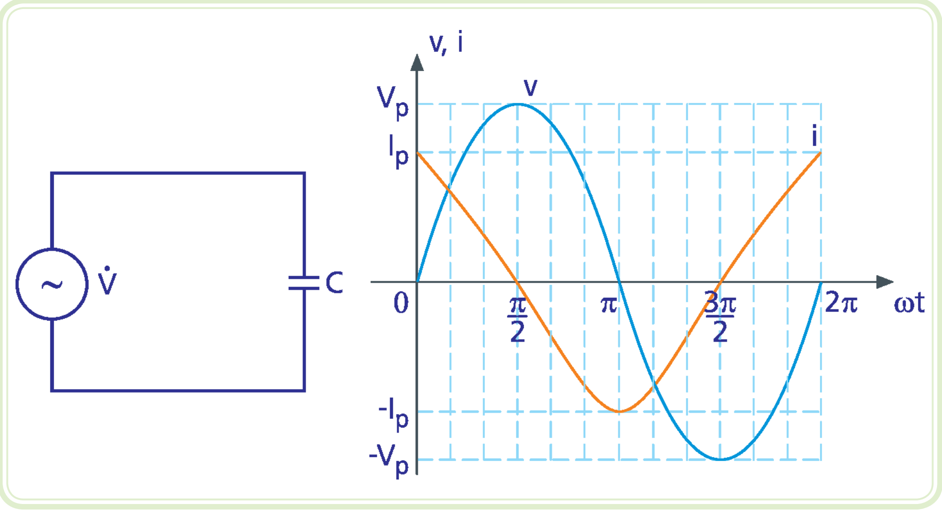

Figura 4.2: Circuito puramente capacitivo à esquerda e formas de onda à direita
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

4.1.3 Reatância capacitiva (X_C)

A reatância capacitiva mede a oposição que o capacitor oferece à variação de corrente, dada pela seguinte expressão:

Equação 4.1

$$X_C = -\frac{1}{2\pi f C}$$

A unidade da reatância capacitiva é dada em ohms (Ω).

Um capacitor comporta-se como um circuito aberto em corrente contínua e como uma impedância em corrente alternada. Se a frequência da tensão for muito alta, ele comporta-se como um curto circuito.

A impedância de um circuito puramente capacitivo nas formas complexas é representada da seguinte maneira:

Forma polar:

Equação 4.2

$$\dot{Z}_C = |X_C| \underline{|-90^\circ} \quad \Omega$$

Forma cartesiana:

Equação 4.3

$$\dot{Z}_C = jX_C \quad \Omega$$

4.1.4 Potência num capacitor ideal

A Figura 4.3 mostra as formas de onda da potência, da tensão e da corrente em função do tempo de um circuito puramente capacitivo.

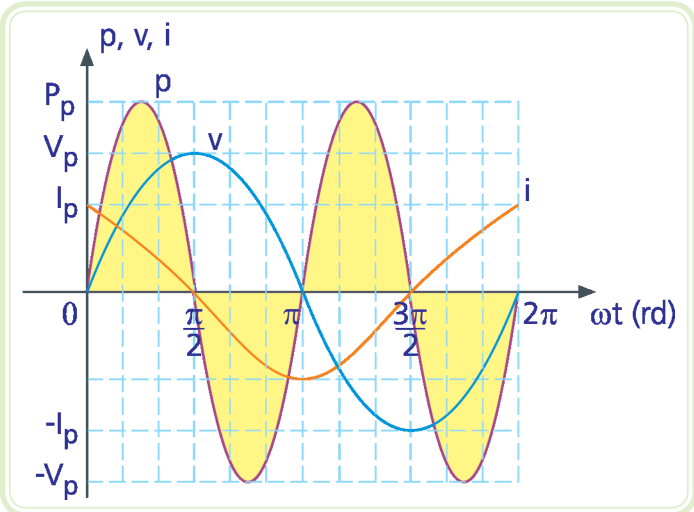

Figura 4.3: Sinais de potência, tensão e corrente instantâneos de um circuito puramente capacitivo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a média do sinal de potência é igual a zero. Isto indica que em um circuito puramente capacitivo não há dissipação de energia. Na verdade, ocorre apenas uma troca de energia. Quando a potência é positiva, o capacitor está recebendo energia do gerador, armazenando-a na forma de campo elétrico. Por outro lado, quando a potência é negativa, o capacitor comporta-se como um gerador, devolvendo a energia armazenada para o circuito.

Exemplo

Uma tensão senoidal:

$$\dot{V} = 127\,\underline{|60^\circ}\ V_{rms}/60\ Hz$$

É aplicada sobre um capacitor de capacitância igual a 47 μF. Pede-se:

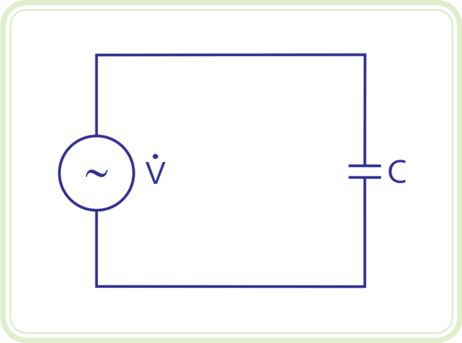

Figura 4.4: Circuito puramente capacitivo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a reatância capacitiva e expresse a impedância na forma complexa polar.

$$X_C = -\frac{1}{2\pi\, f\, C} = -56{,}44\ \Omega$$

$$\dot{Z}_C = 56{,}44\,\underline{|-90^\circ}\ \Omega$$

b) Calcule a corrente elétrica na forma complexa polar.

Da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, vem:

$$\dot{V}_C = \dot{Z}_C\,\dot{I}_C$$

$$\dot{I} = \frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}_C}$$

$$\dot{I} = \frac{127\,\underline{|60^\circ}}{56{,}44\,\underline{|-90^\circ}} = \frac{127}{56{,}44}\,\underline{|60^\circ - (-90^\circ)} = 2{,}25\,\underline{|150^\circ}\ A_{rms}$$

c) Represente a expressão matemática da tensão e da corrente em função do tempo.

Valor de pico da tensão:

$$V_P = \sqrt{2}\,V_{rms} = 179{,}61\ \text{V}$$

Transformação de graus para radianos da fase inicial da tensão:

$$\theta_0 = \frac{60°}{180°}\pi\ \text{rd} = 0{,}33\pi\quad \text{rd}$$

Expressão matemática da tensão:

$$v(t) = V_P\ \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$v(t) = 179{,}61\ \text{sen}(\omega t + 0{,}33\pi)\ \text{V}$$

Valor de pico da corrente:

$$I_P = \sqrt{2}\,I_{rms} = 8{,}26\ \text{A}$$

Transformação de graus para radianos da fase inicial da corrente:

$$\theta_0 = \frac{150°}{180°}\pi\ \text{rd} = 0{,}83\pi\quad \text{rd}$$

Expressão matemática da corrente:

$$i(t) = I_P\ \text{sen}(\omega t + \theta_0)$$

$$i(t) = 8{,}26\ \text{sen}(\omega t + 0{,}83\pi)\ \text{A}$$

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

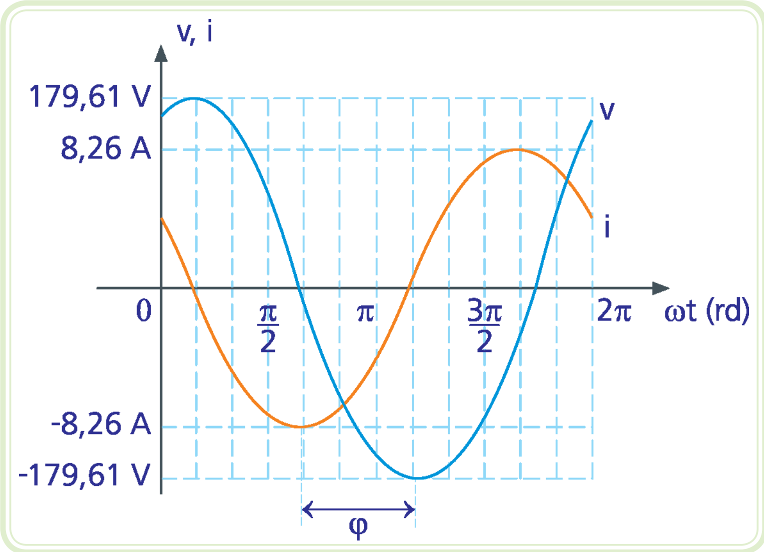

Figura 4.5: Forma de onda da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

e) Calcule as potências ativa (P) e reativa (Q).

$$P = V_{rms}\ I_{rms}\ \cos\varphi = 220 \times 5{,}84 \times \cos 90° = 0\ W$$

$$Q = V_{rms}\ I_{rms}\ \text{sen}\varphi = 220 \times 5{,}84 \times \text{sen}90° = 1284{,}8\ VAR$$

Resumo

Nessa aula, você terminou de aprender como analisar circuitos básicos em corrente alternada. É importante lembrar que o resistor não provoca defasagem entre os sinais de tensão e corrente. No indutor a corrente está atrasada de 90° em relação à tensão. Já no capacitor a corrente está adiantada de 90° em relação à tensão.

Foi visto que o único elemento responsável pela dissipação da energia elétrica é o resistor. Já o capacitor e o indutor apenas trocam energia com o gerador.

Atividades de aprendizagem

1. Quais as quatro formas de representação de um sinal senoidal vistas até aqui? Exemplifique e explique cada uma.

2. Estabeleça a relação entre a corrente e a tensão em circuitos resistivos, capacitivos e indutivos puros.

3. Diferencie resistência, reatância indutiva e reatância capacitiva. Qual a influência da frequência nestas grandezas?

4. Conceitue impedância de um circuito elétrico.

5. Diferencie potência ativa, potência reativa, potência aparente e fator de potência.

6. Uma tensão senoidal:

$$\dot{V} = 127\underline{|-30°}\ \ V_{rms}/60\ \text{Hz}$$

É aplicada sobre um capacitor de capacitância igual a 100 μF. Pede-se:

a) Calcule a impedância na forma complexa polar.

b) Calcule a corrente elétrica na forma complexa polar.

c) Represente a expressão matemática da tensão e da corrente em função do tempo.

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_p e I_p) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

f) Calcule as potências ativa (P) e reativa (Q).

Aula 5 – Análise de circuitos indutivos em CA – circuitos RL

Objetivos

Aprender analisar circuitos RL em série e em paralelo em corrente alternada, utilizando as diversas formas de representação: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial.

5.1 Circuitos indutivos

Depois de entendermos os efeitos individuais provocados por cada elemento (resistor, capacitor e indutor) iremos começar a compreender o efeito da combinação destes elementos. Nesta aula iremos estudar o efeito de circuitos formados por resistências e indutâncias, em série e em paralelo.

5.1.1 Circuito RL série

Todo indutor apresenta indutância e resistência elétrica, devido à resistividade do fio do indutor. É como se tivéssemos um indutor ideal em série com um resistor, ou seja, a corrente encontra dois tipos de oposição: a reatância indutiva e a resistência elétrica do fio.

Os circuitos dessa aula serão abordados na forma de exemplos. Observe que todos os circuitos terão uma sequência lógica de resolução, cada um com suas particularidades.

Exemplo

Um gerador de tensão:

$$\dot{V} = 220\underline{|0^\circ}\ V_{rms}/60\ Hz$$

Alimenta um resistor de resistência elétrica igual a 20 Ω e um indutor de indutância igual a 50 mH ligados em série (Figura 5.1). Pede-se:

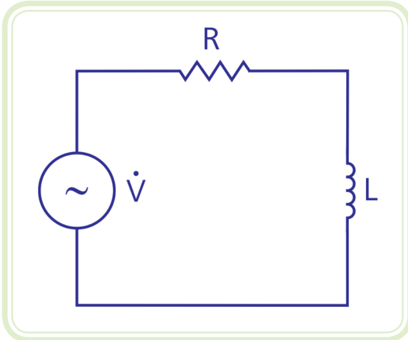

Figura 5.1: Circuito RL série
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a reatância indutiva e expresse a impedância do circuito na forma cartesiana.

A impedância de um circuito RL série é a soma das impedâncias de cada elemento: resistor e indutor. Lembre-se que para realizar operações de soma com números complexos é mais conveniente utilizar a forma cartesiana.

$$X_L = 2\pi f L = 18{,}85 \ \ \Omega$$

Pesquise na internet como realizar uma soma vetorial por meio da regra do paralelogramo.

Impedância do circuito RL série na forma cartesiana:

$$\dot{Z}_R = R$$
$$\dot{Z}_L = j X_L$$
$$\dot{Z} = R + j X_L$$
$$\dot{Z} = 20 + j18{,}85 \ \ \Omega$$

É conveniente representar a impedância na forma polar para facilitar a utilização da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, que utiliza operações de multiplicação ou divisão.

Transformação da forma cartesiana para forma polar:

$$\dot{Z} = \sqrt{R^2 + X_L^2}\ \underline{\big|\,\text{arctg}\,\frac{X_L}{R}}$$

$$\dot{Z} = \sqrt{20^2 + 18{,}85^2}\ \underline{\big|\,\text{arctg}\,\frac{18{,}85}{20}}$$

$$\dot{Z} = 27{,}48\,\underline{|\,43{,}30°}\ \Omega$$

b) Calcule a corrente total do circuito.

Da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, vem:

$$\dot{i} = \frac{220\,\underline{|\,0°}}{27{,}48\,\underline{|\,43{,}30°}} = \frac{220}{27{,}48}\,\underline{|\,0° - 43{,}30°} = 8{,}01\,\underline{|\,-43{,}30°}\ A_{rms}$$

Observe que a corrente contínua atrasada em relação à tensão, porém de um ângulo menor que 90°. Enquanto a indutância tende a defasá-la de 90°, a resistência tende a colocá-la em fase com a tensão.

c) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_p) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

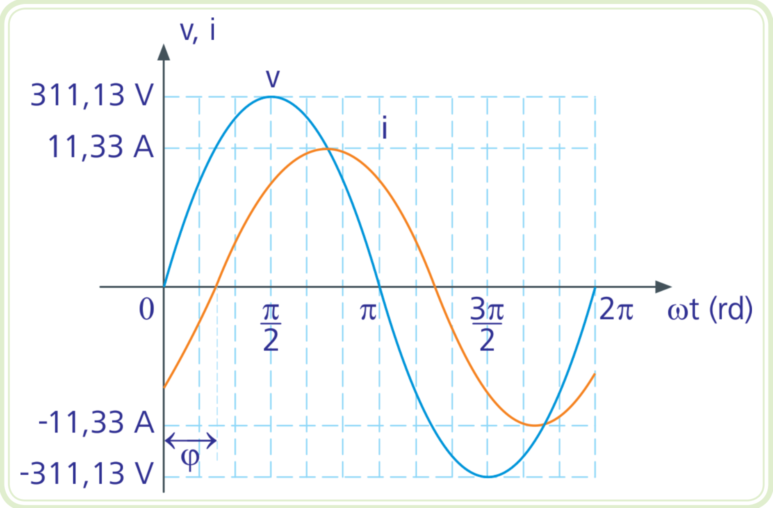

Figura 5.2: Forma de onda da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

O ângulo de defasagem entre tensão e corrente φ é o ângulo da impedância total do circuito.

d) Esboce o diagrama fasorial da corrente e das tensões do gerador ($\dot{V}$), sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e sobre o indutor ($\dot{V}_L$).

Como se trata de um circuito série, a corrente é a mesma para os dois dispositivos.

A soma fasorial entre as tensões sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e sobre o indutor ($\dot{V}_L$) é igual à tensão do gerador ($\dot{V}$), ou seja:

Equação 5.1

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L$$

Tensão sobre o resistor:

$$\dot{V}_R = \dot{Z}_R\,\dot{I} = 20\underline{|0°} \times 8{,}01\underline{|-43{,}30°} = 20 \times 8{,}01\underline{|0° + (-43{,}30°)}$$

$$\dot{V}_R = 160{,}2\underline{|-43{,}30°}\ V_{rms}$$

Tensão sobre o indutor:

$$\dot{V}_L = \dot{Z}_L\,\dot{I} = 18{,}85\underline{|90°} \times 8{,}01\underline{|-43{,}30°} = 18{,}85 \times 8{,}01\underline{|90° + (-43{,}30°)}$$

$$\dot{V}_L = 150{,}99\underline{|46{,}70°}\ V_{rms}$$

Diagrama fasorial (Figura 5.3):

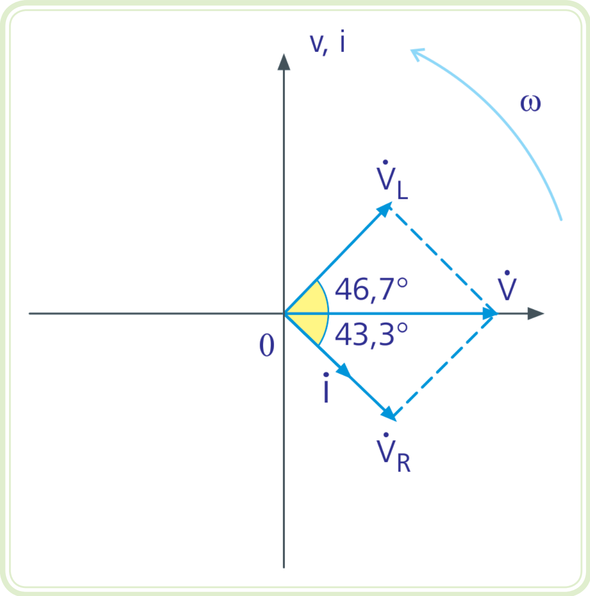

Figura 5.3: Diagrama fasorial da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a tensão sobre o resistor ($\dot{V}_R$) está em fase com a corrente. Por outro lado, a corrente está atrasada de 90° em relação à tensão sobre o indutor ($\dot{V}_L$).

e) Calcule as potências ativa (P), reativa (Q) e aparente (S).

Potência aparente S é a soma vetorial das potências ativa e reativa. Sua unidade é o volt-ampere (VA). Pode ser calculada de duas maneiras:

Equação 5.2

$$S = V_{rms}\, I_{rms} \qquad \text{ou} \qquad S = \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$P = V_{rms}\, I_{rms} \cos\varphi = 220 \times 8{,}01 \times \cos 43{,}30°$$

$$P = 1282{,}48 \text{ W}$$

$$Q = V_{rms}\, I_{rms} \operatorname{sen}\varphi = 220 \times 8{,}01 \times \operatorname{sen} 43{,}30°$$

$$Q = 1208{,}55 \text{ VAR}$$

$$S = V_{rms}\, I_{rms} = 220 \times 8{,}01$$

$$S = 1762{,}20 \text{ VA}$$

f) Represente o triângulo de potência.

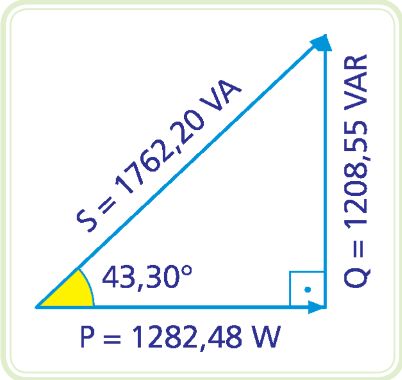

Figura 5.4: Triângulo de potência do circuito RL série
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que, nesse circuito, ocorrem dois efeitos: dissipação de energia por meio do resistor (indicada pela potência ativa) e troca de energia entre indutor e gerador (indicada pela potência reativa).

Se fosse um circuito puramente resistivo, haveria apenas potência ativa e, portanto, a potência aparente seria igual à potência ativa. Por outro lado, se fosse um circuito puramente indutivo ou capacitivo, haveria apenas potência reativa e, portanto, a potência aparente seria igual à potência reativa.

g) Calcule o fator de potência (FP).

O fator de potência (FP) mede o aproveitamento da energia fornecida do gerador para a produção de trabalho pela carga. Pode ser calculado da seguinte maneira:

Equação 5.3

$$FP = \frac{P}{S} = \cos\varphi$$

Um circuito puramente resistivo possui fator de potência igual a 100 %, já um circuito puramente indutivo ou puramente capacitivo possui fator de potência igual a zero.

$$FP = \cos 43{,}30° = 72{,}78\ \%$$

5.1.2 Circuito RL paralelo

Exemplo

Um gerador de tensão:

$$\dot{V} = 220\underline{|30°}\ \ V_{rms}/60\ Hz$$

Alimenta um resistor de resistência elétrica igual a 15 Ω e um indutor de indutância igual a 100 mH ligados em paralelo (Figura 5.5). Pede-se:

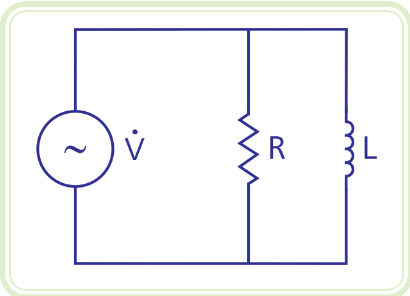

Figura 5.5: Circuito RL paralelo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a reatância indutiva.

$$X_L = 2\pi\ f\ L = 37{,}70\ \Omega$$

b) Calcule a impedância total do circuito na forma complexa polar.

A impedância de um circuito RL paralelo é a multiplicação dividida pela soma das impedâncias de cada elemento, dois a dois.

Impedância do circuito RL paralelo:

$$\dot{Z} = \frac{R\ \underline{|0°}\ \ X_L\ \underline{|90°}}{R + j\,X_L}$$

$$\dot{Z} = \frac{15\ \underline{|0°}\ 37{,}70\ \underline{|90°}}{15 + j\ 37{,}70} = \frac{15 \times 37{,}70\ \underline{|0° + 90°}}{15 + j\ 37{,}70}$$

Observe que para realizar a divisão acima é conveniente transformar o denominador da expressão da forma cartesiana para a forma polar.

$$\dot{Z} = \frac{15 \times 37{,}70 \angle 0° + 90°}{15 + j\,37{,}70} = \frac{565{,}5 \angle 90°}{\sqrt{15^2 + 37{,}70^2} \angle \operatorname{arctg} \frac{37{,}70}{15}}$$

$$\dot{Z} = \frac{565{,}5 \angle 90°}{40{,}57 \angle 68{,}30°} = \frac{565{,}5}{40{,}57} \angle 90° - 68{,}30°$$

$$\dot{Z} = 13{,}94 \angle 21{,}70°\ \Omega$$

c) Calcule a corrente total do circuito.

Da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, vem:

$$\dot{I} = \frac{220 \angle 30°}{13{,}94 \angle 21{,}70°} = \frac{220}{13{,}94} \angle 30° - 21{,}70° = 15{,}78 \angle 8{,}3°\ \ A_{rms}$$

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente total do circuito, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

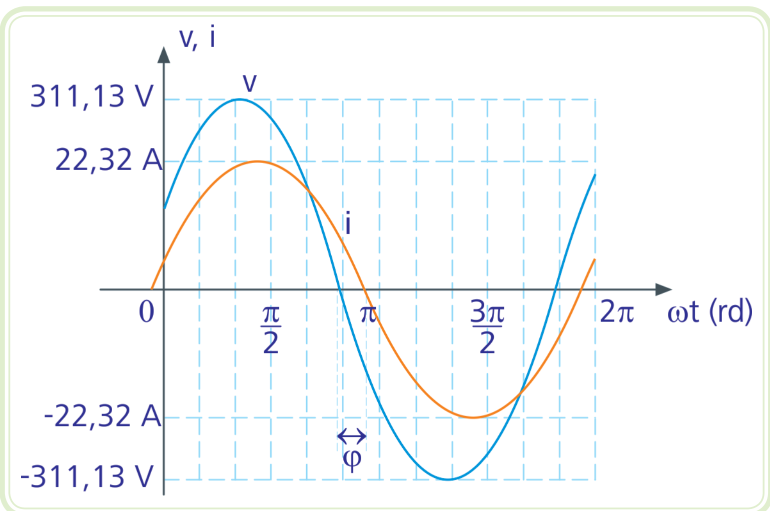

Figura 5.6: Formas de onda da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

Como se trata de um circuito paralelo, a tensão é a mesma para os dois dispositivos.

A soma fasorial entre as correntes através do resistor ($\dot{I}_R$) e do indutor ($\dot{I}_L$) é igual à corrente total do circuito ($\dot{I}$), ou seja:

Equação 5.3

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L$$

Corrente através do resistor:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_R} = \frac{220\underline{|30^\circ}}{15\underline{|0^\circ}} = \frac{220}{15}\underline{|30^\circ - 0^\circ}$$

$$\dot{I}_R = 14{,}67\ \underline{|30^\circ}\ A_{rms}$$

Corrente através do indutor:

$$\dot{I}_L = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_L} = \frac{220\underline{|30^\circ}}{37{,}70\underline{|90^\circ}} = \frac{220}{37{,}70}\underline{|30^\circ - 90^\circ}$$

$$\dot{I}_L = 5{,}84\ \underline{|-60^\circ}\ A_{rms}$$

Diagrama fasorial (Figura 5.7):

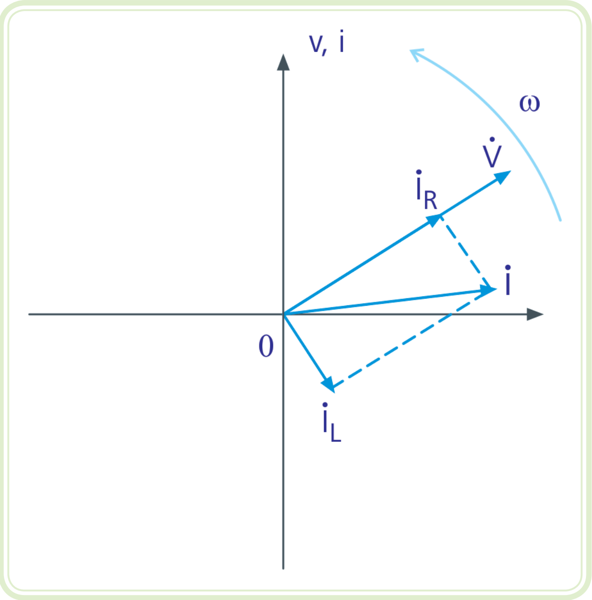

Figura 5.7: Diagrama fasorial das correntes e da tensão
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a corrente através do resistor ($\dot{I}_R$) está em fase com a tensão ($\dot{V}$) aplicada sobre ele. Por outro lado, a corrente através do indutor ($\dot{I}_L$) está atrasada de 90° em relação à tensão ($\dot{V}$) aplicada sobre ele.

f) Calcule as potências ativa (P), reativa (Q) e aparente (S).

$$P = V_{rms}\ I_{rms}\ \cos\varphi = 220 \times 15{,}78 \times \cos 21{,}70°$$
$$P = 3225{,}58\ W$$
$$Q = V_{rms}\ I_{rms}\ \text{sen}\varphi = 220 \times 15{,}78 \times \text{sen}\ 21{,}70°$$
$$Q = 1283{,}61\ VAR$$
$$S = V_{rms}\ I_{rms} = 220 \times 15{,}78$$
$$S = 3471{,}60\ VA$$

g) Represente o triângulo de potência.

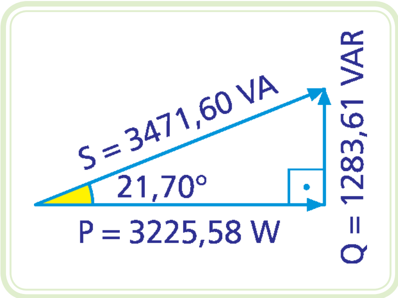

Figura 5.8: Triângulo de potência
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

h) Calcule o fator de potência (FP).

$$FP = \cos\varphi = \cos 21{,}70° = 92{,}91\ \%$$

Resumo

Nessa aula você aprendeu: (a) analisar circuitos RL em série e paralelo; (b) calcular a impedância, as potências (ativa, reativa e aparente) e o fator de potência do circuito; e (c) desenhar o diagrama fasorial das correntes e das tensões de um circuito monofásico.

Atividades de aprendizagem

1. Em um circuito RL série alimentado por um gerador de 110 V_{rms}, com módulos de resistência e reatância iguais a 30 Ω e 40 Ω respectivamente, pede-se:

a) Determine a impedância equivalente do circuito ($\dot{Z}$) na forma complexa polar.

b) Determine a corrente total do circuito ($\dot{I}$) na forma complexa polar.

c) Determine as tensões sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e sobre o indutor ($\dot{V}_L$) na forma complexa polar.

d) Desenhe o diagrama fasorial do circuito contendo a corrente total ($\dot{I}$), a tensão do gerador ($\dot{V}$), a tensão sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e a tensão sobre o indutor ($\dot{V}_L$).

2. Em um circuito RL paralelo alimentado por um gerador de 220 V_{rms}, com módulos de resistência e reatância iguais a 50 Ω e 30 Ω respectivamente, pede-se:

a) Determine a impedância equivalente do circuito ($\dot{Z}$) na forma complexa polar.

b) Determine a corrente total do circuito ($\dot{I}$) na forma complexa polar.

c) Determine as correntes no resistor ($\dot{I}_R$) e no indutor ($\dot{I}_L$) na forma complexa polar.

d) Desenhe o diagrama fasorial do circuito contendo a corrente total ($\dot{I}$), a tensão do gerador ($\dot{V}$), a corrente no resistor ($\dot{I}_R$) e a corrente no indutor ($\dot{I}_L$).

Aula 6 – Análise de circuitos capacitivos em CA – circuitos RC

Objetivos

Aprender analisar circuitos RC em série e em paralelo em corrente alternada, utilizando as diversas formas de representação: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial.

6.1 Circuitos capacitivos

Nesta aula iremos estudar o comportamento de circuitos compostos por resistores e capacitores, em série e em paralelo.

6.1.1 Circuito RC série

Exemplo

Um gerador de tensão:

$$\dot{V} = 220\underline{|0°}\ V_{rms}/60\ Hz$$

Alimenta um resistor de resistência elétrica igual a 30 Ω e um capacitor de capacitância igual a 47 μF (Figura 6.1). Pede-se:

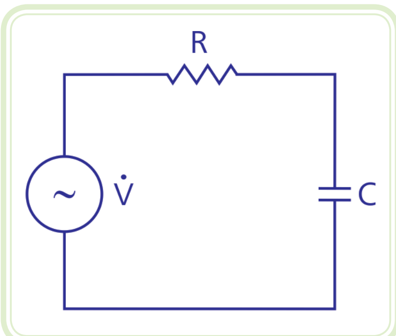

Figura 6.1: Circuito RC série
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a reatância capacitiva.

$$X_C = -\frac{1}{2\pi\, f\, C} = -56{,}44\ \ \Omega$$

b) Calcule a impedância total do circuito na forma complexa polar.

A impedância de um circuito série é a soma das impedâncias de cada elemento do circuito. Lembre-se que para realizar operações de soma com números complexos é mais conveniente utilizar a forma cartesiana.

Impedância do circuito RC série na forma cartesiana:

$$\dot{Z}_R = R$$
$$\dot{Z}_C = j\,X_C$$
$$\dot{Z} = R + j\,X_C$$
$$\dot{Z} = 30 + j\,56{,}44\ \ \Omega$$

É conveniente representar a impedância na forma polar para facilitar a utilização da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, que utiliza operações de multiplicação ou divisão.

Transformação da forma cartesiana para forma polar:

$$\dot{Z} = \sqrt{R^2 + X_C^{\,2}}\ \underline{\big|\ \mathrm{arctg}\,\frac{X_L}{R}}$$
$$\dot{Z} = \sqrt{30^2 + 56{,}44^2}\ \underline{\big|\ -\mathrm{arctg}\,\frac{56{,}44}{30}}$$
$$\dot{Z} = 63{,}92\ \underline{\big|\ -62{,}01^\circ}\ \ \Omega$$

c) Calcule a corrente total do circuito.

Da primeira Lei de Ohm, vem:

$$\dot{I} = \frac{220\,\underline{|-60°}}{63{,}92\,\underline{|-62{,}01°}} = \frac{220}{63{,}92}\,\underline{|-60° - (-62{,}01°)} = 3{,}44\,\underline{|2{,}01°}\ \ A_{rms}$$

Observe que a corrente contínua adiantada em relação à tensão, porém de um ângulo menor que 90°. Enquanto a capacitância tende a defasá-la de 90°, a resistência tende a colocá-la em fase com a tensão.

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

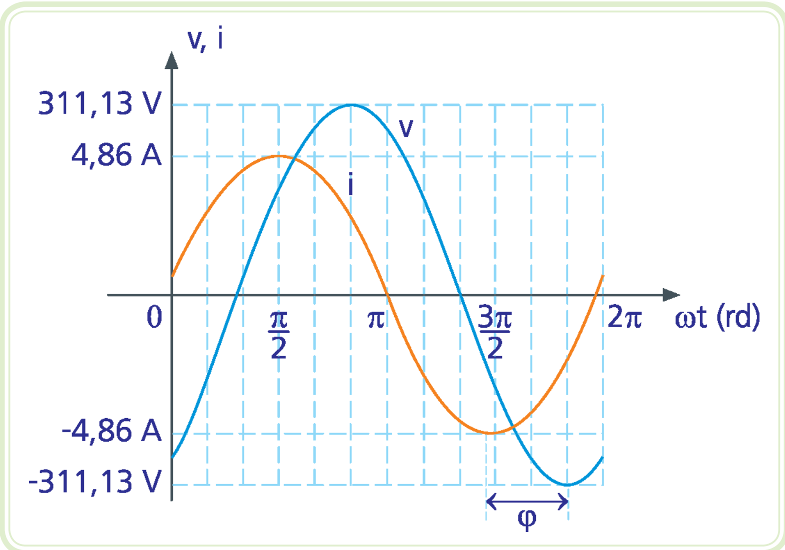

Figura 6.2: Forma de onda da tensão e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

Como se trata de um circuito série, a corrente é a mesma para os dois dispositivos.

A soma vetorial entre as tensões sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e sobre o capacitor ($\dot{V}_C$) é igual à tensão do gerador ($\dot{V}$), ou seja:

Equação 6.1

$$\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_C$$

Tensão sobre o resistor:

$$\dot{V}_R = \dot{Z}_R \, \dot{I} = 30\underline{|0°} \; 3,44\,\underline{|2,01°} = 20 \times 8,01\,\underline{|0° + 2,01°}$$

$$\dot{V}_R = 103,20\,\underline{|2,01°} \; V_{rms}$$

Tensão sobre o capacitor:

$$\dot{V}_C = \dot{Z}_C \, \dot{I} = 56,44\,\underline{|-90°} \; 3,44\,\underline{|2,01°} = 56,44 \times 3,44\,\underline{|-90° + 2,01°}$$

$$\dot{V}_C = 194,15\,\underline{|-87,99°} \; V_{rms}$$

Diagrama fasorial (Figura 6.3):

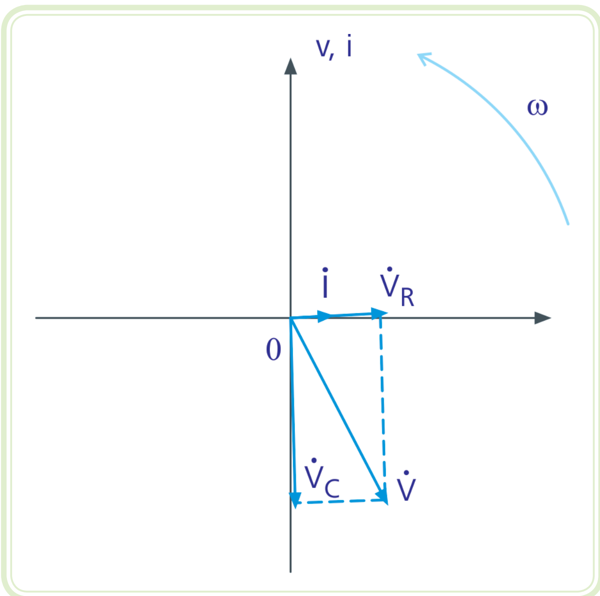

Figura 6.3: Diagrama fasorial das tensões e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a tensão sobre o resistor ($\dot{V}_R$) está em fase com a corrente. Por outro lado, a corrente está adiantada de 90° em relação à tensão sobre o capacitor ($\dot{V}_C$).

f) Calcule as potências ativa (P), reativa (Q) e aparente (S).

$$P = V_{rms}\ I_{rms}\ \cos\varphi = 220 \times 3{,}44 \times \cos\,(-62{,}01°)$$
$$P = 355{,}18\ W$$
$$Q = V_{rms}\ I_{rms}\ \mathrm{sen}\varphi = 220 \times 3{,}44 \times \mathrm{sen}\,(-62{,}01°)$$
$$Q = -668{,}28\ VAR$$
$$S = V_{rms}\ I_{rms} = 220 \times 3{,}44$$
$$S = 756{,}80\ VA$$

g) Represente o triângulo de potência.

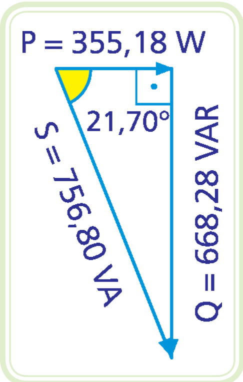

Figura 6.4: Triângulo de potência
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

h) Calcule o fator de potência (FP).

$$FP = \cos\varphi = \cos - 62{,}01° = 46{,}93\ \%$$

6.1.2 Circuito RC paralelo

Exemplo

Um gerador de tensão:

$$\dot{V} = 220\underline{|0°}\ \ V_{rms}/60\ Hz$$

Alimenta um resistor de resistência elétrica igual a 25 Ω e um capacitor de capacitância igual a 56 μF ligados em paralelo (Figura 6.5). Pede-se:

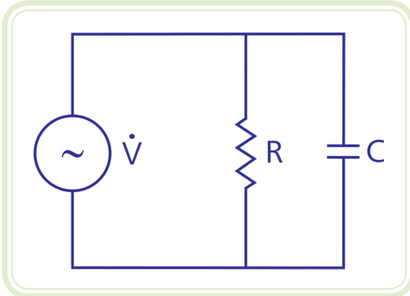

Figura 6.5: Circuito RC paralelo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Calcule a reatância capacitiva.

$$X_C = -\frac{1}{2\pi\, f\, C} = -47,37\ \Omega$$

b) Calcule a impedância total do circuito na forma complexa polar.

A impedância de um circuito RC paralelo é a multiplicação dividida pela soma das impedâncias de cada elemento do circuito, dois a dois. Lembre-se que são operações com números complexos.

Impedância do circuito RC paralelo:

$$\dot{Z} = \frac{R\angle 0^\circ \;\; X_C\angle -90^\circ}{R - j\,X_C}$$

$$\dot{Z} = \frac{25\angle 0^\circ \; 47,37\angle -90^\circ}{25 - j\,47,37} = \frac{25 \times 47,37\angle 0^\circ - 90^\circ}{25 - j\,47,37}$$

Observe que, para realizar a divisão acima, é conveniente transformar o denominador da expressão da forma cartesiana para a forma polar.

$$\dot{Z} = \frac{25 \times 47{,}37 \angle 0° - 90°}{25 - j\,47{,}37} = \frac{1184{,}25 \angle -90°}{\sqrt{25^2 + 47{,}37^2} \angle \operatorname{arctg} \frac{47{,}37}{25}}$$

$$\dot{Z} = \frac{1184{,}25 \angle -90°}{53{,}56 \angle -62{,}18°} = \frac{1184{,}25}{53{,}56} \angle -90° - (-62{,}18°)$$

$$\dot{Z} = 22{,}11 \angle -27{,}82°\ \Omega$$

c) Calcule a corrente total do circuito.

Da primeira Lei de Ohm para corrente alternada, vem:

$$\dot{I} = \frac{220 \angle 0°}{22{,}11 \angle -27{,}82°} = \frac{220}{22{,}11} \angle 0° - (-27{,}82°) = 9{,}95 \angle 27{,}82°\ \ A_{rms}$$

d) Esboce a forma de onda da tensão e da corrente, indicado seus valores de pico (V_P e I_P) e o ângulo de defasagem entre tensão e corrente (φ).

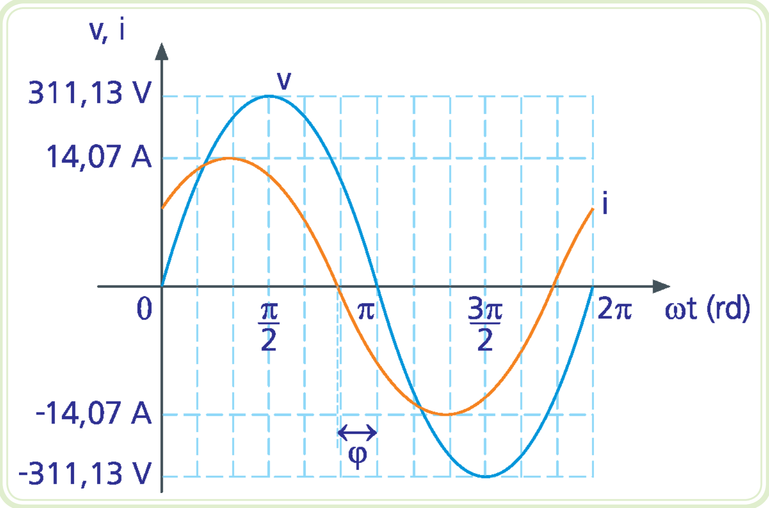

Figura 6.6: Circuito RC paralelo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

e) Esboce o diagrama fasorial da tensão e da corrente.

Como se trata de um circuito paralelo, a tensão é a mesma para os dois dispositivos.

A soma vetorial entre as correntes através do resistor ($\dot{I}_R$) e do capacitor ($\dot{I}_C$) é igual à corrente total do circuito ($\dot{I}$), ou seja:

Equação 6.2

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_C$$

Corrente através do resistor:

$$\dot{I}_R = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_R} = \frac{220\angle 0°}{25\angle 0°} = \frac{220}{25}\angle 0° - 0°$$

$$\dot{I}_R = 8{,}8\angle 0° \ A_{rms}$$

Corrente através do capacitor:

$$\dot{I}_C = \frac{\dot{V}_R}{\dot{Z}_C} = \frac{220\angle 0°}{47{,}37\angle -90°} = \frac{220}{47{,}37}\angle 0° - (-90°)$$

$$\dot{I}_C = 4{,}64\angle 90° \ A_{rms}$$

Diagrama fasorial (Figura 6.7):

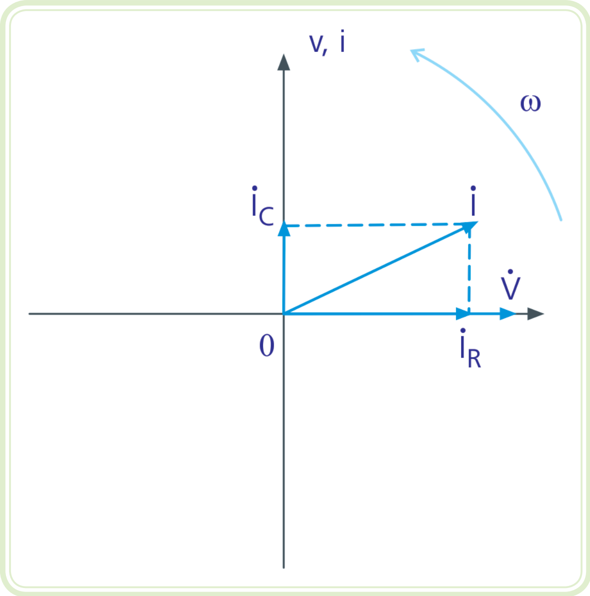

Figura 6.7: Diagrama fasorial das tensões e da corrente
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que a corrente através do resistor ($\dot{I}_R$) está em fase com a tensão ($\dot{V}$) aplicada sobre ele. Por outro lado, a corrente através do capacitor ($\dot{I}_C$) está adiantada de 90° em relação à tensão ($\dot{V}$) aplicada sobre ele.

f) Calcule as potências ativa (P), reativa (Q) e aparente (S).

$$P = V_{rms}\ I_{rms}\ \cos\varphi = 220 \times 9{,}95 \times \cos(-27{,}82°)$$
$$P = 1935{,}99\ W$$

$$Q = V_{rms}\ I_{rms}\ \text{sen}\varphi = 220 \times 9{,}95 \times \text{sen}\ (-27{,}82°)$$
$$Q = -1021{,}60\ VAR$$

$$S = V_{rms}\ I_{rms} = 220 \times 9{,}95$$
$$S = 2189\ VA$$

g) Represente o triângulo de potência.

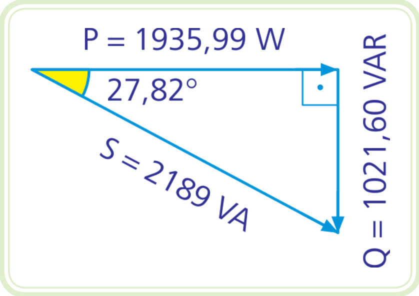

Figura 6.8: Triângulo de potência
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

h) Calcule o fator de potência (FP).

$$FP = \cos\varphi = \cos 27{,}82° = 88{,}44\ \%$$

Resumo

Nessa aula você aprendeu: (a) analisar circuitos RC em série e paralelo; (b) calcular a impedância, as potências (ativa, reativa e aparente) e o fator de potência do circuito; e (c) desenhar o diagrama fasorial das correntes e das tensões de um circuito monofásico.

Atividades de aprendizagem

1. Em um circuito RC série alimentado por um gerador de 110 V_{rms}, com módulos de resistência e reatância iguais a 30 Ω e 40 Ω respectivamente, pede-se:

a) Determine a impedância equivalente do circuito ($\dot{Z}$) na forma complexa polar.

b) Determine a corrente total do circuito ($\dot{I}$) na forma complexa polar.

c) Determine as tensões sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e sobre o capacitor ($\dot{V}_C$) na forma complexa polar.

d) Desenhe o diagrama fasorial do circuito contendo a corrente total ($\dot{I}$), a tensão do gerador ($\dot{V}$), a tensão sobre o resistor ($\dot{V}_R$) e a tensão sobre o capacitor ($\dot{V}_C$).

2. Em um circuito RC paralelo alimentado por um gerador de 220 V_{rms}, com módulos de resistência e reatância iguais a 20 Ω e 15 Ω, respectivamente, determine:

a) A impedância equivalente do circuito ($\dot{Z}$) na forma complexa polar.

b) A corrente total do circuito ($\dot{I}$) na forma complexa polar.

c) A potência ativa (P) do circuito.

d) A potência reativa (Q) do circuito.

e) A potência aparente (S) do circuito.

Aula 7 – Circuitos RLC

Objetivos

Aprender analisar circuitos RLC em série e em paralelo em corrente alternada, utilizando as diversas formas de representação: números complexos, forma matemática, forma de onda e diagrama fasorial.

Entender o conceito de ressonância.

7.1 Comportamento de circuitos RLC

Uma maneira de saber se o comportamento de um circuito é indutivo, capacitivo ou resistivo consiste em analisar sua impedância equivalente. Esta análise pode ser feita de duas maneiras:

- Verificando a parte imaginária da impedância equivalente na forma complexa cartesiana:

Equação 7.1

$$\dot{Z}_{eq} = R + jX$$

Se a reatância resultante X for positiva, o circuito é indutivo. Se for negativa, o circuito é capacitivo. Já se ela for igual a zero, o circuito é resistivo e, neste caso, dizemos que o circuito é ressonante.

- Verificando o ângulo da impedância equivalente na forma polar:

Equação 7.2

$$\dot{Z}_{eq} = Z\underline{|\varphi}$$

Se o ângulo de defasagem φ for positivo, o circuito é indutivo. Se for negativo, o circuito é capacitivo. Já se ele for igual a zero, o circuito é ressonante.

Se o circuito é indutivo, significa que o gerador fornece uma corrente atrasada em relação à tensão. Se o circuito é capacitivo, a corrente está adiantada em relação à tensão. Já se o circuito for resistivo, implica que a tensão e a corrente estão em fase, ou seja, a defasagem entre estes sinais é igual a zero.

Outra maneira de analisar o comportamento de um circuito consiste em analisar seu triângulo de potência. Se a potência reativa for maior do que zero, o circuito é indutivo. Se ela for menor do que zero, o circuito é capacitivo. Já se ela for igual a zero, o circuito é ressonante.

7.2 Circuito RLC série

O circuito da Figura 7.1 possui um gerador de corrente alternada que alimenta três elementos ligados em série: a resistência R, a indutância L e a capacitância C.

Por se tratar de um circuito com elementos ligados em série, a corrente que atravessa estes elementos é a mesma. Mas a tensão fornecida pelo gerador é dividida entre os três elementos, de acordo com a Lei de Kirchhoff das tensões: $\dot{V} = \dot{V}_R + \dot{V}_L + \dot{V}_C$

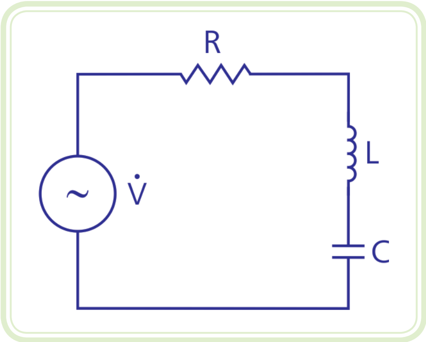

Figura 7.1: Circuito RLC série
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

A impedância equivalente de elementos ligados em série é igual à soma das impedâncias individuais de cada elemento. Portanto, podemos expressar a impedância deste circuito da seguinte maneira:

Equação 7.3

$$\dot{Z}_{eq} = R + jX_L + jX_C$$

Ou seja:

Equação 7.4

$$\dot{Z}_{eq} = R + j(X_L + X_C)$$

Para este caso, conclui-se que:

- Se $X_L > |X_C|$, o circuito é indutivo.
- Se $X_L < |X_C|$, o circuito é capacitivo.
- Se $X_L = |X_C|$, o circuito é ressonante.

Esta conclusão sobre o funcionamento do circuito em questão pode ser feita analisando o diagrama fasorial do circuito, de acordo com a Figura 7.2.

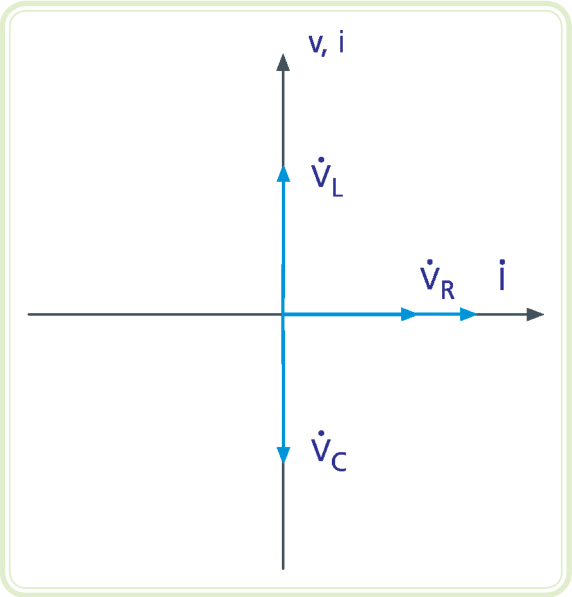

Figura 7.2: Diagrama fasorial do circuito RLC série
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que, se o módulo das tensões sobre o indutor $\dot{V}_L$ e o capacitor $\dot{V}_C$ for igual, o circuito é ressonante, pois a tensão resultante estaria em fase com a corrente. Além do mais, para que estas tensões sejam iguais em módulo, as reatâncias indutiva e capacitiva devem ser iguais em módulo, ou seja, $X_L = |X_C|$.

Se o módulo da tensão no indutor é maior do que o módulo da tensão no capacitor, o circuito é indutivo, pois a tensão resultante estaria adiantada em relação à corrente. Além do mais, para que o módulo da tensão no indutor seja maior, a reatância indutiva deve ser maior do que o módulo da reatância capacitiva, ou seja, $X_L > |X_C|$.

Se o módulo da tensão no capacitor é maior do que o módulo da tensão no indutor, o circuito é capacitivo, pois a tensão resultante estaria atrasada em relação à corrente. Além do mais, para que o módulo da tensão no capacitor seja maior, o módulo da reatância capacitiva deve ser maior do que o módulo da reatância indutiva, ou seja, $X_L < |X_C|$.

Nesta configuração, a ressonância ocorre quando o circuito oferece a menor oposição possível à passagem de corrente elétrica, pois a impedância equivalente só possui a parte real nesta ocasião.

Sabe-se que o valor das reatâncias, indutiva e capacitiva, varia em função da frequência do sinal de tensão aplicado. Entretanto, a reatância indutiva é diretamente proporcional à frequência, e a reatância capacitiva é inversamente proporcional à frequência. Por isso, se variarmos a frequência do sinal de alimentação do circuito em questão, podemos chegar num ponto que a reatância indutiva é igual ao módulo da reatância capacitiva. Nesta situação o circuito se encontra em ressonância, e esta frequência é denominada frequência de ressonância (f_0). Matematicamente, temos:

$$X_L = |X_C|$$

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C} \rightarrow f_0^2 = \frac{1}{(2\pi)^2 LC}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

7.3 Circuito RLC paralelo

O circuito da Figura 7.3 possui um gerador de corrente alternada que alimenta três elementos ligados em paralelo: a resistência R, a indutância L e a capacitância C.

Por se tratar de um circuito com elementos ligados em paralelo, a tensão aplicada sobre os elementos é a mesma. Mas a corrente fornecida pelo gerador é dividida entre os três elementos, de acordo com a Lei de Kirchhoff das correntes: $\dot{V} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C$

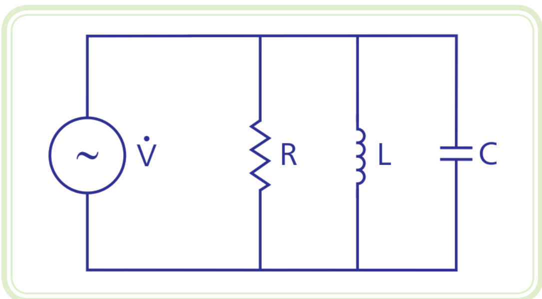

Figura 7.3: Circuito RLC paralelo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

O inverso da impedância equivalente de elementos ligados em paralelo é igual à soma dos inversos das impedâncias individuais de cada elemento. Portanto, podemos expressar a impedância deste circuito da seguinte maneira:

Para encontrar o conjugado de um número complexo basta mudar o sinal de sua parte imaginária, ou seja, o conjugado de $\vec{Z}_1 = a + jb$ é igual a $\vec{Z}_2 = a - jb$. Ao multiplicarmos um número complexo pelo seu conjugado, eliminamos a parte imaginaria do resultado, ou seja,
$\vec{Z}_1\vec{Z}_2 = (a + jb)(a - jb)$
$\vec{Z}_1\vec{Z}_2 = a^2 - jab + jab + b^2$
$\vec{Z}_1\vec{Z}_2 = a^2 + b^2$

$$\frac{1}{\dot{z}_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jX_L} + \frac{1}{jX_C} = \frac{jX_L X_C + RX_C + RX_L}{jRX_L X_C}$$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{jRX_L X_C}{jX_L X_C + RX_C + RX_L} = \frac{jRX_L X_C}{R(X_C + X_L) + jX_L X_C}$$

Para eliminar a parte imaginária do denominador da expressão da impedância equivalente e representá-la na forma cartesiana, deve-se multiplicar tanto o numerador quanto o denominador desta expressão pelo conjugado do denominador. Dessa maneira, podemos concluir a respeito do comportamento do circuito, analisando a parte imaginária da impedância. O desenvolvimento da expressão da impedância equivalente fica da seguinte maneira:

$$\dot{z}_{eq} = \frac{jR\,X_L\,X_C}{R\,(X_C+X_L) + j\,X_L\,X_C}\;\frac{R\,(X_C+X_L) - j\,X_L\,X_C}{R\,(X_C+X_L) - j\,X_L\,X_C}$$

$$\dot{z}_{eq} = \frac{R\,X_L^2\;X_C^2 + j\,(R^2\,X_L^2\,X_C + R^2\,X_L\,X_C^2)}{[R(X_C+X_L)]^2 + (X_L\;X_C)^2}$$

Para verificar o comportamento do circuito em questão devemos analisar apenas a parte imaginária da impedância equivalente, ou seja:

$$jX = \frac{j(R^2\,X_L^2\,X_C + R^2\,X_L\,X_C^2)}{[R(X_C+X_L)]^2 + (X_L\;X_C)^2}$$

Existem três comportamentos distintos:

- Se $jX > 0$ o circuito é indutivo, ou seja:

$$R^2\,X_L^2\,X_C + R^2\,X_L\,X_C^2 > 0$$

$$R^2\,X_L\;X_C\;(X_L+X_C) > 0$$

Por definição, X_C é negativo, o que implica em $R^2\,X_L\,X_C$ ser negativo. Portanto, $(X_L + X_C)$ também deve ser negativo para que a expressão toda $[R^2\,X_L\,X_C\,(X_L + X_C)]$ seja maior do que zero, ou seja:

$$R^2\,X_L\;X_C\;(X_L+X_C) > 0$$

$$(X_L+X_C) < 0$$

$$X_L < |\,X_C\,|$$

- Se $jX < 0$ o circuito é capacitivo, ou seja:

$$R^2 X_L^2 X_C + R^2 X_L X_C^2 < 0$$
$$R^2 X_L X_C (X_L + X_C) < 0$$

Por definição, X_C é negativo. Portanto, $(X_L + X_C)$ deve ser positivo para que a expressão toda seja menor do que zero, ou seja:

$$R^2 X_L X_C (X_L + X_C) < 0$$
$$(X_L + X_C) > 0$$
$$X_L > |X_C|$$

Quando um circuito está em ressonância, sua potência reativa é igual a zero. Portanto, não há troca de energia entre gerador e carga. No entanto, a troca de energia passa a ser realizada entre capacitores e indutores. À medida que o indutor descarrega a energia armazenada na forma de campo magnético, o capacitor armazena esta energia na forma de campo elétrica. Por outro lado, quando o capacitor descarrega energia armazenada na forma de campo elétrico, o indutor armazena esta energia na forma de campo magnético.

- Se $jX = 0$ o circuito é ressonante, ou seja:

$$R^2 X_L^2 X_C + R^2 X_L X_C^2 = 0$$
$$R^2 X_L X_C (X_L + X_C) = 0$$

Portanto, se $(X_L + X_c)$ for igual a zero, a expressão é verdadeira, ou seja:

$$R^2 X_L X_C (X_L + X_C) = 0$$
$$(X_L + X_C) = 0$$
$$X_L = |X_C|$$

Para este caso, conclui-se que:

- Se $X_L < |X_C|$, o circuito é indutivo.
- Se $X_L > |X_C|$, o circuito é capacitivo.
- Se $X_L = |X_C|$, o circuito é ressonante.

Esta conclusão sobre o funcionamento do circuito em questão pode ser feita de forma muito mais simples analisando o diagrama fasorial do circuito, de acordo com a Figura 7.4.

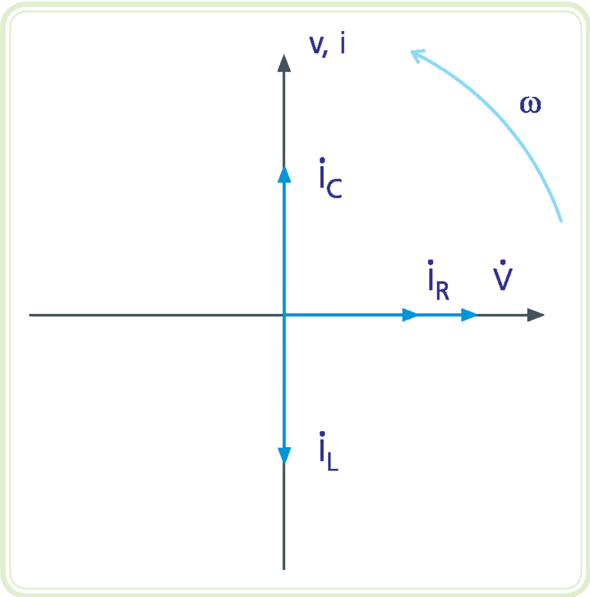

Figura 7.4: Diagrama fasorial do circuito RLC paralelo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observe que, se o módulo das correntes no indutor $\dot{I}_L$ e no capacitor $\dot{I}_C$ for igual, o circuito é ressonante, pois a corrente resultante estaria em fase com a tensão. Além do mais, se estas correntes são iguais em módulo, implica que a oposição à passagem da corrente oferecida tanto pelo indutor quanto pelo capacitor é igual, ou seja, $X_L = |X_C|$.

Se o módulo da corrente no indutor é maior do que o módulo da corrente no capacitor, o circuito é indutivo, pois a corrente resultante estaria atrasada em relação à tensão. Além do mais, se o módulo da corrente no indutor é maior, implica que a oposição à passagem da corrente oferecida pelo indutor é menor do que a oposição oferecida pelo capacitor, ou seja, $X_L < |X_C|$.

Se o módulo da corrente no capacitor é maior do que o módulo da corrente no indutor, o circuito é capacitivo, pois a corrente resultante estaria adiantada em relação à tensão. Além do mais, se o módulo da corrente no capacitor é maior, implica que a oposição à passagem da corrente oferecida pelo capacitor é menor do que a oposição oferecida pelo indutor, ou seja, $X_L > |X_C|$.

Nesta configuração, a ressonância ocorre quando o circuito oferece a maior oposição possível à passagem de corrente elétrica. A frequência de ressonância pode ser encontrada da mesma forma que o circuito RLC série.

$$X_L = |X_C|$$

$$2\pi f_0 L = \frac{1}{2\pi f_0 C}$$

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

Resumo

Nessa aula você aprendeu analisar o comportamento de circuitos contendo os três elementos: resistência, indutância e capacitância. Foi feita a análise tanto do circuito RLC série quanto do circuito RLC paralelo. O conceito de ressonância foi apresentado e a frequência de corte pôde ser calculada.

Atividades de aprendizagem

1. Dado o circuito da Figura 7.5, determine:

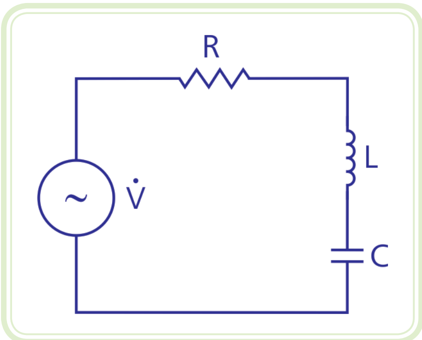

Figura 7.5: Circuito RLC série
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Dados

R = 100 Ω

L = 130 mH

C = 1 μF

V = 100 V_{rms}

a) A frequência de ressonância.

b) A corrente fornecida pelo gerador na frequência de ressonância.

c) O ângulo de defasagem entre tensão e corrente do gerador na ressonância.

2. Dado o circuito da Figura 7.6, pede-se:

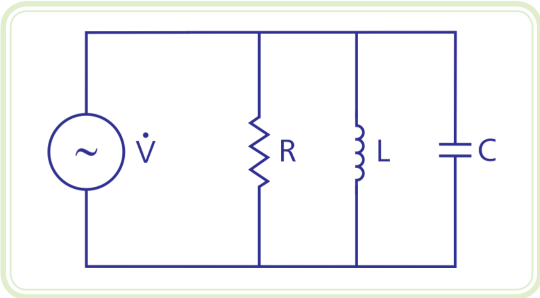

Figura 7.6: Circuito RLC paralelo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Dados

R = 30 Ω

XL = 40 Ω

XC = -20 Ω

V = 200 V_{rms}

a) Determine as correntes em cada elemento na forma complexa polar.

b) Determine a impedância equivalente do circuito na forma complexa polar.

c) Determine a corrente total fornecida pelo gerador.

d) Faça o triângulo de potência e o diagrama fasorial deste circuito.

Aula 8 – Correção de fator de potência

Objetivos

Compreender a importância da correção do fator de potência.

Aprender a dimensionar capacitores que corrijam o fator de potência de uma carga, de um grupo de cargas e de um conjunto de grupos de cargas.

8.1 Importância da correção

O Fator de Potência (FP) mede o aproveitamento da energia para a produção de trabalho útil. Ele é definido como a razão entre a potência ativa e a potência aparente.

Equação 8.1

$$FP = \frac{P}{S}$$

Os motores, transformadores, reatores e outros equipamentos com enrolamentos (cargas indutivas) são responsáveis para o baixo FP.

Se o fator de potência for baixo, o sistema possui quantidade elevada de energia reativa. Como consequência, há aumento da corrente nos circuitos, ocasionando perdas de energia por efeito Joule e quedas de tensão nas instalações da indústria e da concessionária de energia. Este excesso de energia reativa exige condutores de maior bitola e transformadores de maior capacidade, o que aumenta o preço da instalação. Além disso, o baixo fator de potência sobrecarrega as subestações e as linhas de transmissão e distribuição de forma desnecessária, pois pouca parte da energia transportada está sendo utilizada na produção de trabalho útil.

No Brasil, a Agência Nacional de Energia Elétrica (ANEEL) estabelece por meio da resolução ANEEL 456/2000 que o fator de potência nas unidades consumidoras deve ser superior a 0,92. Se este limite não for respeitado, o consumidor está sujeito a multa.

8.2 Formas de correção

O fator de potência pode ser corrigido de três formas: correção individual, correção por grupos de cargas ou correção geral. A seguir serão abordadas estas três situações na forma de exemplos.

8.2.1 Correção individual

Na correção individual de fator de potência deve-se ligar um capacitor em paralelo a cada equipamento que se deseja realizar a correção. Do ponto de vista técnico, esta é a melhor solução, pois a correção será realizada individualmente para cada carga. Dessa forma, o fator de potência total da instalação permanecerá corrigido, independentemente de quais cargas estão ligadas no momento. Por outro lado, este tipo de correção demanda maior quantidade de capacitores para a instalação, podendo elevar os custos com a correção.

Exemplo

A Figura 8.2 mostra um motor de indução de 5 cv ligado à rede elétrica de 220 V_{rms}/60 Hz. Este motor possui fator de potência igual a 0,70. Dimensione o capacitor que deve ser ligado em paralelo ao motor para que o fator de potência seja corrigido para 0,92.

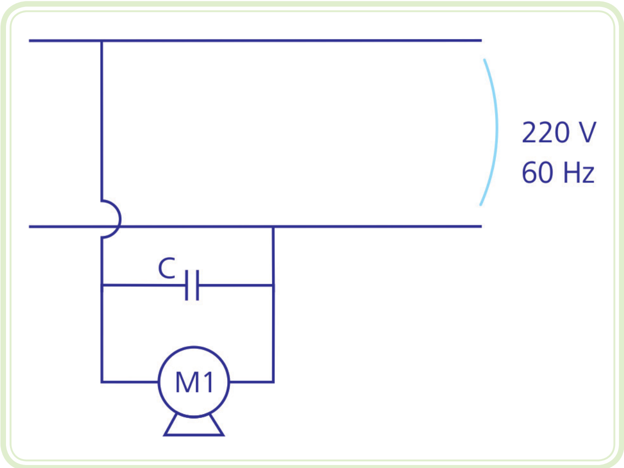

Figura 8.2: Instalação – correção individual
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Triângulo de potência antes da correção (sem capacitor):

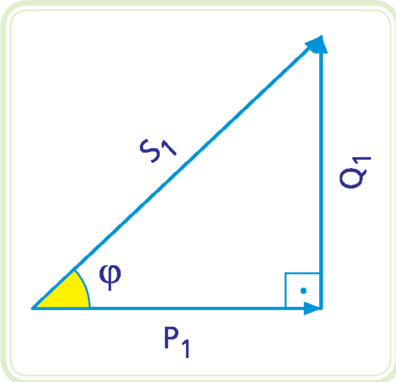

Figura 8.3: Triângulo de potência antes da correção
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

$$\varphi = \arccos 0{,}7 = 45{,}57°$$

Admitindo que 1 cv = 736 W.

$$P_1 = 5 \times 736 = 3680 \text{ W}$$

$$Q_1 = P_1 \times \operatorname{tg}\varphi = 3680 \times \operatorname{tg}(45{,}57°) = 3753{,}96 \text{ VAR}$$

Triângulo de potência corrigido (com capacitor):

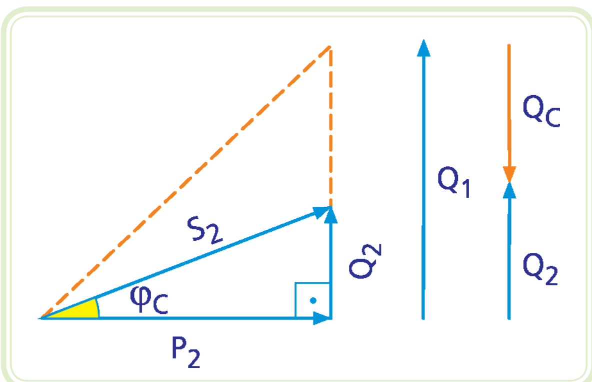

Figura 8.4: Triângulo de potência após a correção
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

$$\varphi_C = \arccos 0{,}92 = 23{,}07^\circ$$

A inserção do capacitor interfere apenas na potência reativa da instalação. Assim a nova potência reativa Q_2 será a anterior, Q_1, somada a Q_C (potência reativa do capacitor) e $P_2 = P_1$.

$$P_2 = P_1 = 3680\ \text{W}$$

$$Q_2 = P_2 \times \text{tg}\varphi_C = 3680 \times \text{tg}\ (23{,}07^\circ) = 1567{,}38\ \text{VAR}$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_C \rightarrow Q_C = Q_2 - Q_1 = 1567{,}38 - 3753{,}96 = -2186{,}58\ \text{VAR}$$

A potência Q_C também pode ser dada por:

$$Q_c = V \times I \times \sin(-90^\circ) = V\ \frac{V}{|X_c|}(-1)$$

$$-\frac{220^2}{|X_c|} = -2186{,}58 \rightarrow |X_c| = 22{,}14\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\pi f |X_c|} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 22{,}14} = 119{,}81\ \mu\text{F}$$

Portanto, um capacitor de 119,81 μF será capaz de corrigir o fator de potência da instalação para 92 %.

8.2.2 Correção por grupos de cargas

A correção por grupos de cargas é realizada instalando capacitores de forma a compensar um setor ou um conjunto de equipamentos. Eles são colocados junto ao quadro de distribuição que alimenta estes equipamentos. Ao contrário da correção individual, esta abordagem corrige o fator de potência de um grupo de cargas, o que pode reduzir o número de capacitores necessários. Por outro lado, a correção não é tão eficaz comparada à correção individual. Para este tipo de correção as cargas devem estar na mesma faixa de potência.

Exemplo

A Figura 8.5 mostra uma parte da instalação elétrica de uma empresa. Este setor alimenta um motor de 5 cv e outro de 10 cv, com fator de potência igual a 0,70 e 0,80, respectivamente, e um grupo de 10 lâmpadas incandescentes de 100 W cada. Dimensione o capacitor que deve ser ligado em paralelo a este circuito para corrigir o fator de potência da instalação para 0,92.

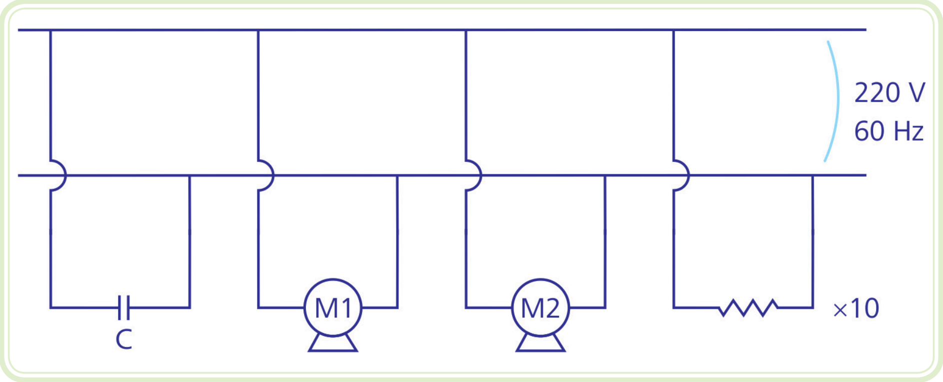

Figura 8.5: Instalação – correção por grupos
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Motor 1:

$$\varphi = \arccos(0{,}7) = 45{,}57^\circ$$

$$P_{M1} = 5 \times 736 = 3680\ \text{W}$$

$$Q_{M1} = P_{M1} \times \text{tg}\varphi = 3680 \times \text{tg}\,(45{,}57^\circ) = 3753{,}96\ \text{VAR}$$

Motor 2:

$$\varphi = \arccos(0{,}8) = 36{,}87^\circ$$

$$P_{M2} = 10 \times 736 = 7360\ \text{W}$$

$$Q_{M2} = P_{M2} \times \text{tg}\varphi = 7360 \times \text{tg}\,(36{,}87^\circ) = 5520{,}02\ \text{VAR}$$

Lâmpadas:

$$P_L = 10 \times 100 = 1000 \text{ W}$$

$$Q_L = VI \sin(0^\circ) = 0 \text{ VAR}$$

Triângulo de potência antes da correção (sem capacitor):

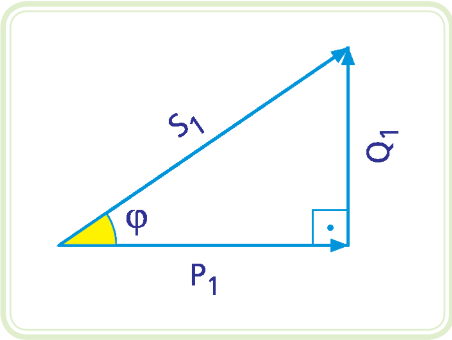

Figura 8.6: Triângulo de potência antes da correção
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

$$P_1 = P_{M1} + P_{M2} + P_L = 3680 + 7360 + 1000 = 12040 \text{ W}$$

$$Q_1 = Q_{M1} + Q_{M2} + Q_L = 3753{,}96 + 5520{,}02 + 0 = 9273{,}98 \text{ VAR}$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^2 + Q_1^2} = 15197{,}64 \text{ VA}$$

O fator de potência da instalação é:

$$FP = \frac{P_1}{S_1} = \frac{12040}{15197{,}64} = 0{,}792$$

Triângulo de potência corrigido (com capacitor):

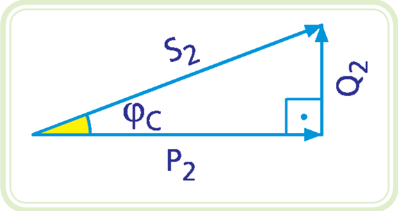

Figura 8.7: Triângulo de potência após a correção
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

$$\varphi_C = \text{arccos } 0{,}92 = 23{,}07°$$

$$P_2 = P_1 = 12040 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \times \text{tg}\varphi_C = 12040 \times \text{tg } (23{,}07°) = 5128{,}05 \text{ VAR}$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_C \rightarrow Q_C = Q_2 - Q_1 = 5128{,}05 - 9273{,}98 = -4145{,}93 \text{ VAR}$$

$$Q_C = V \times I \times \sin(-90°) = V \frac{V}{|X_C|}(-1)$$

$$-\frac{220^2}{|X_C|} = -4145{,}93 \rightarrow |X_C| = 11{,}67\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\pi f|X_C|} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 11{,}67} = 227{,}30\ \mu\text{F}$$

O que acontece quando o grupo de lâmpadas é desligado?

Análise qualitativa:

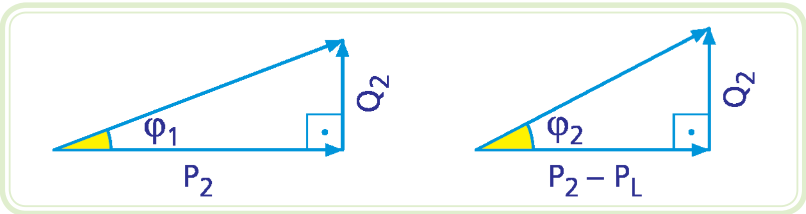

Figura 8.8: Triângulo de potência após as lâmpadas serem desligadas
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Quando o grupo de lâmpadas é desligado, a potência ativa da instalação diminui. Por outro lado, a potência reativa total da instalação não se altera. Através dos triângulos de potência pode-se visualizar que o ângulo φ da instalação aumenta e, portanto, o fator de potência total diminui ($\varphi_2 > \varphi_1$, logo $\cos \varphi_2 < \cos \varphi_1$). Esta é a principal desvantagem da correção por grupo em relação à correção individual. Na correção individual, o fator de potência não depende da quantidade de cargas que estão acionadas. Uma vez corrigido, o fator de potência não se altera.

8.2.3 Correção geral

A correção geral é realizada instalando capacitores no quadro de distribuição geral da instalação, na rede de entrada da empresa. Este tipo de correção diminui bastante o número de capacitores necessários para a correção. No entanto, esta solução não alivia os circuitos alimentadores e terminais da empresa, resolvendo apenas o problema da multa.

Exemplo

A Figura 8.9 mostra a instalação elétrica completa de uma empresa. Esta instalação possui dois setores: o primeiro setor alimenta um motor de 5 cv e outro de 10 cv, com fator de potência igual a 0,70 e 0,80, respectivamente, e um grupo de 10 lâmpadas incandescentes de 100 W cada; o segundo setor alimenta um motor 10 cv, com fator de potência igual a 0,60 e um grupo de 50 lâmpadas incandescentes de 100 W cada. Dimensione o capacitor que corrige o fator de potência da instalação para 0,92.

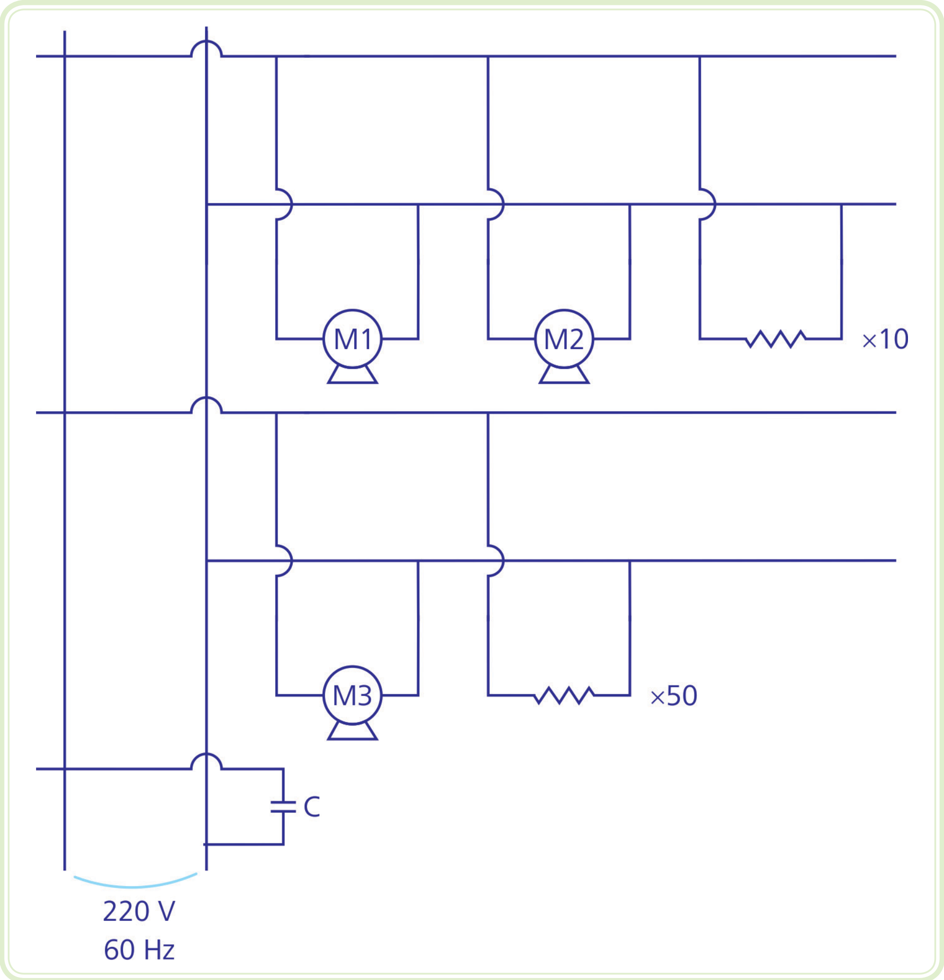

Figura 8.9: Instalação – correção geral
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Setor 1

$$P_{M1} = 3680 \text{ W}$$

$$Q_{M1} = 3753{,}96 \text{ VAR}$$

$$P_{M2} = 7360 \text{ W}$$

$$Q_{M2} = 5520{,}02 \text{ VAR}$$

$$P_{L1} = 1000 \text{ W}$$

$$Q_{L1} = 0 \text{ VAR}$$

$$P_{S1} = P_{M1} + P_{M2} + P_{L1} = 3680 + 7360 + 1000 = 12040 \text{ W}$$

$$Q_{S1} = Q_{M1} + Q_{M2} + Q_{L1} = 3753{,}96 + 5520{,}02 + 0 = 9273{,}98 \text{ VAR}$$

Setor 2

Motor 3:

$$\varphi = \text{arccos}\ (0{,}6) = 53{,}13^\circ$$

$$P_{M3} = 10 \times 736 = 7360 \text{ W}$$

$$Q_{M3} = P_{M3} \times \text{tg}\varphi = 7360 \times \text{tg}\ (53{,}13^\circ) = 9813{,}30 \text{ VAR}$$

Lâmpadas:

$$P_L = 50 \times 100 = 5000 \text{ W}$$

$$Q_L = VI \sin\ (0^\circ) = 0 \text{ VAR}$$

$$P_{S2} = P_{M3} + P_{L2} = 7360 + 5000 = 12360 \text{ W}$$

$$Q_{S2} = Q_{M3} + Q_{L2} = 9813{,}30 + 0 = 9813{,}30 \text{ VAR}$$

Triângulo de potência (sem capacitor):

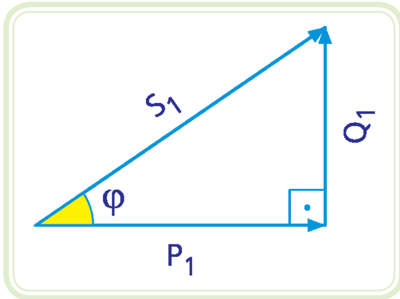

Figura 8.10: Triângulo de potência antes da correção
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

$$P_1 = P_{S1} + P_{S2} = 12040 + 12360 = 24400 \text{ W}$$

$$Q_1 = Q_{S1} + Q_{S2} = 9273{,}98 + 9813{,}30 = 19087{,}28 \text{ VAR}$$

$$S_1 = \sqrt{P_1^{\,2} + Q_1^{\,2}} = 30978{,}77 \text{ VA}$$

$$FP = \frac{P_1}{S_1} = \frac{24400}{30978{,}77} = 0{,}788$$

Triângulo de potência corrigido (com capacitor):

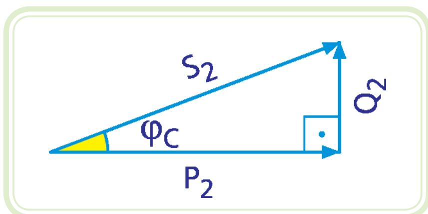

Figura 8.11: Triângulo de potência após a correção
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

$$\varphi_C = \arccos 0{,}92 = 23{,}07^\circ$$

$$P_2 = P_1 = 24400 \text{ W}$$

$$Q_2 = P_2 \times tg\varphi_C = 24400 \times tg(23{,}07^\circ) = 10392{,}39 \text{ VAR}$$

$$Q_2 = Q_1 + Q_C \rightarrow Q_C = Q_2 - Q_1 = 10392{,}39 - 19087{,}28 = -8694{,}89 \text{ VAR}$$

$$Q_C = V \times I \times \sin(-90^\circ) = V \frac{V}{|X_C|}(-1)$$

$$-\frac{220^2}{|X_C|} = -8694{,}89 \rightarrow |X_C| = 5{,}57\ \Omega$$

$$C = \frac{1}{2\pi f|X_C|} = \frac{1}{2 \times \pi \times 60 \times 5{,}57} = 475{,}23\ \mu F$$

O que acontece se os 3 motores forem desligados?

Quando os três motores são desligados espera-se que toda a potência fornecida seja transformada em trabalho útil, pois as lâmpadas apenas dissipam potência. Assim, o fator de potência esperado seria o máximo, 1. No entanto, na correção geral o capacitor é ligado em toda a instalação e, por possuir potência reativa, o fator de potência da instalação diminui desnecessariamente.

Agora considere o caso em que apenas o setor 2 é desligado. O fator de potência da instalação mudará e, nesse caso, a correção por setor (grupos de cargas) seria mais vantajosa pois manteria o fator de potência corrigido independentemente de outros setores.

Resumo

Nessa aula, você aprendeu sobre a importância da correção do fator de potências das instalações. Também foi abordado as diferentes formas de correção, de forma quantitativa e qualitativa.

Atividades de aprendizagem

1. Uma fonte de 220 V_{rms}/60 Hz alimenta 30 lâmpadas de 60 W cada, um motor monofásico de 10 cv, rendimento de 75 % e fator de potência 60 % e um de 7,5 cv, rendimento de 80 % e fator de potência 80 %. Calcular o capacitor que colocado em paralelo com o circuito corrija o fator de potência da instalação para 0,95. O que acontece com o fator de potência quando as lâmpadas são desligadas?

2. Uma fonte de 120 V_{rms}/60 Hz alimenta uma carga indutiva com impedância de 20 Ω e fator de potência de 60 %. Calcular o valor do capacitor capaz de corrigir o fator de potência do circuito para 0,92.

3. Uma carga indutiva que dissipa 1000 W é alimentada por uma fonte de corrente alternada de 120 V_{rms}/60 Hz. Para ter seu fator de potência corrigido para 1 foi ligada em paralelo com um capacitor de reatância igual a 20 Ω. Calcular o fator de potência da carga indutiva.

Aula 9 – Sistemas trifásicos

Objetivos

Aprender a representação das tensões fornecidas por um gerador trifásico.

Aprender a analisar um circuito trifásico.

Aprender as relações entre as tensões de fase e de linha e entre as correntes de fase e de linha para as ligações estrela e triângulo.

Aprender a representar as tensões e correntes de um sistema trifásico no diagrama fasorial.

9.1 Considerações iniciais

O sistema trifásico (ou 3ϕ) recebe este nome porque possui três tensões defasadas de 120º (ou $2\pi/3$rad) entre si. Se essas tensões tiverem a mesma amplitude, o gerador que produz estas tensões é dito balanceado. No nosso curso, serão abordados apenas os geradores balanceados, mas será analisado o comportamento das cargas equilibradas (impedâncias iguais) e desequilibradas (impedâncias diferentes).

Entre as vantagens do sistema trifásico em relação ao monofásico, destacam-se as principais:

- A corrente na linha é menor, reduzindo o diâmetro dos condutores da instalação.
- Permite alterar a tensão na carga pela mudança da configuração do gerador e/ou da carga.
- Pode ser utilizado, também, para alimentar cargas monofásicas.
- Os motores trifásicos têm menores dimensões que os monofásicos de mesma potência e apresentam melhor desempenho.

9.2 Gerador trifásico

A Figura 9.1 mostra de forma esquemática um gerador trifásico. Ele é composto por três enrolamentos fixos, denominados fases, posicionados geometricamente de modo que a tensão induzida em cada fase encontra-se atrasada de 120° em relação a uma e adiantada de 120° em relação à outra fase.

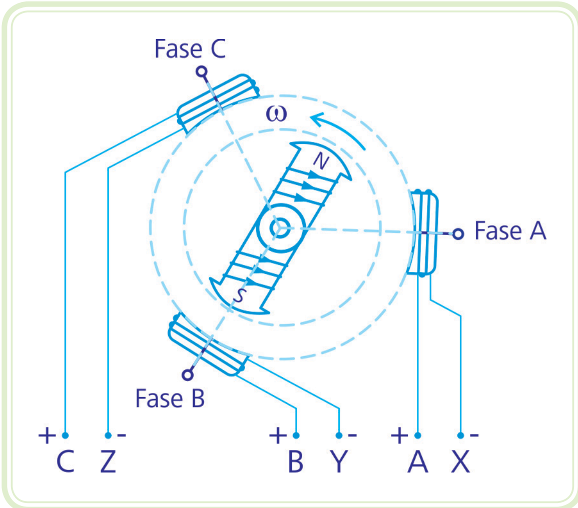

Figura 9.1: Esquema de um gerador trifásico
Fonte: CTISM, adaptado de Markus, 2011

A Figura 9.2 mostra a representação dos enrolamentos de um gerador trifásico.

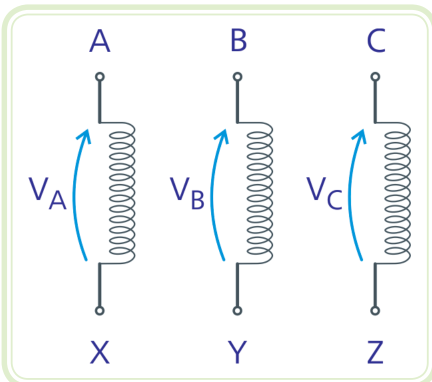

Figura 9.2: Representação dos enrolamentos de um gerador trifásico
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Se o número de espiras é o mesmo nos três enrolamentos, o gerador é balanceado, ou seja, o módulo das três tensões é igual.

Denominaremos as tensões de fase de $V_A(t)$, $V_B(t)$ e $V_C(t)$, todas com a tensão de pico V_p, adotando a sequência positiva de operação (sistema trifásico ABC anti-horário), ou seja:

$$V_A(t) = V_p \text{ sen } (\omega t + 0°)$$

$$V_B(t) = V_p \text{ sen } (\omega t - 120°)$$

$$V_C(t) = V_p \text{ sen } (\omega t - 240°) = V_p \text{ sen } (\omega t + 120°)$$

A Figura 9.3 mostra a forma de onda e o diagrama fasorial das tensões de fase.

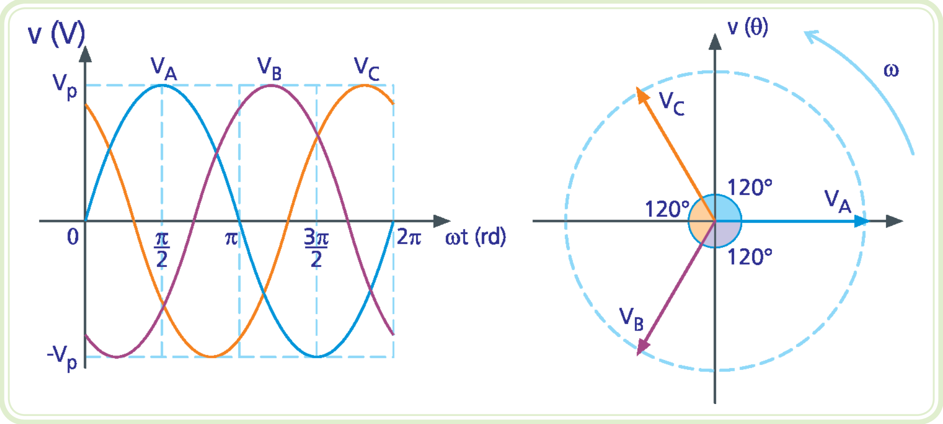

Figura 9.3: Formas de onda e diagrama fasorial das tensões de fase
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

Observação
Na representação do diagrama fasorial, vamos adotar os valores eficazes de cada fasor ao invés dos valores de pico, assim como foi adotado na Figura 9.3.

9.3 Configurações do gerador trifásico e da carga trifásica

Dependendo da forma como os terminais do gerador e da carga alimentada são conectados entre si, podemos identificar duas configurações de operação denominadas estrela (Y) ou triângulo (Δ).

9.3.1 Configuração estrela

Na configuração estrela, os terminais X, Y e Z dos enrolamentos estão conectados a um ponto comum denominado neutro (0), de acordo com a Figura 9.4.

Os terminais A, B e C e neutro (0) ficam acessíveis para a conexão das cargas (trifásica a 4 fios), sendo o neutro usado para retorno (carga trifásica desbalanceada).

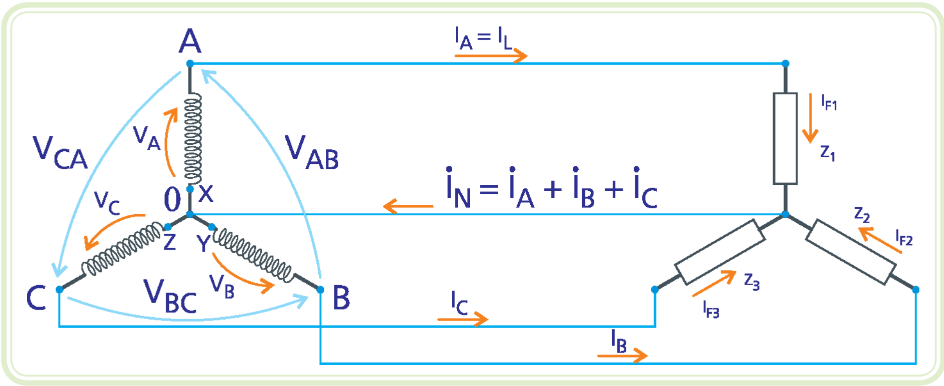

Figura 9.4: Gerador e carga na configuração estrela
Fonte: CTISM, adaptado de Albuquerque, 2007

A corrente no fio neutro é igual à soma vetorial das três correntes de linha ($\dot{I}_A$, $\dot{I}_B$ e $\dot{I}_C$), isto é:

Equação 9.1

$$\dot{I}_N = \dot{I}_A + \dot{I}_B + \dot{I}_C$$

O ponto em cima da letra indicadora da corrente significa que a grandeza em questão é fasorial (tem módulo e fase).

A corrente de linha (I_L) é a corrente que circula nos condutores que interligam o gerador à carga (exclui-se o neutro).

Na Figura 9.4, a carga trifásica é constituída de três impedâncias $\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ e $\dot{Z}_3$, apresentada na configuração estrela. Nessa configuração, o módulo da corrente de linha (I_L) é igual ao módulo da **corrente de fase (I_F)**. Resumidamente, para qualquer fase, teremos: $I_L = I_F$.

A-Z

corrente de fase (I_F)
É a correte que circula em cada uma das fases da carga elétrica, ou seja, é a corrente que percorre todas as impedâncias da carga.

Se a carga é equilibrada ($\dot{Z}_1$, $\dot{Z}_2$ e $\dot{Z}_3$ são iguais tanto em módulo quanto em fase), as correntes de linha serão iguais em módulo e defasadas de 120º entre si, de modo que a corrente no fio neutro será nula, não havendo necessidade do fio neutro.

As tensões medidas entre os terminais do gerador (A, B e C) e o neutro (0), são as tensões de fase, que serão escritas genericamente por V_F. Obviamente, a tensão de fase é a tensão desenvolvida em cada fase do gerador. Este conceito se aplica também para cada uma das fases da carga trifásica.

As tensões medidas entre os terminais do gerador são chamadas de tensão de linha ($\dot{V}_{AB}$, $\dot{V}_{BC}$ e $\dot{V}_{CA}$), genericamente V_L. Repare que estas tensões serão aplicadas entre os condutores que ligam o gerador à carga, denominados de linha excluindo-se o fio neutro. Por essa razão são denominadas tensões de linha. Tem-se, em termos fasoriais:

$$\dot{V}_{AB} = \dot{V}_A - \dot{V}_B$$

$$\dot{V}_{BC} = \dot{V}_B - \dot{V}_C$$

$$\dot{V}_{CA} = \dot{V}_C - \dot{V}_A$$

As três expressões anteriores significam que em cada instante de tempo, a tensão de linha é igual à diferença entre os valores instantâneos das respectivas tensões de fase. Veja o diagrama fasorial da Figura 9.5.

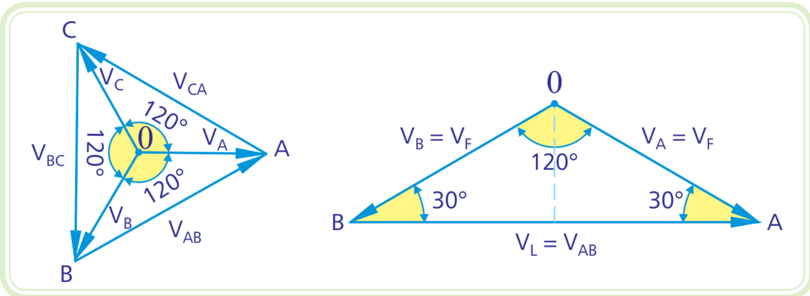

Figura 9.5: Diagrama fasorial das tensões de linha e das tensões de fase
Fonte: CTISM, adaptado de Albuquerque, 2007

Do segundo triângulo da Figura 9.5, pode-se obter a relação existente entre a tensão de fase (V_F) e a tensão de linha (V_L). Aplicando a lei dos senos para o triângulo **B0A**, tem-se:

Sabe-se que:

$$\frac{V_L}{\text{sen}120°} = \frac{V_F}{\text{sen}30°} \quad \rightarrow \quad V_L = \frac{\text{sen}120°}{\text{sen}30°} V_F$$

$$\text{sen}120° = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{e} \quad \text{sen}30° = \frac{1}{2}$$

Portanto:

Equação 9.2

$$V_L = \sqrt{3} \times V_F$$

Este resultado nos mostra que na configuração estrela os módulos das tensões de linha são sempre √3 vezes maior que os módulos das tensões de fase. Por meio do diagrama fasorial é possível concluir que as tensões de linha estão sempre adiantadas de 30° em relação às tensões de fase.

9.3.2 Configuração triângulo

Na configuração triângulo, os terminais dos enrolamentos estão conectados na seguinte ordem:

$$(A \equiv Z),\ (B \equiv X)\ e\ (C \equiv Y)$$

Os terminais A, B e C ficam acessíveis para a conexão das cargas (3ϕ – 3 fios). Neste caso não há neutro. A Figura 9.6 mostra um sistema trifásico ligado em triângulo ou delta, alimentando uma carga trifásica, também em triângulo.

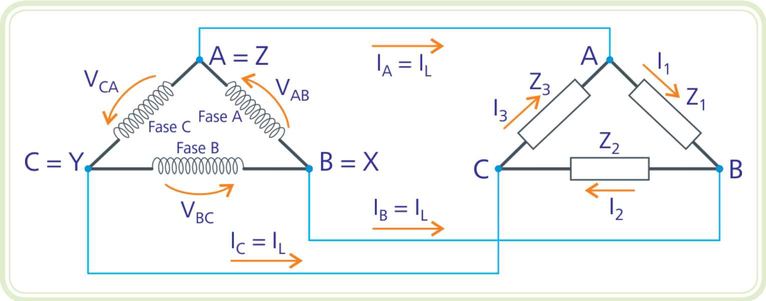

Figura 9.6: Gerador e carga na configuração triângulo
Fonte: CTISM, adaptado de Albuquerque, 2007

As tensões entre dois terminais A-B, B-C e C-A correspondem às tensões de fase e de linha. A configuração triângulo caracteriza-se por ter tensões de linha iguais às tensões de fase (em módulo), ou seja:

$$V_L = V_F$$

No entanto, as correntes de linha não serão mais iguais às correntes de fase, tal como acontece na configuração estrela. Na configuração triângulo, cada corrente de linha é a diferença fasorial entre suas duas correntes de fase, ou seja:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_1 - \dot{I}_3$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_2 - \dot{I}_1$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_3 - \dot{I}_2$$

O diagrama fasorial para as correntes de fase e de linha é mostrado na Figura 9.7.

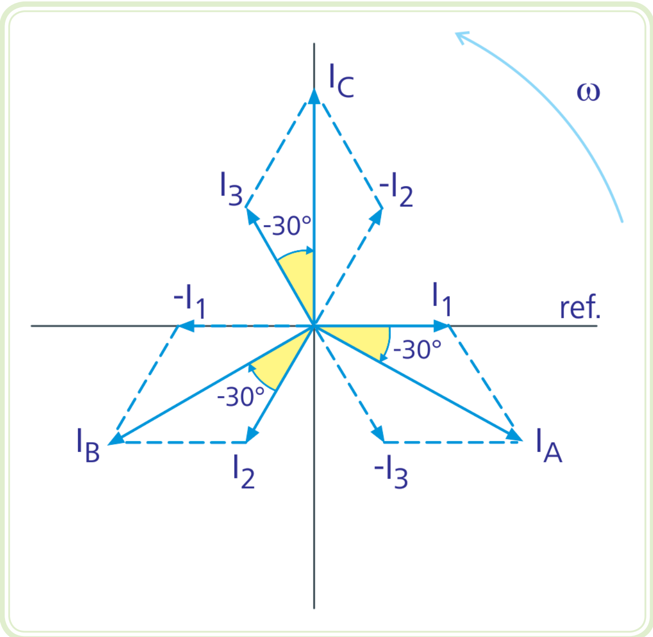

Figura 9.7: Diagrama fasorial para as correntes de fase e de linha
Fonte: CTISM, adaptado de Albuquerque, 2007

Se a carga é equilibrada, as correntes de fase defasam-se entre si em 120º, o mesmo acontecendo com as correntes de linha. Só que as correntes de linha estão sempre atrasadas de 30º em relação às de fase e seus módulos serão sempre √3 vezes maiores que os módulos das correntes de fase. Isto pode ser comprovado facilmente tomando-se qualquer triângulo que relaciona a corrente de linha com as correntes de fase, analogamente ao que foi feito com tensão de linha e tensão de fase na ligação em estrela. Resumindo, na configuração triângulo, tem-se:

Equação 9.3

$$I_L = \sqrt{3} \times I_F$$

Uma observação deve ser feita quanto ao sentido de rotação do gerador. Em caso de inversão, a sequência de fases será negativa e as correntes de linha ficarão adiantadas de 30° em relação às correntes de fase.

Resumo

Nessa aula, você aprendeu como são geradas as três tensões de um gerador trifásico. Você também aprendeu sobre as principais diferenças entre o sistema monofásico e o trifásico. Também, foram apresentadas as configurações estrela e triângulo, e algumas análises foram discutidas. Foram abordadas as relações entre tensões de fase e de linha e entre correntes de fase e de linha para as configurações estrela e triângulo.

Atividades de aprendizagem

1. Diferencie o sistema monofásico do sistema trifásico.

2. Qual a vantagem da utilização de equipamentos elétricos trifásicos?

3. Explique como surgem as tensões trifásicas num gerador trifásico.

4. Qual a defasagem angular entre as tensões de um gerador trifásico? A que se deve este valor?

5. Quais os tipos de ligações empregadas em circuitos trifásicos? Estabeleça a relação entre tensões e correntes de linha e de fase para cada ligação.

6. Explique por que não há a necessidade de fio neutro para alimentar uma carga trifásica equilibrada em estrela, por meio de um gerador ligado em estrela.

Aula 10 – Potência em sistemas trifásicos

Objetivos

Aprender calcular as potências totais e o fator de potência de uma carga trifásica.

10.1 Potência nas configurações estrela e triângulo

Considere uma carga trifásica, configurada em estrela ou triângulo conforme a Figura 10.1.

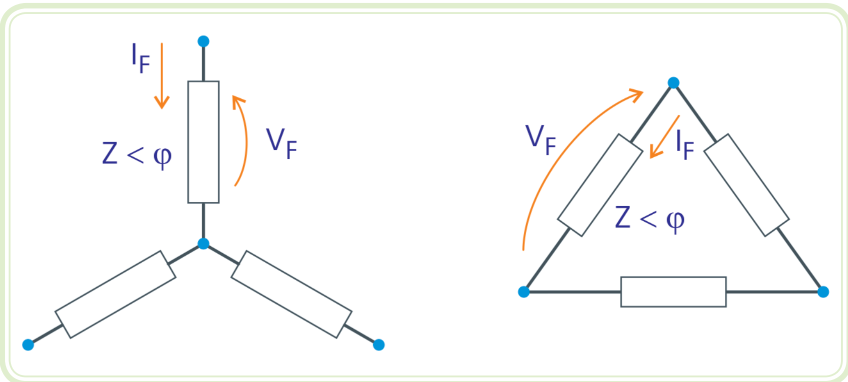

Figura 10.1: Carga trifásica configurada em estrela (à esquerda) e em triângulo (à direita)
Fonte: CTISM, adaptado de Albuquerque, 2007

Cada fase da carga trifásica possui uma impedância Z e está submetida a uma tensão de fase V_F e corrente de fase I_F. O ângulo de fase φ da impedância Z, é o ângulo de defasagem entre a tensão e corrente de fase e é exatamente o ângulo que define o fator de potência (FP = cos φ).

Como visto anteriormente, a impedância de fase (Z) corresponde à oposição total oferecida por cada fase da carga trifásica à passagem da corrente na fase considerada. A impedância de fase é calcula pela seguinte equação:

Equação 10.1

$$Z = \frac{V_F}{I_F} \qquad (\Omega)$$

De modo que:

Equação 10.2

$$I_F = \frac{V_F}{Z} \qquad (A)$$

Vale ressaltar que a Equação 10.2 é válida para qualquer configuração da carga (Y ou Δ).

A potência real (ativa) em cada uma das fases (impedâncias) é dada por:

Equação 10.3

$$P_{1\phi} = V_F \times I_F \times \cos\varphi \qquad (W)$$

No caso de um sistema trifásico balanceado, a potência de cada fase é a mesma; desta forma a potência total das três fases (potência trifásica) é dada por:

Equação 10.4

$$P_{3\phi} = 3 \times V_F \times I_F \times \cos\varphi \qquad (W)$$

No caso de ligação estrela, tem-se:

Equação 10.5

$$I_F = I_L \qquad e \qquad V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$

Substituindo na expressão da potência trifásica, resulta:

Equação 10.6

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} \times V_L \times I_L \times \cos\varphi \qquad (W)$$

O mesmo resultado será obtido na configuração triângulo, onde se tem:

Equação 10.7

$$V_F = V_L \qquad e \qquad I_F = \frac{I_L}{\sqrt{3}}$$

Substituindo-se na expressão inicial de $P_{3\phi}$, encontraremos:

$$P_{3\phi} = \sqrt{3} \times V_L \times I_L \times \cos\varphi \qquad (W)$$

Conclui-se, pois, que a potência ativa (real) é a mesma nas duas configurações e pode-se utilizar esta expressão para ambas as configurações.

A potência aparente das três fases (potência aparente trifásica), para qualquer configuração é dada por:

Equação 10.8

$$S_{3\phi} = 3 \times V_F \times I_F \qquad (VA)$$

Trabalhando com os valores de tensão e de corrente de linha, obtêm-se para ambas as configurações:

Equação 10.9

$$S_{3\phi} = \sqrt{3} \times V_L \times I_L \qquad (VA)$$

De maneira análoga, a potência reativa da carga trifásica, para qualquer uma das configurações é dada por:

Equação 10.10

$$Q_{3\phi} = \sqrt{3} \times V_L \times I_L \times \operatorname{sen}\varphi \qquad (VAR)$$

Vale a pena ressaltar que essas fórmulas são dadas, considerando cargas trifásicas equilibradas. Caso a carga não seja equilibrada, devem-se obter as potências reais e reativas em cada uma das impedâncias (fases) e então obter a potências real e reativa totais para a carga trifásica. Isto é:

$$P_{3\phi} = P_1 + P_2 + P_3 \qquad (W)$$

$$Q_{3\phi} = Q_1 + Q_2 + Q_3 \qquad (VAR)$$

A última expressão afirma que a potência reativa total é a soma algébrica das potências reativas desenvolvidas pelos componentes reativos do circuito trifásico. No caso de se ter capacitores e indutores, a potência reativa total é realizada subtraindo os valores das potências reativas capacitiva e indutiva.

Consequentemente, a potência aparente total e o fator de potência total da carga 3ϕ serão dados por:

$$S_{3\phi} = \sqrt{P_{3\phi}^{\ 2} + Q_{3\phi}^{\ 2}} \qquad \text{(VA)}$$

$$FP = \cos\varphi = \frac{P_{3\phi}}{S_{3\phi}}$$

Exemplo

Um gerador balanceado configurado em triângulo desenvolve 220 V_{rms} em cada uma de suas fases. Este gerador alimenta uma carga configurada em estrela formada por três impedâncias indutivas iguais de 15 Ω e FP = 0,8 indutivo, de acordo com o circuito da Figura 10.2. Pede-se:

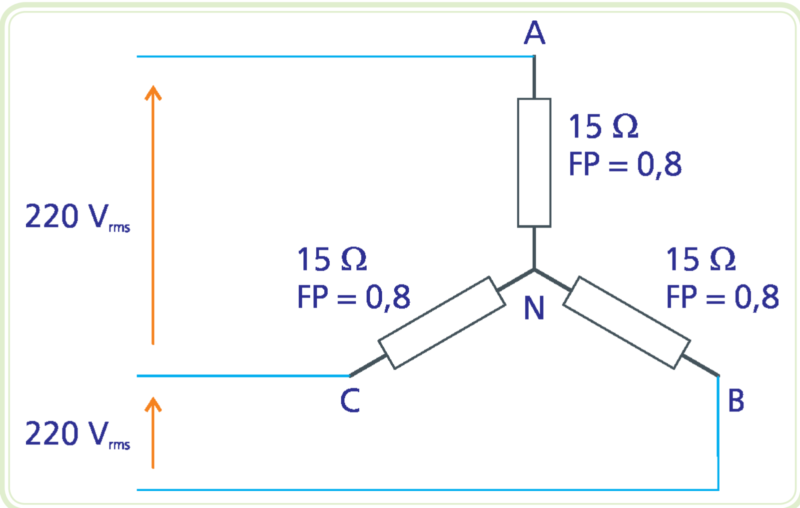

Figura 10.2: Carga configurada em estrela
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

a) Determine as tensões na linha e em cada fase da carga trifásica na forma complexa.

Módulo da tensão de linha na carga:

$$V_L = 220\ V_{rms}$$

Como a carga está configurada em triângulo, podemos obter o módulo da tensão de fase da seguinte maneira:

$$V_L = \sqrt{3}V_F \longrightarrow V_F = \frac{V_L}{\sqrt{3}}$$
$$V_F = \frac{220}{\sqrt{3}} = 127\ V_{rms}$$

Tensões de fase

Como o gerador é balanceado, as três tensões estão defasadas de 120° entre si. Tomando V_A como referência, podemos escrever:

$$V_A = 127\underline{|0^\circ}\ V_{rms}$$
$$V_B = 127\underline{|-120^\circ}\ V_{rms}$$
$$V_C = 127\underline{|120^\circ}\ V_{rms}$$

Tensões de linha

Em uma carga balanceada configurada em estrela as tensões de linhas estão sempre adiantadas de 30° em relação às tensões de fase, ou seja:

$$V_{AB} = 220\underline{|0^\circ + 30^\circ} = 220\underline{|30^\circ}\ V_{rms}$$
$$V_{BC} = 220\underline{|-120^\circ + 30^\circ} = 220\underline{|-90^\circ}\ V_{rms}$$
$$V_{CA} = 220\underline{|120^\circ + 30^\circ} = 220\underline{|150^\circ}\ V_{rms}$$

b) Determine as correntes de linha e de fase na forma complexa.

$$FP = \cos\varphi = 0{,}8 \longrightarrow \text{arccos}\ 0{,}8 = \varphi$$
$$\varphi = 36{,}9^\circ$$

Sabendo que a carga é indutiva, podemos escrever a impedância da seguinte maneira:

$$\dot{Z} = 15\underline{|36{,}9^\circ}\ \Omega$$

Aplicando a Lei de Ohm em cada carga, calculamos a corrente em cada fase:

$$\dot{I}_{AN} = \frac{\dot{V}_A}{\dot{Z}} = \frac{127\angle 0^\circ}{15\angle 36{,}9^\circ} = \frac{127}{15}\angle 0^\circ - 36{,}9^\circ = 8{,}46\angle -36{,}9^\circ \ A_{rms}$$

$$\dot{I}_{BN} = \frac{\dot{V}_B}{\dot{Z}} = \frac{127\angle -120^\circ}{15\angle 36{,}9^\circ} = \frac{127}{15}\angle -120^\circ - 36{,}9^\circ = 8{,}46\angle -156{,}9^\circ \ A_{rms}$$

$$\dot{I}_{CN} = \frac{\dot{V}_C}{\dot{Z}} = \frac{127\angle 120^\circ}{15\angle 36{,}9^\circ} = \frac{127}{15}\angle 120^\circ - 36{,}9^\circ = 8{,}46\angle 83{,}1^\circ \ A_{rms}$$

Observe que as correntes também estão defasadas de 120° entre si. Isto porque a carga é balanceada.

Na configuração estrela, a corrente de linha é igual à corrente de fase, portanto:

$$\dot{I}_A = \dot{I}_{AN} = 8{,}46\angle -36{,}9^\circ \ A_{rms}$$

$$\dot{I}_B = \dot{I}_{BN} = 8{,}46\angle -156{,}9^\circ \ A_{rms}$$

$$\dot{I}_C = \dot{I}_{CN} = 8{,}46\angle -83{,}1^\circ \ A_{rms}$$

c) Determine a potência real consumida pela carga trifásica.

$$P_{3\phi} = 3\ V_F\ I_F \cos\varphi$$

$$P_{3\phi} = 3 \times 127 \times 8{,}46 \cos 36{,}9^\circ$$

$$P_{3\phi} = 2.577{,}6\ W$$

Resumo

Nessa aula, você aprendeu como calcular as potências totais de uma carga trifásica, bem como seu fator de potência.

Atividades de aprendizagem

1. Determinar a corrente no fio neutro do circuito.

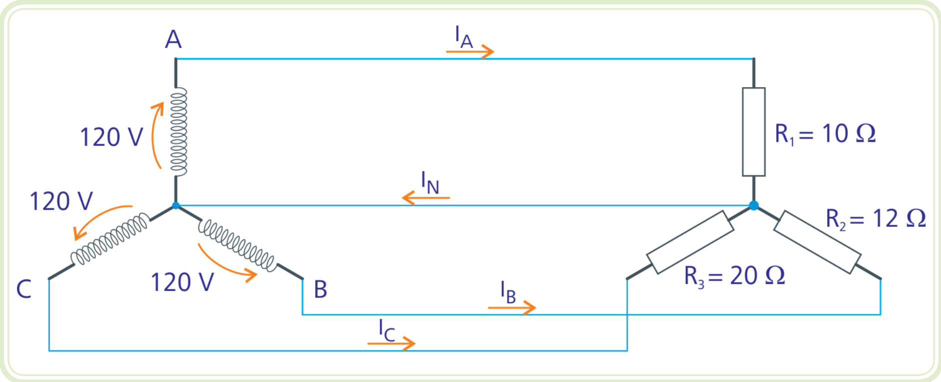

Figura 10.3: Gerador e carga configurados em estrela
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

2. Suponha agora que a carga trifásica resistiva da questão anterior seja equilibrada com todas as resistências iguais a 12 Ω. Determine as tensões de linha e de fase, as correntes de linha e de fase e a corrente no fio neutro do circuito.

3. A tensão de linha aplicada a um motor cujos enrolamentos têm 20 Ω de impedância é 220 V. Calcule as correntes de linha e as correntes de fase se o motor é ligado em triângulo, de acordo com a Figura 10.4. Determine também as potências ativa, reativa e aparente da instalação se o fator de potencia (FP = cosφ) do motor vale 0,85.

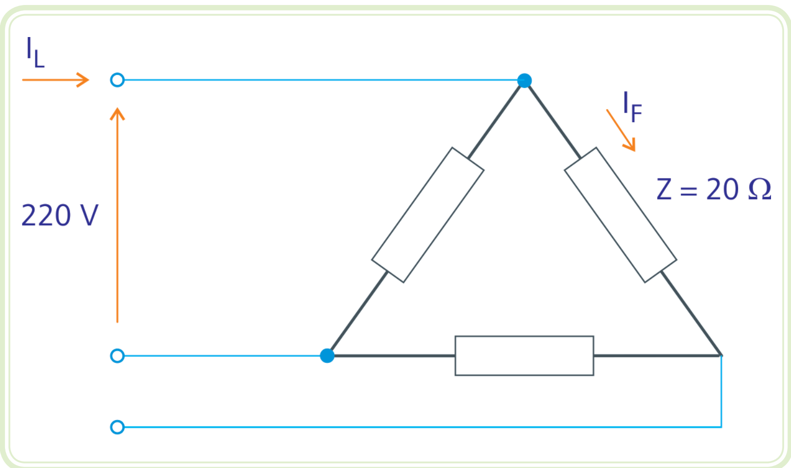

Figura 10.4: Carga configurada em triângulo
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

4. Suponha agora que o mesmo motor possa trabalhar com uma tensão de linha de 380 V, ligado em estrela. Determine novamente as correntes de linha e de fase, bem como a tensão de fase em cada enrolamento do motor, de acordo com a Figura 10.5. Determine também as potências ativa, reativa e aparente da instalação se o fator de potencia (FP = cosφ) do motor vale 0,85.

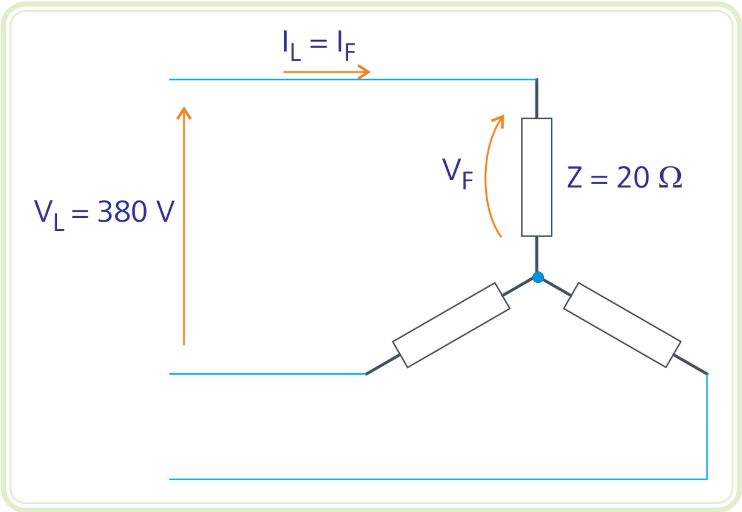

Figura 10.5: Carga configurada em estrela
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

5. A partir das questões 3 e 4, pode-se observar que a corrente e tensão de fase em cada enrolamento do motor têm os mesmos valores, tanto na configuração triângulo quanto na configuração estrela, isto é os enrolamentos trabalharão nas mesmas condições independente da configuração. Por tudo o que foi visto anteriormente, é que a maioria os motores permitem o acesso aos seis terminais dos enrolamentos. Assim, se na placa do motor estiver escrito 220/380 V, significa que os enrolamentos devem ser ligados em triângulo se a tensão de linha é 220 V e ligados em estrela para tensão de linha de 380 V. Sabendo-se disso, configure as placas do motor apresentadas na Figura 10.6 para que o mesmo possa operar em Y (380 V) e em Δ (220 V).

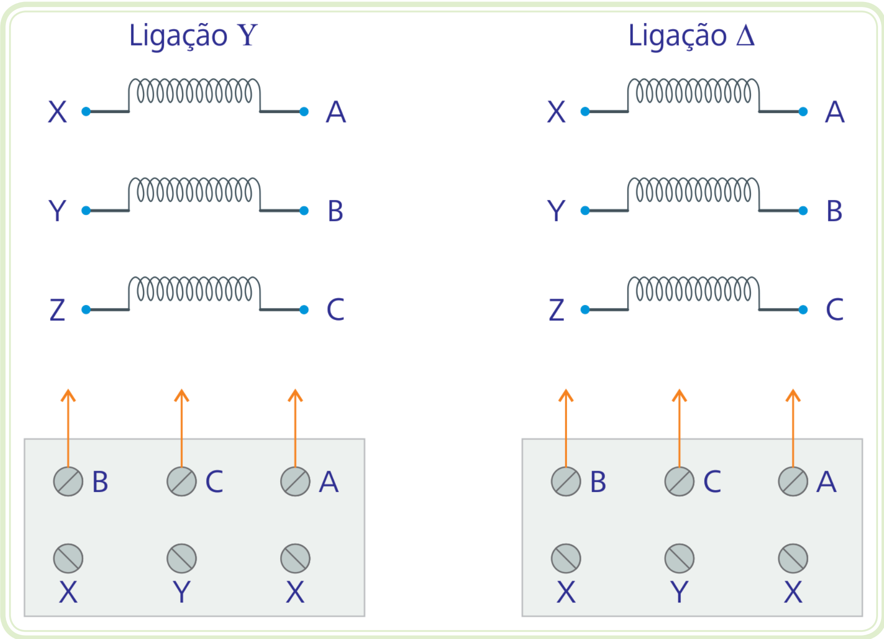

Figura 10.6: Esquema de ligação de motores
Fonte: CTISM, adaptado dos autores

6. Um gerador trifásico balanceado em triângulo produz uma tensão de 127 V em cada fase. Ele deve alimentar uma carga trifásica equilibrada na configuração estrela, formada por impedâncias iguais de valor 10 Ω. Desenhe o circuito correspondente e determine todas as tensões e corrente, de linha e de fase.

Referências

ALBUQUERQUE, R. O. **Análise de circuitos em corrente alternada**. 2. ed. São Paulo: Érica, 2007.

MARKUS, O. **Circuitos elétricos** – Corrente contínua e corrente alternada – Teoria e exercícios. São Paulo: Érica, 2011.

Currículo do professor-autor

O professor **Alan Kardek Rêgo Segundo**, natural de Taiobeiras, MG, é Engenheiro de Controle e Automação, formado pela UFOP, com mestrado e doutorado em Engenharia Agrícola pela UFV, na área de energia e de automação de processos agrícolas. Foi professor de Eletrônica Industrial e de Projetos de Automação do IFMG *campus* Ouro Preto entre 2009 e 2011. Em 2012 se tornou professor efetivo do curso de Engenharia de Controle e Automação da Escola de Minas (UFOP), uma das unidades mais tradicionais do Brasil. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em instrumentação e sistemas embutidos. Atuando principalmente nos seguintes temas: microcontroladores e controle de processos.

O professor **Cristiano Lúcio Cardoso Rodrigues** é Engenheiro Eletricista, formado pela Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG, com mestrado em Eletrônica de Potência pela UFMG e doutorado em Engenharia Agrícola pela UFV. É professor do IFMG *campus* Ouro Preto (antiga Escola Técnica Federal de Ouro Preto) desde 1997. Tem experiência na área de Engenharia Elétrica, com ênfase em eletrônica industrial, sistemas e controles eletrônicos, atuando principalmente nos seguintes temas: controle de processos, sistemas de aquisição de dados, instrumentação eletrônica.