

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE TECNOLOGIA
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Deniel Desconzi Moraes

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM DIRIGÍVEL PARA
OPERAÇÃO *INDOOR***

Santa Maria, RS
2019

Deniel Desconzi Moraes

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM DIRIGÍVEL PARA OPERAÇÃO
*INDOOR***

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

ORIENTADOR: Prof. Lucas Vizzotto Bellinaso

Santa Maria, RS
2019

Deniel Desconzi Moraes

**MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM DIRIGÍVEL PARA OPERAÇÃO
INDOOR**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

Aprovado em 9 de dezembro de 2019:

Lucas Vizzotto Bellinaso, Dr. (UFSM)
(Presidente/Orientador)

André Luís da Silva, Dr. (UFSM)

Eduardo Escobar Bürger, Dr. (UFSM)

Santa Maria, RS
2019

DEDICATÓRIA

*Aos meus pais, que não precisaram entender meus sonhos para permitir que eu os
sonhasse.*

Ao meu irmão, por me emprestar seus ombros para que eu pudesse ver mais longe.

AGRADECIMENTOS

Gostaria de agradecer a todos aqueles que contribuíram para a superação dessa fase da minha jornada.

Ao meu mentor, Nelson Jorge Schuch, por compartilhar a sua sabedoria.

Ao professor Juliano, meu primeiro orientador, pelas oportunidades que recebi e por tudo que aprendi com ele.

Aos meus mestres, que me ensinaram a Engenharia, em especial, ao Professor Pedro Paglione, cujo conhecimento é enorme, só sendo superado pela sua vontade de passá-lo adiante.

Ao meu Orientador, Professor Lucas, por ter aceitado o desafio e me acompanhado até aqui.

À minha Guilda, aos mijones, à Conexão, à astronata e à L A D A I A, amigos cuja importância só é superada pelo ridículo de suas autodenominações. Aqui, um agradecimento especial aos amigos Artur e Lorenzo, que fizeram parte dessa jornada no dia a dia e tornaram tudo mais fácil.

Por fim, agradeço a minha companheira e melhor amiga, Gabriela, pelo apoio constante durante todo esse ciclo, que o amanhã seja gentil conosco como o ontem foi.

Sigue Luan, sigue Luan. Que golazo de Luan! Que golazo de Luan! POR FAVOR! Que golazo de Luan. La picó cuando salió Andrada y Grêmio empieza a afirmarse y a decir que quiere la copa Libertadores a los cuarenta y uno. Golazo de Luan, Grêmio 2, Lanus 0. Que lo parió, que pedazo de gol.

(Walter Nelson)

RESUMO

MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UM DIRIGÍVEL PARA OPERAÇÃO *INDOOR*

AUTOR: Deniel Desconzi Moraes
ORIENTADOR: Lucas Vizzotto Bellinaso

A atual situação mundial das aeronaves remotamente pilotadas é encorajadora, pois seu mercado está em plena expansão no setor civil e militar. Nesse contexto, várias plataformas estão sendo utilizadas, boa parte delas possui baixa autonomia e gera bastante ruído sonoro, tornando-as pouco interessantes para operações em ambientes fechados como filmagens e publicidade. Nesse nicho, os dirigíveis autônomos destacam-se, pela elevada autonomia, atrelada à estabilidade e baixo ruído com navegação segura nesses ambientes devido à sua baixa velocidade de operação. Este trabalho apresenta um sistema de guiamento e controle para um dirigível com três propulsores fixos. Primeiramente, um modelo dinâmico com seis graus de liberdade é introduzido, sendo parametrizado de acordo com as dimensões físicas de uma aeronave considerada referência para dirigíveis de pequeno porte. Uma lei de controle é obtida para o modelo linearizado e invariante no tempo do sistema e um controlador regulador linear quadrático com compensadores integrais sintetizado. É avaliada a resposta em malha fechada do sistema linearizado para diferentes condições, mas sem variar o controlador projetado, baseado nos mapas de pólos e zeros desses sistemas. É apresentada uma lei de guiamento para controle de rumo no plano látero-direcional e velocidade translacional no plano longitudinal. As trajetórias a serem acompanhadas pelo sistema, no modo autônomo, são estabelecidas por sequências de pontos de passagem no espaço aéreo. Foram feitas algumas simulações para condições arbitrárias capazes de avaliar o desempenho do controlador. O sistema de guiamento foi testado considerando trajetórias comuns à operação de uma aeronave em ambiente fechado. Essas análises permitem observar as potencialidades do sistema e indicar trabalhos futuros.

Palavras-chave: Controle. Dirigíveis. Guiamento. Simulação.

ABSTRACT

MODELLING SIMULATION AND CONTROL OF AN AIRSHIP FOR INDOOR OPERATION

AUTHOR: Deniel Desconzi Moraes

ADVISOR: Lucas Vizzotto Bellinaso

The current worldwide situation of remotely piloted aircraft is encouraging as its market is booming in the civil and military sector. In this context, several platforms are being used, most of them have low autonomy and generate a lot of noise, making them uninteresting for indoor operations such as filming and advertising. In this niche, the autonomous airships stand out for their high autonomy, linked to stability and low noise with safe navigation in these environments due to their low operating speed. This paper presents a guidance and control system for a three-propeller airship without vectorization. Firstly, a dynamic model with six degrees of freedom is introduced, being parameterized according to the physical dimensions of an aircraft considered a reference for small airships. A control law is obtained for the linear time-invariant system model and a quadratic linear regulator controller with integral compensators is synthesized. The closed loop response of the linearized system for different conditions is evaluated, but without varying the designed controller, with the pole and zero maps of these systems. A guidance law for direction control in the latero-directional plane and longitudinal speed is presented. The trajectories to be followed by the system, in autonomous mode, are established by sequences of waypoints in the airspace. Some simulations were made for arbitrary conditions capable of evaluating the controller's performance. The guidance system was tested considering common trajectories to the operation of an aircraft indoors. These analyzes allow us to observe the potentialities of the system and indicate future work.

Keywords: Airships. Control. Guidance. Simulation.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – História do desenvolvimento dos dirigíveis. a) Dirigíveis rígidos. (b) Dirigíveis semi-rígidos. c) Dirigíveis não rígidos.	14
Figura 2.1 – Gôndola e envelope do DAVD.	17
Figura 3.1 – Dimensões principais do dirigível e pontos de interesse	19
Figura 3.2 – Sistemas de referência	21
Figura 4.1 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.	38
Figura 4.2 – Mapa de polos e zeros em malha fechada para condição de massa nominal a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros.	43
Figura 4.3 – Mapa de polos e zeros em malha fechada para condição de massa adicional de um quilograma a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros. ...	44
Figura 5.1 – Princípio LOS de guiamento com distância Δ	46
Figura 5.2 – Velocidade de referência v_{ref} em função do fator σ	48
Figura 6.1 – Diagrama do <i>Simulink</i> para simulação não linear	49
Figura 6.2 – Variação dos estados e ação dos atuadores em subida a nível do mar. ..	51
Figura 6.3 – Trajetória percorrida em subida a nível do mar.	51
Figura 6.4 – Variação dos estados e ação dos atuadores em subida parado a nível do mar.	53
Figura 6.5 – Trajetória percorrida em subida parado a nível do mar.	53
Figura 6.6 – Variação dos estados e ação dos atuadores em curva indicada constante.	55
Figura 6.7 – Trajetória percorrida em curva indicada constante.	55
Figura 6.8 – Variação dos estados e ação dos atuadores em compensação de curva.	57
Figura 6.9 – Trajetória percorrida em compensação de curva.	57
Figura 6.10 – Variação dos estados e ação dos atuadores em seguimento de trajetória vaivém a nível do mar.	60
Figura 6.11 – Caminho percorrido pela aeronave em seguimento de trajetória vaivém a nível do mar.	60
Figura 6.12 – Variação dos estados e ação dos atuadores em seguimento de trajetória circular a nível do mar.	63
Figura 6.13 – Caminho percorrido pela aeronave em seguimento de trajetória circular a nível do mar.	63
Figura A.1 – Rotação de um sistema de eixos de referência.	70
Figura C.1 – Definições geométricas para o cálculo do vetor de propulsão.	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Dimensões principais do dirigível	20
Tabela 3.2 – Condições de equilíbrio diferentes de zero para (VALLE, 2014) e para o presente trabalho.	35
Tabela 3.3 – Comparação entre os autovalores da dinâmica longitudinal.....	35
Tabela 3.4 – Comparação entre os autovalores da dinâmica látero-direcional.....	35
Tabela 4.1 – Condições de equilíbrio para a primeira série de cenários de operação..	40
Tabela 4.2 – Condições de equilíbrio para a segunda série de cenários de operação.	41
Tabela 4.3 – Condições de equilíbrio para a terceira série de cenários de operação...	41
Tabela 6.1 – Pontos de passagem para a trajetória vaivém.	58
Tabela 6.2 – Pontos de passagem para a trajetória circular.	61

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

6	—	<i>GDL</i>	Seis Graus de Liberdade
<i>C.G</i>			Centro de Gravidade
<i>C.V</i>			Centro de Volume
<i>DAVD</i>			Dirigível Autônomo de Varredura para Desminagem
<i>DC</i>			Direct Current
<i>DCM</i>			<i>Direction Cosine Matrix</i>
<i>DORA</i>			Dirigível de Observação e Reconhecimento de Alvos
<i>ESC</i>			Eletronic Speed Controller
<i>GPS</i>			<i>Global Positioning System</i>
<i>HIL</i>			<i>Hardware-in-the-loop</i>
<i>LiPo</i>			Polímero de Lítio
<i>LOS</i>			Line of Sight
<i>LQR</i>			Linear Quadratic Regulator
<i>LTl</i>			Linear Time Invariant
<i>NED</i>			North East Down
<i>SRC</i>			Sistema de Referência do Corpo

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	MOTIVAÇÃO	13
1.2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	14
1.3	OBJETIVOS	15
1.3.1	Objetivo geral	15
1.3.2	Objetivos específicos	15
1.4	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	16
2	DESCRIÇÃO DA PLATAFORMA	17
3	MODELAGEM DINÂMICA DO DIRIGÍVEL	19
3.1	CONSIDERAÇÕES GERAIS PARA A MODELAGEM	19
3.1.1	Sistemas de referência	20
3.2	MODELO NÃO LINEAR	21
3.2.1	Forma Geral da Equação do Sistema	22
3.2.2	Massas e momentos de inércia adicionais do sistema	23
3.2.3	Vetor de forças dinâmicas	25
3.2.4	Forças e momentos aerodinâmicos	27
3.2.5	Forças e momentos de peso e empuxo	29
3.2.6	Forças e momentos de propulsão	29
3.2.7	Equações cinemáticas do sistema	30
3.2.8	Equações do sistema dinâmico com 6-GDL na forma de espaço de estados	31
3.3	LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA E ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO	32
3.3.1	Dinâmica longitudinal linearizada	33
3.3.2	Dinâmica látero-direcional linearizada	34
3.3.3	Análise comparativa do modelo	34
4	PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE	36
4.1	OBJETIVOS DE PERFORMANCE	36
4.2	CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO INTEGRAL DE ESTADOS	36
4.2.1	Cálculo dos ganhos do controlador	37
4.3	ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA	40
4.3.1	Caso 1 - Massa nominal a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros	41
4.3.2	Caso 2 - Massa adicional de 1 Kg a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros	43
5	SISTEMA DE GUIAMENTO	45
5.1	ALGORITMO DE GUIAGEM DO TIPO LOS	45
5.2	PERFIL DE VELOCIDADE DO GUIAMENTO	46
6	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO	49
6.1	APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS	49
6.1.1	Caso 1 - Subida a nível do mar.	50
6.1.2	Caso 2 - Subida com velocidade translacional u nula a nível do mar.	52
6.1.3	Caso 3 - Curva com velocidade translacional u , altitude e ângulo de guinada constantes.	54
6.1.4	Caso 4 - Compensação de taxa de variação do ângulo de guinada com velocidade translacional u e altitude constantes.	56
6.1.5	Caso 5 - Seguimento de trajetória vaivém a partir do rastreo de pontos de passagem.	58

6.1.6	Caso 6 - Seguimento de trajetória circular a partir do rastreo de pontos de passagem.	61
6.2	DISCUSSÃO	64
7	CONCLUSÃO E SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS.....	65
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	67
	APÊNDICE A – REPRESENTAÇÕES DE ATITUDE - ÂNGULOS DE EULER E MATRIZ DOS COSENOS DIRETORES	69
	APÊNDICE B – COEFICIENTES AERODINÂMICOS	72
	APÊNDICE C – DEDUÇÃO DO VETOR DE FORÇAS E MOMENTOS PROPULSIVOS	74
	APÊNDICE D – MATRIZ DE MASSAS E INÉRCIAS VIRTUAIS.....	76

1 INTRODUÇÃO

1.1 MOTIVAÇÃO

Nos últimos anos, aeronaves mais leves que o ar estão novamente recebendo o interesse da comunidade aeroespacial ao redor do mundo. O maior enfoque em tecnologias sustentáveis que buscam, entre outras questões, reduzir as emissões de gases na atmosfera, bem como os desenvolvimentos em materiais, propulsão, painéis solares, sistemas de comunicação *Wireless* e armazenamento de energia (STOCKBRIDGE; ALESSANDRO; MARZOCCA, 2012) podem contribuir para restaurar a essa classe de veículos a importância que tinham no início do século XX. Parte desse interesse renovado está atrelada também ao desenvolvimento pujante das tecnologias de voo autônomo não tripulado, que tem os diversos tipos de “drones” como maiores expoentes. Tendo em vista essa realidade, justifica-se o desenvolvimento de um trabalho orientado ao projeto de um dirigível remotamente pilotado.

Com relação às aplicações dos dirigíveis, elas são diversas e na sua maior parte voltadas ao uso civil. Recentemente, uma ampla gama de aplicações foi proposta para dirigíveis modernos em campos comerciais, científicos e militares, como publicidade e turismo, vigilância, monitoramento ambiental, exploração planetária, transporte de cargas pesadas, observação estratosférica e telecomunicações (LI; NAHON; SHARF, 2011).

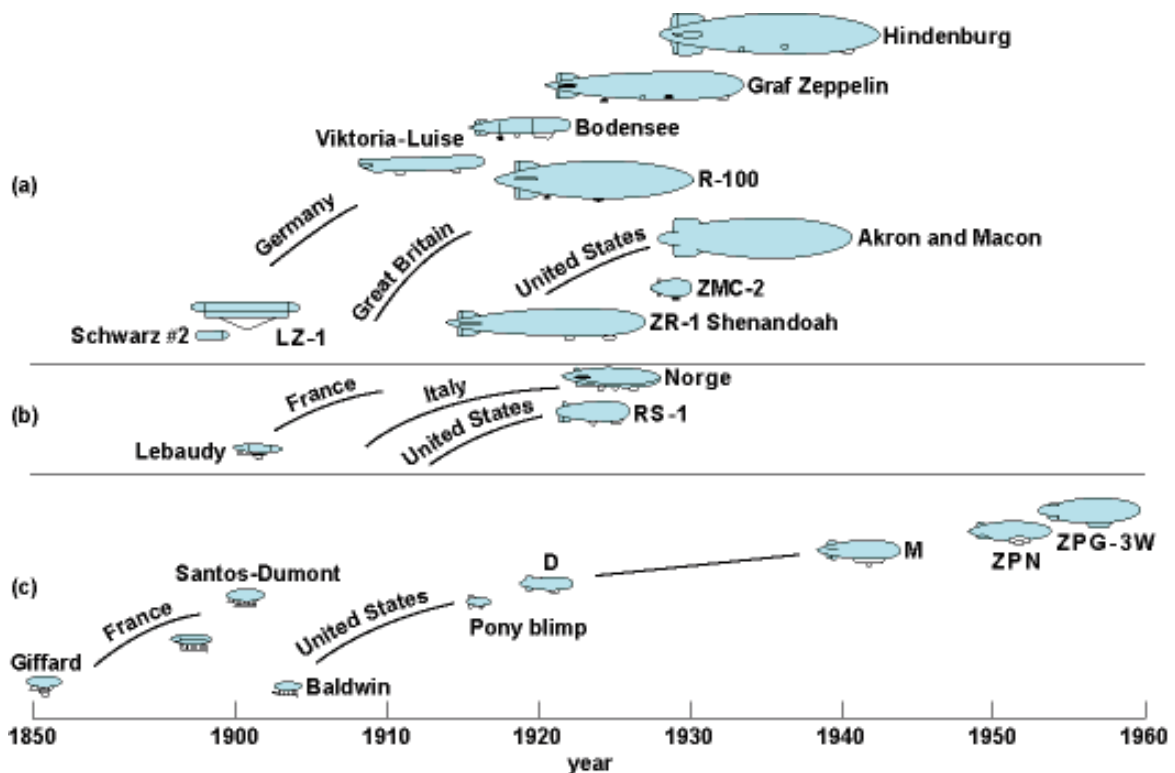
Essas aeronaves se destacam, principalmente, em situações que exigem alta estabilidade, autonomia e baixo custo (KHOURY; GILLET, 1999), nessa linha, as baixas velocidades de operação dos dirigíveis, associadas às vantagens citadas, tornam-os uma excelente plataforma para filmagem aérea, por exemplo. Ao ser equipado com uma câmera de alta definição, um dirigível pode filmar uma área a partir diversos pontos de vista durante várias horas e com ótimo custo-benefício, seja em um evento em ambiente interno, como casamentos ou festas de formatura, ou externo como feiras e desfiles. Entretanto, para que essa operação seja possível, é necessário um sistema de controle confiável que permita que a aeronave faça voos suaves e que as perturbações atreladas ao deslocamento aéreo não sejam percebidas nas imagens.

Tratando especificamente de operações *indoor*, dirigíveis são capazes de navegar com segurança e com baixo ruído em ambientes tridimensionais e seu baixo consumo de energia os torna adequados para tarefas operacionais de longo prazo (MÜLLER, 2013). É observando essas possibilidades que se propõe o presente trabalho.

1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A pesquisa acerca de dirigíveis é tão antiga quanto o estudo das ciências aeronáuticas, conforme a Figura 1.1, ao fim do século retrasado já existiam dirigíveis sendo operados. Nos últimos anos, uma nova leva de trabalhos vem explorando as possibilidades dos dirigíveis para diversas aplicações.

Figura 1.1 – História do desenvolvimento dos dirigíveis. a) Dirigíveis rígidos. (b) Dirigíveis semi-rígidos. c) Dirigíveis não rígidos.



Fonte: (STOCKBRIDGE; ALESSANDRO; MARZOCCA, 2012).

Conforme mostra (LI; NAHON; SHARF, 2011) em sua análise minuciosa do estado da arte do desenvolvimento de dirigíveis, os trabalhos existentes sobre dinâmica de dirigíveis estão espalhados por uma série de periódicos, livros e relatórios técnicos. Esses artigos foram publicados por um período de muitas décadas, testemunhando a ascensão, idade de ouro, declínio e recente ressurgimento dessas aeronaves. Conforme (VALLE, 2014), a maior parte da literatura sobre a dinâmica de dirigíveis iniciou-se a partir da metade da década de 1910, com boa parte dos desenvolvimentos sobre aerodinâmica, massas e inércias aparentes e estrutura dos dirigíveis (Lamb (1918), Tuckerman (1926), IMLAY (1961), Jones e DeLaurier (1983)). Na década de 1990 e nos anos 2000 foram publicados os trabalhos mais influentes até hoje acerca da modelagem e simulação de grandes dirigíveis, como em (GOMES; RAMOS, 1998), (MUELLER; PALUSZEK, 2004), (LI; NAHON, 2007) e (ASHRAF; CHOUDHRY, 2009). Em 1999, Khoury e Gillett editaram a primeira

versão de seu livro, (KHOURY; GILLET, 1999), que é um guia para o desenvolvimento de dirigíveis modernos e possui extrema relevância até os dias de hoje.

No Brasil, trabalhos como (SANTOS, 2008) e (VALLE, 2014) tratam do tema, sendo este uma referência para modelagem e controle de dirigíveis de pequeno porte, apresentando o uso de técnicas de controle moderno nessas plataformas da mesma forma que o realizado por (KULCZYCKI et al., 2008).

Muitos dos desenvolvimentos para submarinos também são aplicáveis em trabalhos sobre dirigíveis, como o material acerca de guiamento desenvolvido por (JENSEN, 2011). Recentemente, configurações não convencionais de dirigíveis estão chamando atenção, conforme (STOCKBRIDGE; ALESSANDRO; MARZOCCA, 2012), e alguns autores como (TUVERI; CERUTI; MARZOCCA, 2014) focam no problema da determinação das massas e inércias virtuais dessas configurações.

Para o trabalho aqui apresentado, busca-se contribuir com a literatura ao desenvolver um estudo sobre a modelagem, simulação e controle a partir de técnicas modernas de um dirigível de pequeno porte para operar em ambientes *indoor*.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo geral

O objetivo geral deste trabalho é modelar e controlar um dirigível de pequeno porte para operação em ambientes internos.

1.3.2 Objetivos específicos

Os objetivos específicos do trabalho são:

- Determinar as características da planta (dirigível) considerando todos os seus atuadores;
- Modelar a planta com a ferramenta Simulink;
- Desenvolver em MATLAB um controle que garanta a estabilidade do dirigível durante a sua operação para cenários variados;
- Simular o controle com a ferramenta Simulink;
- Desenvolver uma lei de guiamento que permita ao dirigível realizar operação autônoma;

- Simular a operação da aeronave com o controle e a lei de guiamento.

1.4 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O presente trabalho está organizado da seguinte maneira:

- já apresentados, a motivação, a revisão bibliográfica e os objetivos do trabalho compõem o Capítulo 1;
- a descrição da planta considerada para o trabalho está apresentada no Capítulo 2;
- a modelagem dinâmica da aeronave em seis graus de liberdade (6-GDL) encontra-se no Capítulo 3, aqui também é tratada a linearização e validação do modelo;
- a solução de controle desenvolvida para o sistema e seus objetivos de performance são apresentados no Capítulo 4;
- o sistema de guiamento está descrito no Capítulo 5.
- os resultados de simulação e discussões atreladas a estes são apresentados no Capítulo 6.
- as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros são apresentados no Capítulo 7;
- finalmente, as referências utilizadas estão no Capítulo 8.

2 DESCRIÇÃO DA PLATAFORMA

A operação de um dirigível *indoor* requer que a aeronave não possua grandes dimensões físicas, seja projetada para manter a condição de flutuação neutra em baixas alturas e possua uma gôndola capaz de receber diversos aviônicos.

Ainda que o projeto conceitual de um dirigível que acate essas especificações não seja um objetivo deste trabalho, o projeto do controle para a operação *indoor* de um dirigível requer que uma planta desse tipo seja modelada. Esta modelagem, por sua vez, depende de certas características como dimensões, inércias, massa, etc.

Sendo assim, optou-se por observar as características do Dirigível Autônomo de Varredura para Desminagem (DAVD), proposto por (VALLE, 2014) para determinação das características da planta utilizada nesse trabalho. Essa decisão ocorre, pois esse dirigível é um modelo base de referência para dirigíveis de pequenas dimensões (VALLE, 2014) e se encaixa nas necessidades previamente comentadas. O DAVD é uma evolução de seu projeto antecessor, denominado Dirigível de Observação e Reconhecimento de Alvos (DORA) e proposto por (SANTOS, 2008). Trata-se de uma aeronave de três propulsores fixos com um envelope duplo elipsoide fabricado em Poliuretano, apropriado para o gás Hélio, que tem por dimensões: 6,70 m de comprimento, 2,24 m de diâmetro e 17,54 m³ de volume. Sua gôndola é fabricada em material plástico e possui leiaute aerodinâmico e a aeronave é capaz de produzir um empuxo líquido de aproximadamente 200 N. Os aviônicos principais do DAVD são: sonar para medição de baixa altimetria, barômetro eletrônico, GPS, Unidade de Medida Inercial (UMI) e magnetômetro de três eixos. A plataforma consta, ainda, de um microcontrolador dSPIC 16-Bits, sendo dedicado aos sistemas de controle, guiamento e varredura de terreno (piloto automático) (VALLE, 2014). A gôndola da aeronave com os três propulsores e o envelope do DAVD podem ser observados na Figura 2.1 abaixo.

Figura 2.1 – Gôndola e envelope do DAVD.



Fonte: Adaptador de (VALLE, 2014).

De um modo geral, as características escolhidas para a planta utilizada nesse trabalho seguem as informações contidas em (VALLE, 2014) acerca do DAVD. Entretanto,

não estão disponíveis no trabalho citado os valores para a posição dos propulsores, nem os dados da corda na máxima espessura e máxima espessura da lâmina do estabilizador, de modo que, não é possível calcular o coeficiente de arrasto de incidência zero do estabilizador (C_{Df0}) de maneira convencional. Sendo assim, para a posição dos motores no trabalho aqui proposto, foram consideradas distâncias inferidas a partir das imagens do DAVD e suas dimensões físicas conhecidas. Para o coeficiente aerodinâmico comentado, optou-se por assumir o valor dado para o dirigível de (MUELLER; PALUSZEK, 2004). Uma rápida consulta na literatura mostra que a magnitude desse coeficiente não sofre grandes variações entre configurações tradicionais de dirigíveis. Corrobora para essa escolha o fato do dirigível dado em (MUELLER; PALUSZEK, 2004) possuir um envelope duplo elipsoide, assim como o DAVD, e a mesma configuração de estabilizadores deste. Resumindo, todas as características físicas do dirigível utilizado neste trabalho estão de acordo com as do DAVD, exceto a posição dos motores e coeficiente de arrasto de incidência zero do estabilizador por motivo de estas não estarem disponíveis no momento da escrita deste trabalho.

3 MODELAGEM DINÂMICA DO DIRIGÍVEL

3.1 CONSIDERAÇÕES GERAIS PARA A MODELAGEM

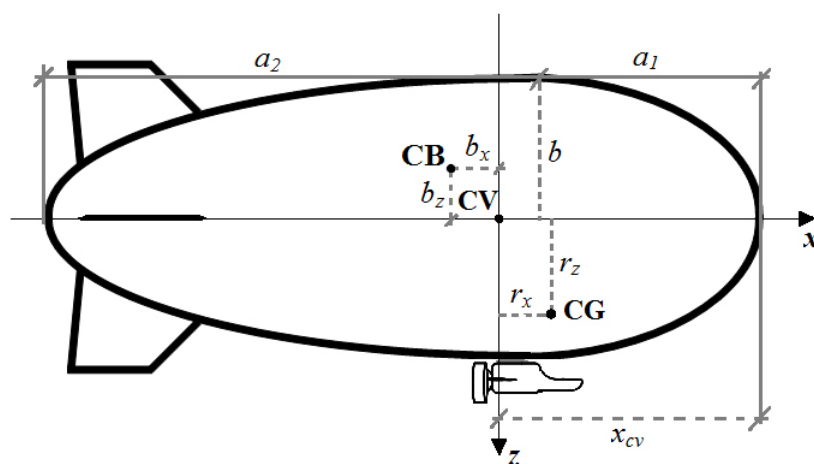
A aeronave é dotada de dois propulsores iguais, sem vetorização e operação com acionamento diferencial constituídos de um motor elétrico dotado de hélice. Ambos estão orientados na direção do eixo longitudinal da aeronave com distância de um metro entre eles e de 1.12 metro no eixo vertical.

O dirigível ainda conta com um terceiro motor igual aos propulsores anteriores, mas apontado para baixo, alinhado aos demais, sendo estes os atuadores da aeronave.

As entradas de controle, em malha aberta, consistem nas trações dos propulsores. Os propulsores podem produzir uma tração de 15,2 N no sentido avante e 13,2 N no sentido reverso. A modelagem dos atuadores de propulsão pode ser feita assumindo um conjunto de motor elétrico DC-Brushless, controlador de velocidade eletrônico (ESC, do inglês *Electronic Speed Controller*) reversível, rotor (hélice de 13x8) e alimentação por bateria de Polímero de Lítio (LiPo) (VALLE, 2014), para este trabalho, os atuadores foram modelados com batentes de tração e termos de primeira ordem representando um atraso na sua resposta.

A Figura 3.1, sem escala, indica algumas dimensões gerais do dirigível.

Figura 3.1 – Dimensões principais do dirigível e pontos de interesse



Fonte: (VALLE, 2014)

Onde C.B, C.G e C.V representam o Centro de Empuxo, Centro de Gravidade e Centro de Volume, respectivamente e as demais dimensões são definidas abaixo.

A Tabela 3.1 indica as dimensões físicas principais do dirigível, bem como suas

características de massa e inércia segundo (VALLE, 2014).

Tabela 3.1 – Dimensões principais do dirigível

Parâmetro	Descrição [Unidade]	Valor
a_1	Semieixo longitudinal menor do envelope [m]	2,17
a_2	Semi eixo longitudinal maior do envelope [m]	4,53
b	Raio máximo do envelope [m]	1,12
r_x	Componente do centro de gravidade em x [m]	0,18
r_z	Componente do centro de gravidade em z [m]	0,74
b_x	Componente do centro de empuxo em x [m]	-0.165
b_z	Componente do centro de empuxo em z [m]	0,00
m	Massa total do dirigível [kg]	21,49
I_x	Momentos de inércia referente ao eixo x [$kg.m^2$]	25,26
I_y	Momentos de inércia referente ao eixo y [$kg.m^2$]	50,29
I_z	Momentos de inércia referente ao eixo z [$kg.m^2$]	31,33
I_{xz}	Produto de inércia referente ao Oy [$kg.m^2$]	0,16

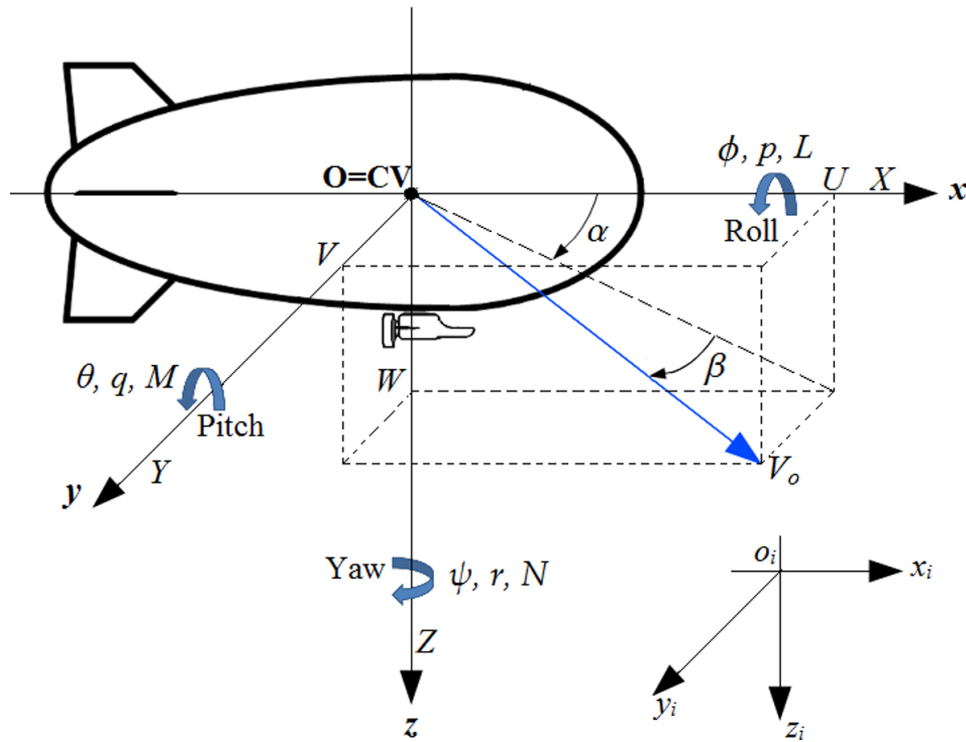
Fonte: Autor.

O envelope da aeronave é aproximado como um duplo elipsoide com quatro estabilizadores dispostos em cruz na parte traseira. Cada estabilizador tem uma área de $0,3 m^2$ (VALLE, 2014). As densidades consideradas são, para o gás Hélio, de $\rho_{He} = 0.1786 kg/m^3$ e de $\rho_{ar} = 1.2250 kg/m^3$, para o ar. Como a aeronave é simétrica em relação ao plano Oxz , então se assume que $I_{xy} = I_{yz} = 0$ (VALLE, 2014), (GOMES; RAMOS, 1998).

3.1.1 Sistemas de referência

A Figura 3.2 apresenta o sistema de eixos de referência adotado. Trata-se de um sistema ortogonal fixo na aeronave com a origem (O) centrada no seu Centro de Volume ($C.V$). O eixo x coincide com o eixo de simetria do envelope do dirigível apontando para o nariz, o eixo y é perpendicular ao plano de simetria Oxz e o eixo z completa o sistema ortogonal de mão direita sendo perpendicular aos demais dois eixos. A configuração é chamada de sistema de referência do corpo (SR_C), onde u, v, w são os componentes translacionais da velocidade total V_o , enquanto p, q, r são as velocidades angulares e ϕ, θ, ψ , são os ângulos de Euler (Apêndice A). O sistema de referência inercial $o_i x_i y_i z_i$, usualmente denominado NED, é também mostrado, com as direções Norte (*North*) ($o_i x_i$), Leste (*East*) ($o_i y_i$) e para baixo (*Down*) ($o_i z_i$).

Figura 3.2 – Sistemas de referência



Fonte: (VALLE, 2014)

Normalmente posiciona-se o SRC sobre o Centro de Gravidade (C.G) da aeronave, para o caso dos dirigíveis, ele é posicionado sobre o C.V, pois esse é mais adequado para a inclusão, nas equações de movimento, das massas e momentos de inércia adicionais, tratadas na seção 3.2.

As somas totais das forças nos eixos x , y , z são, respectivamente, X , Y , Z , enquanto L , M , N são os componentes totais de momento naqueles eixos (VALLE, 2014). Adicionalmente, são mostrados o ângulo de ataque (α) e o ângulo de derrapagem lateral (β). A velocidade total da aeronave é dada, então, por (KHOURY; GILLET, 1999):

$$V_o = \sqrt{(u^2 + v^2 + w^2)} \quad (3.1)$$

onde, no equilíbrio, $V_o = V_e = \sqrt{(u_e^2 + v_e^2 + w_e^2)}$.

3.2 MODELO NÃO LINEAR

Assumindo a abordagem de Newton-Euler para um corpo rígido, determina-se o modelo não linear em 6 graus de liberdade (*g.d.l.*). São feitas as seguintes hipóteses:

- O envelope do dirigível é tomado como um duplo elipsoide, cuja coordenada do C.V

é dada por:

$$x_{cv} = a_1 + \frac{3}{8}(a_2 - a_1) \quad (3.2)$$

medido do nariz do dirigível para trás;

- O movimento do *SRC* é estudado com base em uma condição de voo inicial em equilíbrio (KHOURY; GILLET, 1999);
- A aeronave é um corpo rígido. Os efeitos aeroelásticos são desprezados (GOMES; RAMOS, 1998);
- A massa do corpo rígido permanece constante e o voo ocorre em baixas altitudes, tornando insignificantes as variações da densidade atmosférica (VALLE, 2014);
- O dirigível em movimento desloca uma massa de ar de magnitude similar a da massa do próprio veículo (MUELLER; PALUSZEK, 2004), logo os termos virtuais de massa e inércia não são desprezíveis e devem ser considerados na matriz de massas e inércias do sistema.

3.2.1 Forma Geral da Equação do Sistema

Como comentado na seção anterior, para determinação do modelo não linear para o dirigível, é necessário considerar na equação geral do sistema, inércias e massas adicionais, normalmente desprezíveis no trato com aeronaves tradicionais. Sendo assim, a forma mais genérica do sistema de equações dinâmicas de um dirigível rígido em 6 *g.d.l* expressa na forma matricial, de acordo com (LI; NAHON, 2007) e (VALLE, 2014) é:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m\mathbf{E} + \mathbf{M}_{11} & -m\mathbf{r}_G^\times + \mathbf{M}_{12} \\ m\mathbf{r}_G^\times + \mathbf{M}_{21} & \mathbf{I}_o + \mathbf{M}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{V}}_o \\ \dot{\boldsymbol{\omega}} \end{bmatrix} + \boldsymbol{\tau}_I + \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{aV} \\ \mathbf{M}_{a\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_o \\ \boldsymbol{\tau}_o \end{bmatrix}; \\ & \boldsymbol{\tau}_I = \begin{bmatrix} m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_o + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_G)) \\ \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_o \boldsymbol{\omega}) + m\mathbf{r}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}_o) \end{bmatrix}; \\ & \begin{bmatrix} \mathbf{F}_{aV} \\ \mathbf{M}_{a\omega} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_{11} \mathbf{V}_o + \mathbf{M}_{12} \boldsymbol{\omega}) \\ \mathbf{V}_o \times (\mathbf{M}_{11} \mathbf{V}_o + \mathbf{M}_{12} \boldsymbol{\omega}) + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{M}_{21} \mathbf{V}_o + \mathbf{M}_{22} \boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Sendo \mathbf{V}_o e $\boldsymbol{\omega}$ as velocidades lineares e angulares do movimento do dirigível expressas no SRC e medidas em relação ao SRI, dadas por:

$$\mathbf{V}_o = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}; \boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}; \quad (3.4)$$

m a massa total do dirigível, \mathbf{I}_o a sua matriz de inércia expressa no *SRC*, dada por:

$$\mathbf{I}_o = \begin{bmatrix} I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_y & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_z \end{bmatrix}; \quad (3.5)$$

\mathbf{M}_{ij} as matrizes componentes menores de massas e inércias adicionais definidas na sequência, \mathbf{E} a matriz identidade e \mathbf{F}_o a representação das componentes X , Y , Z de todas as forças resultantes nos eixos x , y , z , incluindo aerodinâmicas, peso, empuxo e forças propulsivas. Da mesma forma, τ_o corresponde ao momento resultante no sistema decomposto nas componentes L , M e N . Ainda, τ_i é o termo de forças e momentos inerciais e F_{aV} e $M_{a\omega}$ são, respectivamente, os termos de força e momento relacionados ao acoplamento das velocidades linear e angular em função das massas e inércias virtuais, conforme descrito em (LI; NAHON, 2007). A posição do *C.G.*, no *SRC*, é dada por:

$$\mathbf{r}_G = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{bmatrix}. \quad (3.6)$$

De modo que a matriz antissimétrica de \mathbf{r}_G é dada por:

$$\mathbf{r}_G^\times = \begin{bmatrix} 0 & -r_z & r_y \\ r_z & 0 & -r_x \\ -r_y & r_x & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.7)$$

3.2.2 Massas e momentos de inércia adicionais do sistema

Por se tratar de um veículo mais leve que o ar, o dirigível desloca um volume muito grande e suas propriedades virtuais (adicionadas) de massa e inércia se tornam significativas, ou seja, ele se comporta como se tivesse uma massa e momentos de inércia substancialmente maiores do que aqueles indicados por métodos físicos convencionais (GOMES; RAMOS, 1998). Portanto, devido a relação de massa por volume próxima da do fluido em que o veículo escoa, as massas e inércias adicionais não são desprezíveis

Sendo \mathbf{M}_a a matriz de massas e inércias virtuais, deduzida no Apêndice D, da forma:

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} M_{11}^{3 \times 3} & M_{12}^{3 \times 3} \\ M_{21}^{3 \times 3} & M_{22}^{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad (3.8)$$

Temos que a matriz de massa efetiva do sistema é dada por:

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_o + \mathbf{M}_a \quad (3.9)$$

onde \mathbf{M}_o é a matriz de massa da aeronave:

$$\mathbf{M}_o = \begin{bmatrix} m & 0 & 0 & 0 & mr_z & -mr_y \\ 0 & m & 0 & -mr_z & 0 & mr_x \\ 0 & 0 & m & mr_y & -mr_x & 0 \\ 0 & -mr_z & mr_y & I_x & -I_{xy} & -I_{xz} \\ mr_z & 0 & -mr_x & -I_{xy} & I_y & -I_{yx} \\ -mr_y & mr_x & 0 & -I_{xz} & -I_{yx} & I_z \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

A matriz de massa e inércia adicionadas é função da forma do veículo (MUELLER; PALUSZEK, 2004) e, na prática, alguns termos podem ser desconsiderados, enquanto outros termos podem ser estimados a partir dos fatores de inércia do veículo (ASHRAF; CHOUDHRY, 2009). Estas estimativas foram desenvolvidas inicialmente por (LAMB, 1918), com o tabelamento dos fatores de inércia para formas elipsoides em movimento em um fluido e expandidas por (TUCKERMAN, 1926) com integrais para formas elipsoides genéricas. Neste trabalho, utilizar-se-ão os fatores apresentados por (VALLE, 2014) e derivados por (MUELLER; PALUSZEK, 2004) para o formato do envelope duplo elipsoide e os termos virtuais fora da diagonal principal serão desprezados, conforme proposto por (ASHRAF; CHOUDHRY, 2009). Ainda, lembra-se que a coordenada em y do centro de gravidade do dirigível é nula e o dirigível é simétrico com relação ao plano Oxz . Dessa forma:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m + m_{11} & 0 & 0 & 0 & mr_z & 0 \\ & m + m_{22} & 0 & -mr_z & 0 & mr_x \\ 0 & 0 & m + m_{33} & 0 & -mr_x & 0 \\ 0 & -mr_z & 0 & I_x + m_{44} & 0 & -I_{xz} \\ mr_z & 0 & -mr_x & 0 & I_y + m_{55} & 0 \\ 0 & mr_x & 0 & -I_{xz} & 0 & I_z + m_{66} \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

Os termos m_{ij} , são:

$$m_{11} = V_h \rho_{ar} k_1; \quad (3.12)$$

$$m_{22} = m_{33} = V_h \rho_{ar} k_2; \quad (3.13)$$

$$m_{44} = 0; \quad (3.14)$$

$$m_{55} = m_{66} = V_h \rho_{ar} k_3. \quad (3.15)$$

Onde V_h é o volume do duplo elipsoide:

$$V_h = \frac{2}{3} \pi (a_1 + a_2) b^2, \quad (3.16)$$

e os coeficientes de inércia são

$$k_1 = \frac{b^2 \log \left(\frac{2a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) - b^2}{b^2} \right) - 2b^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}}{2a^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - b^2 \log \left(\frac{2a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) - b^2}{b^2} \right)}; \quad (3.17)$$

$$k_2 = \frac{2a^2 \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - b^2 \log \left(\frac{2a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) - b^2}{b^2} \right)}{2(a^2 - 2b^2) \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + b^2 \log \left(\frac{2a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) - b^2}{b^2} \right)}; \quad (3.18)$$

$$k_3 = \frac{(a-b)(a+b) \left(2(a^2 + 2b^2) \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} - 3b^2 \log \left(\frac{2a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) - b^2}{b^2} \right) \right)}{5(a^2 + b^2) \left(2\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} (2a^4 + a^2(1 - 4b^2) + 2(b^4 + b^2)) - 3b^2 \log \left(\frac{2a^2 \left(\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} + 1 \right) - b^2}{b^2} \right) \right)}. \quad (3.19)$$

Em que a é o valor médio dos semieixos a_1 e a_2 .

3.2.3 Vetor de forças dinâmicas

O vetor de forças que contém os termos de forças e momentos centrífugos e de Coriolis, dependentes das velocidades lineares e angulares do modelo, pode ser derivado da Equação 3.3 ao transferir para o lado direito da igualdade os termos τ_i , F_{aV} e $M_{a\omega}$ e

simplificá-los. Esse vetor tem forma:

$$F_d = [f_1 \ f_2 \ f_3 \ f_4 \ f_5 \ f_6]^T. \quad (3.20)$$

Onde as componentes f_i são, na sua forma geral, dadas por:

$$f_1 = -m_z qw + m_y rv + m(r_x(q^2 + r^2) - r_z rp - r_y pq) - m_{35}q^2 + m_{26}r^2 + m_{24}rp; \quad (3.21)$$

$$f_2 = -m_x ru + m_z pw + (m_{35} - mr_x)pq + mr_y(p^2 + r^2) - mr_z rq - m_{15}qr; \quad (3.22)$$

$$f_3 = -m_y pv + m_x qu + m(-r_x rp + r_z(q^2 + r^2) - r_y rq - m_{26}rp + m_{15}q^2 - m_{24}p^2); \quad (3.23)$$

$$f_4 = -(J_z - J_y)qr + J_{xz}pq + mr_z(ru - pw) - J_{xy}rp - J_{yz}(r^2 - q^2) - mr_y(pv - qu) + (m_{53} - m_{26})rw - (m_{35} - m_{62})qv + (m_{22} - m_{33})vw - m_{24}pw + m_{51}ru; \quad (3.24)$$

$$f_5 = -(J_x - J_z)rp + J_{xz}(r^2 + p^2) + m(r_x(pv - qu) - r_z(qw - rv)) + J_{xy}rq - J_{yz}pq + (m_{32} - m_{11})uw + m_{35}qu - m_{15}qw + m_{62}pv - m_{42}rv; \quad (3.25)$$

$$f_6 = -(J_y - J_x)pq - J_{xz}qr + m(-r_x(ru - pw)) - J_{xy}(q^2 - p^2) + mr_y(qw - rv) - m_{53}pw + (m_{11} - m_{22})uv - (m_{24} + m_{51})pu - m_{26}ru + (m_{15} + m_{42})qv. \quad (3.26)$$

Onde m_x , m_y , m_z , J_x , J_y e J_z são os termos da diagonal principal da matriz M e J_{xz} é igual a I_{xz} . Observando as simplificações decorrentes da simetria do veículo, podemos escrever os termos dinâmicos como segue:

$$f_1 = -m_z qw + m_y rv + m(r_x(q^2 + r^2) - r_z rp); \quad (3.27)$$

$$f_2 = -m_x ru + m_z pw - mr_x pq - mr_z rq; \quad (3.28)$$

$$f_3 = -m_y pv + m_x qu + m(-r_x rp + r_z(q^2 + r^2)); \quad (3.29)$$

$$f_4 = -(J_z - J_y)qr + J_{xz}pq + mr_z(ru - pw); \quad (3.30)$$

$$f_5 = -(J_x - J_z)rp + J_{xz}(r^2 + p^2) + m(r_x(pv - qu) - r_z(qw - rv)) + J_{xy}rq - m_{11}uw; \quad (3.31)$$

$$f_6 = -(J_y - J_x)pq - J_{xz}qr + m(-r_x(ru - pw)) + (m_{11} - m_{22})uv. \quad (3.32)$$

3.2.4 Forças e momentos aerodinâmicos

O vetor de forças que contém os termos aerodinâmicos pode ser escrito da seguinte forma:

$$F_a = \frac{1}{2} \rho_{ar} V_o^2 [f_{a1} \ f_{a2} \ f_{a3} \ f_{a4} \ f_{a5} \ f_{a6}]^T. \quad (3.33)$$

Onde V_o é a norma do vetor velocidade dada na subseção 3.1.1 e f_{ai} são os termos aerodinâmicos proporcionais a coeficientes adimensionais. Esses termos também dependem dos ângulos de ataque e derrapagem. Para a configuração de dirigível utilizada nesse trabalho, tem-se, segundo (VALLE, 2014), que:

$$f_{a1} = C_{X1} \cos^2 \alpha \cos^2 \beta + C_{X2} \sin 2\alpha \sin \frac{\alpha}{2}; \quad (3.34)$$

$$f_{a2} = C_{Y1} \cos \frac{\beta}{2} \sin 2\beta + C_{Y2} \sin 2\beta + C_{Y3} \sin \beta \sin |\beta|; \quad (3.35)$$

$$f_{a3} = C_{Z1} \cos \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha + C_{Z2} \sin 2\alpha + C_{Z3} \sin \alpha \sin |\alpha|; \quad (3.36)$$

$$f_{a4} = C_{L2} \sin \beta \sin |\beta|; \quad (3.37)$$

$$f_{a5} = C_{M1} \cos \frac{\alpha}{2} \sin 2\alpha + C_{M2} \sin 2\alpha + C_{M3} \sin \alpha \sin |\alpha|; \quad (3.38)$$

$$f_{a6} = C_{N1} \cos \frac{\beta}{2} \sin 2\beta + C_{N2} \sin 2\beta + C_{N3} \sin \beta \sin |\beta|. \quad (3.39)$$

Onde os ângulos de ataque e derrapagem são dados por:

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{w}{u}; \quad (3.40)$$

$$\beta = \sin^{-1} \frac{v}{V_o}. \quad (3.41)$$

Os coeficientes adimensionais C_i , podem ser obtidos a partir um dos seguintes métodos (GOMES; RAMOS, 1998):

- medição direta em um túnel de vento;
- pelas características geométricas do veículo;
- a partir de derivadas de estabilidade aerodinâmicas.

Para o caso estudado aqui, esses coeficientes foram determinados pelas características geométricas do veículo a partir do procedimento descrito em (JONES; DELAURIER, 1983) e (LI; NAHON, 2007) e realizado para o envelope do duplo elipsoide por (MUELLER; PALUSZEK, 2004).

Com relação as equações para os termos aerodinâmicos, estas podem ser expandidas para diferentes configurações de estabilizadores, como em (ASHRAF; CHOUDHRY, 2009), (ASHRAF; CHOUDHRY, 2013) e (MUELLER; PALUSZEK, 2004).

A descrição dos componentes C_i pode ser encontrada no Apêndice B.

3.2.5 Forças e momentos de peso e empuxo

O vetor de forças e momentos de peso e empuxo deve ser calculado no SRC. Dessa forma, é necessário que as forças expressas no sistema inercial sejam transformadas utilizando a matriz de cossenos diretores (DCM , acrônimo do inglês *Direction Cossine Matrix*). Sendo F_G o vetor de forças e momentos de peso e empuxo dado por

$$F_G = \begin{bmatrix} F_g \\ M_g \end{bmatrix}. \quad (3.42)$$

onde F_g é o vetor de forças no SRC e M_g o vetor de momentos, dados por:

$$F_g = DCM \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ (mg - \rho_{ar} V_h g) \end{bmatrix}. \quad (3.43)$$

$$M_g = \vec{r}_G \times (DCM m \vec{g}) + \vec{r}_B \times (DCM \rho_{ar} V_h \vec{g}) \quad (3.44)$$

Em que \vec{r}_G e \vec{r}_B são os vetores posição no SRC do centro de gravidade e do centro de empuxo, respectivamente. E a posição do C.B, no SRC, é dada por:

$$\mathbf{r}_b = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}. \quad (3.45)$$

Assim, na forma explícita, o vetor de forças e momentos de peso e empuxo é:

$$F_G = \begin{bmatrix} -\sin \theta (mg - \rho_{ar} V_h g) \\ \sin \phi \cos \theta (mg - \rho_{ar} V_h g) \\ \cos \phi \cos \theta (mg - \rho_{ar} V_h g) \\ -\sin \phi \cos \theta (mgr_z - \rho_{ar} V_h g b_z) \\ -\sin \theta (mgr_z - \rho_{ar} V_h g b_z) - \cos \phi \cos \theta (mgr_x - \rho_{ar} V_h g b_x) \\ \sin \phi \cos \theta (mgr_x - \rho_{ar} V_h g b_x) \end{bmatrix}. \quad (3.46)$$

3.2.6 Forças e momentos de propulsão

O vetor contendo os termos associados às forças e momentos propulsivos é dado por:

$$F_P = \begin{bmatrix} X_P & Y_P & Z_P & L_P & M_P & N_P \end{bmatrix}^T. \quad (3.47)$$

Onde as componentes X_P , Y_P e Z_P representam a tração total ao longo dos eixos x, y e z do corpo, respectivamente e L_P , M_P e N_P são o momento devido a tração ao redor dos eixos x, y e z do corpo, respectivamente.

Para a configuração de três propulsores sem vetorização, conforme deduzido no Apêndice C, esse vetor pode ser escrito como:

$$F_P = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 \\ 0 \\ -T_3 \\ 0 \\ (T_1 + T_2)d_z - T_3d_x \\ (T_1 - T_2)d_y \end{bmatrix}. \quad (3.48)$$

onde d_x é a distância da posição dos motores laterais no sentido longitudinal, d_y é a metade da distância entre os motores T_1 e T_2 e d_z é a distância entre os motores laterais até o plano xy, conforme (VALLE, 2014).

3.2.7 Equações cinemáticas do sistema

As equações cinemáticas de translação e rotação do sistema no referencial inercial são dadas conforme o exposto em (VALLE, 2014).

Para a cinemática de translação, utiliza-se a inversa da matriz dos cossenos diretores para transformar as velocidades lineares dadas no SRC para o referencial inercial.

$$\begin{bmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \end{bmatrix}^T = DCM^{-1} \begin{bmatrix} u & v & w \end{bmatrix}^T. \quad (3.49)$$

Onde cada componente toma a forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} = & (\cos \psi \cos \theta)u + (\cos \psi \sin \theta \sin \phi - \sin \psi \cos \phi)v + (\cos \psi \sin \theta \cos \phi + \\ & + \sin \psi \sin \phi)w; \end{aligned} \quad (3.50)$$

$$\begin{aligned} \dot{y} = & (\sin \psi \cos \theta)u + (\sin \psi \sin \theta \sin \phi + \cos \psi \cos \phi)v + (\sin \psi \sin \theta \cos \phi - \\ & - \cos \psi \sin \phi)w; \end{aligned} \quad (3.51)$$

$$\dot{H} = -\dot{z} = \sin \theta u - (\cos \theta \sin \phi)v - (\cos \theta \cos \phi)w. \quad (3.52)$$

Onde, novamente, os ângulos ϕ , θ , ψ , são os ângulos de Euler discutidos no Apêndice A chamados, respectivamente, de ângulo de rolamento, ângulo de arfagem e ângulo de guinada.

Essas velocidades são especialmente importantes, pois, ao integrá-las, temos as posições lineares da aeronave utilizadas tanto no sistema de controle quanto na lei de guiamento. Em seguida, relaciona-se as taxas angulares da atitude do sistema no referencial inercial com as velocidades angulares no SRC. Como

$$p = -\dot{\phi} - \dot{\psi} \sin \theta; \quad (3.53)$$

$$q = \dot{\theta} \cos \phi + \dot{\psi} \sin \phi \cos \theta; \quad (3.54)$$

$$r = \dot{\psi} \cos \phi \cos \theta - \dot{\theta} \sin \phi; \quad (3.55)$$

pode-se definir uma matriz de transformação angular, conforme mostrado no Apêndice A,

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}, \quad (3.56)$$

cujas inversa permite calcular as taxas angulares de atitude no referencial inercial, como mostrado a seguir:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \Delta^{-1} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (3.57)$$

3.2.8 Equações do sistema dinâmico com 6-GDL na forma de espaço de estados

As equações dinâmicas do sistema em 6 graus de liberdade podem ser escritas no espaço de estados como proposto em (KULCZYCKI et al., 2008). A partir dessa representação, é possível fazer a implementação computacional do sistema com os vetores de forças e momentos e a matriz de massa apresentados nas seções anteriores.

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \\ \dot{w} \\ \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \\ L \\ M \\ N \end{bmatrix} = M^{-1}(F_d + F_a + F_G + F_P). \quad (3.58)$$

Assim, define-se o vetor de estados do sistema como sendo as variáveis dinâmicas longitudinais e látero-direcionais acrescidas do ângulo de guinada ψ e das posições x_0 e y_0 da aeronave. Essas variáveis adicionais serão utilizadas posteriormente no sistema de guiamento.

$$x = [u \ v \ w \ p \ q \ r \ \phi \ \theta \ \psi \ H \ x_0 \ y_0]^T. \quad (3.59)$$

3.3 LINEARIZAÇÃO DO SISTEMA E ANÁLISE COMPARATIVA DO MODELO

A linearização do sistema foi realizada conforme o proposto em (STEVENS; LEWIS, 2003), onde um sistema na forma:

$$\dot{X} = f(X, U); \quad (3.60)$$

em que X é o vetor de estados e U o vetor de controle, é linearizado através da expansão em séries de Taylor ao redor de um ponto de equilíbrio $f(X_e, U_e)$, com apenas as derivadas de primeira ordem, na forma:

$$\dot{X} = f(X_e, U_e) + \frac{\partial f}{\partial X} \delta X + \frac{\partial f}{\partial U} \delta U; \quad (3.61)$$

ou, de modo mais genérico

$$\dot{x} = \mathbf{A}x + \mathbf{B}u. \quad (3.62)$$

A equação 3.62 é válida desde que a equação 3.65, exposta abaixo, seja satisfeita.

Para a primeira forma, $\frac{\partial f}{\partial X}$ são as derivadas parciais de primeira ordem da função que formam as matrizes Jacobianas e as perturbações são definidas como

$$x = \delta X = X - X_e; \quad (3.63)$$

$$u = \delta U = U - U_e. \quad (3.64)$$

E o ponto de equilíbrio é encontrado por

$$\dot{X} = f(X_e, U_e) = 0; \quad (3.65)$$

Já na forma genérica, x e u representam as perturbações em torno do ponto de equilíbrio e encontram-se as matrizes A e B assumindo um valor pequeno para ϵ e fa-

zendo:

$$A_i = \frac{f(X_e + n_1\epsilon, U_e) - f(X_e - n_1\epsilon, U_e)}{2\epsilon}; \quad (3.66)$$

$$B_i = \frac{f(X_e, U_e + n_2\epsilon) - f(X_e, U_e - n_2\epsilon)}{2\epsilon}. \quad (3.67)$$

Em que A_i e B_i são a i -ésima coluna de A e B, respectivamente. n_1 e n_2 são vetores coluna de elementos unitários com o número de linhas iguais ao número de estados e de controles do sistema, respectivamente. Para o caso apresentado nesse trabalho, definiu-se um valor de ϵ de 0,000001 para um sistema com 12 estados e 3 controles. O ponto de equilíbrio foi calculado para voo a nível do mar com uma velocidade $u = 0.5 \frac{m}{s}$ sem perturbações adicionais.

3.3.1 Dinâmica longitudinal linearizada

Segundo (KULCZYCKI et al., 2008), é possível fazer o desacoplamento dos sistemas dinâmicos em dois, isto é, o sistema longitudinal e o látero-direcional. Dessa forma, o vetor de estados considerado para a dinâmica longitudinal foi $x = [u \ w \ q \ \theta]^T$. A partir do procedimento apresentado na Seção 3.3 foram determinadas as matrizes linearizadas da dinâmica longitudinal do sistema para o dirigível de referência:

$$A_{long} = \begin{bmatrix} -0.0137 & 0.0675 & 0.0275 & 2.5194 \\ 0.0010 & -0.0340 & 0.3089 & -0.3769 \\ 0.0056 & -0.1029 & -0.0198 & -3.7780 \\ 0 & 1.0000 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

$$B_{long} = \begin{bmatrix} 0.0341 & 0.0341 & 0.0042 \\ 0.0011 & 0.0011 & -0.0264 \\ 0.0111 & 0.0111 & -0.0064 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.69)$$

3.3.2 Dinâmica látero-direcional linearizada

Para a dinâmica látero-direcional, foram considerados os estados $x = [v \ p \ r \ \phi]^T$, as matrizes A e B dessa dinâmica, calculadas para o dirigível de referência, são:

$$A_{lat} = \begin{bmatrix} -0.0476 & -0.0090 & -0.2413 & -3.4943 \\ -0.0291 & 0 & 0.1626 & -8.3719 \\ 0.1291 & 0 & -0.0292 & 0.4567 \\ 0 & 1.0000 & -0.0180 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

$$B_{lat} = \begin{bmatrix} -0.0040 & 0.0040 & 0 \\ -0.0023 & 0.0023 & 0 \\ 0.0305 & -0.0305 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.71)$$

3.3.3 Análise comparativa do modelo

Conforme dito no Capítulo 2, as características gerais da planta escolhida como base para desenvolvimento deste trabalho são similares, mas não exatamente iguais às do dirigível proposto por (VALLE, 2014). Desse modo, a análise dos autovalores da matriz A linearizada do sistema permite que seja feita uma comparação do comportamento dinâmico do modelo obtido com os resultados de (VALLE, 2014). Minimamente, os sistemas devem ter o mesmo comportamento dinâmico, isto é, mesmo número de autovalores reais e complexos e sinais iguais entre autovalores correspondentes.

As condições para a linearização diferem em algum grau entre este trabalho e (VALLE, 2014) devido ao ponto de equilíbrio calculado. A variação na condição de equilíbrio calculada ocorre pela diferença na velocidade de equilíbrio desejada, $0,5 \frac{m}{s}$ para esse trabalho e $1 \frac{m}{s}$ naquele. Essa escolha de velocidades de equilíbrio diferentes decorre da operação desejada para cada aeronave. Ainda, conforme explicado no Capítulo 2, o posicionamento dos motores e o coeficiente aerodinâmico (C_{Df0}), descrito no Apêndice B, não são os mesmos em ambos os trabalhos.

Especificamente, foram calculados valores diferentes para ângulo de arfagem (θ) e tração nos motores. Presume-se então que os autovalores variem em magnitude na dinâmica longitudinal, mas não na látero-direcional, ainda, o comportamento dinâmico deve ser o mesmo. As Tabelas 3.2, 3.3 e 3.4 apresentam as comparações entre condições de linearização, autovalores da dinâmica longitudinal e autovalores da dinâmica látero-direcional, respectivamente. É importante ressaltar que esses resultados não encontram-se explícitos em (VALLE, 2014), apenas as matrizes A e B linearizadas são apresentadas, portanto, o cálculo dos autovalores aqui mostrados, bem como a seleção da matriz A para comparação

são de responsabilidade do autor do presente trabalho.

Tabela 3.2 – Condições de equilíbrio diferentes de zero para (VALLE, 2014) e para o presente trabalho.

	T_1 [N]	T_2 [N]	T_3 [N]	θ [°]	u_e [$\frac{m}{s}$]
Autor	0,1223	0,1223	-0,6851	-0,92	0,5
(VALLE, 2014)	1	1	0	0,0003	1

Fonte: Autor.

Tabela 3.3 – Comparação entre os autovalores da dinâmica longitudinal.

Autor	(VALLE, 2014)
-0,0339 + 1,9757i	-0,0552 + 1,9650i
-0,0339 - 1,9757i	-0,0552 - 1,9650i
-0,0176	-0,2035
-0,0458	-0,0480

Fonte: Autor.

Tabela 3.4 – Comparação entre os autovalores da dinâmica látero-direcional.

Autor	(VALLE, 2014)
-0,0548 + 0.3978i	-0,0570 + 0,4000i
-0,0548 - 0.3978i	-0,0570 - 0,4000i
-0,0220 + 2.8883i	-0,0208 + 2,8772i
-0,0220 - 2.8883i	-0,0208 - 2,8772i

Fonte: Autor.

A comparação entre as dinâmicas garante a confiabilidade do modelo na medida que a dinâmica látero-direcional é representada em ambos os trabalhos por dois pares complexos conjugados de autovalores com magnitudes praticamente idênticas, enquanto na dinâmica longitudinal ambos os trabalhos apresentam um par complexo conjugado e dois autovalores reais negativos, onde apenas há uma variação significativa de magnitude em um desses autovalores reais entre um trabalho e outro. Essa variação pode ser explicada pelas razões levantadas anteriormente.

4 PROJETO DO SISTEMA DE CONTROLE

Para o projeto do sistema de controle foram consideradas algumas características de projeto:

- O vetor de estados do sistema é o apresentado na subseção 3.2.8 desconsiderando os estados x_0 e y_0 ;
- A versão linear e invariante no tempo (LTI) do modelo é considerada para o projeto;
- As entradas de referência para o sistema são a velocidade translacional u e a altitude H , para o plano longitudinal, e o ângulo de guinada ψ , para o movimento látero-direcional.

4.1 OBJETIVOS DE PERFORMANCE

Os objetivos que devem ser atingidos pelo controlador projetado são:

- O controlador deve ser capaz de rastrear referências tanto em nível do mar quanto em altas altitudes, como por exemplo, uma altitude próxima da encontrada na região da capital mais alta do mundo, La Paz (Bolívia), que está a quase 4000 metros de altitude;
- Ser capaz de operar com o sistema recebendo massas adicionais não regulares de até 10 % do próprio peso;
- O controlador deve ser capaz de manter o veículo em condição de flutuação neutra e parado a partir de uma referência constante e sem perturbação atmosférica.

4.2 CONTROLE POR REALIMENTAÇÃO INTEGRAL DE ESTADOS

Para o projeto do compensador do sistema foi utilizada a síntese de um regulador quadrático ótimo com realimentação de todos os estados apresentada em (OGATA, 2011) acrescida de integradores na planta para garantir erro zero em regime permanente.

Para o problema do Regulador Linear Quadrático (LQR, acrônimo do inglês *Linear Quadratic Regulator*), tem-se um sistema genérico em malha aberta:

$$\dot{x}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t); \quad (4.1)$$

$$y(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t); \quad (4.2)$$

pode-se determinar a matriz K do vetor de controle ótimo

$$\mathbf{u}(t) = -\mathbf{K}\mathbf{x}(t) \quad (4.3)$$

que minimiza o índice de desempenho

$$J = \int_0^{\infty} (\mathbf{x})^T \cdot (\mathbf{Q}\mathbf{x}) + (\mathbf{u})^T \cdot (\mathbf{R}\mathbf{u}) dt \quad (4.4)$$

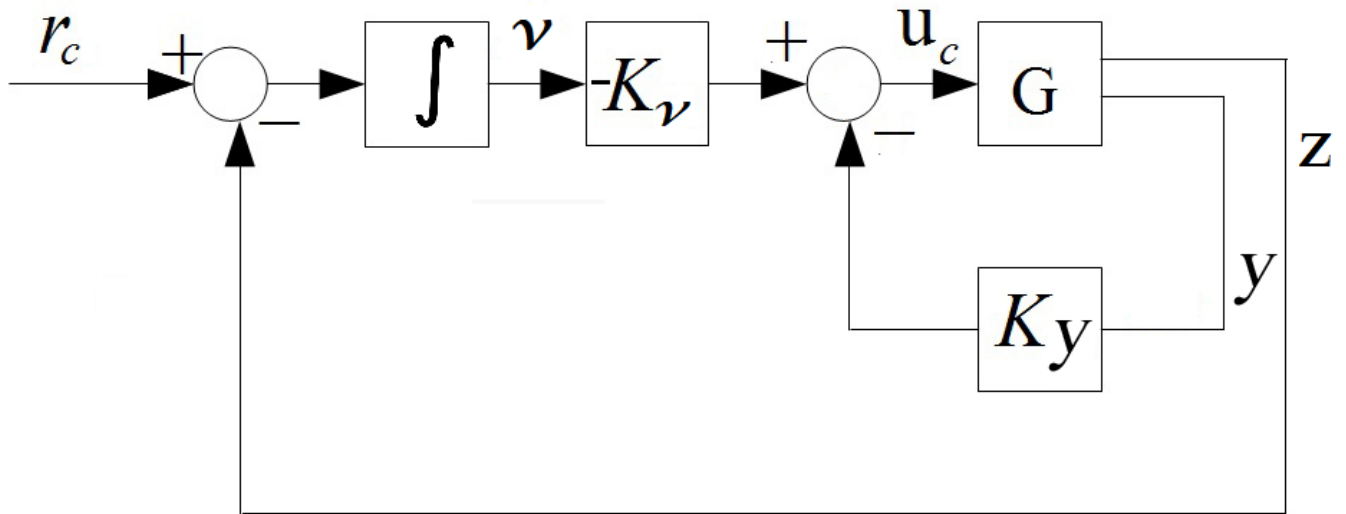
onde \mathbf{Q} e \mathbf{R} são matrizes hermitianas definidas positivas ou reais simétricas. Essas matrizes são matrizes de ponderação que determinam a importância relativa do erro e o consumo da energia dos sinais de controle (OGATA, 2011). Utilizando o *Matlab* podemos solucionar o problema apresentado acima fornecendo as matrizes \mathbf{A} e \mathbf{B} do sistema bem como as matrizes de ponderação \mathbf{Q} e \mathbf{R} através do comando $K = lqr(A, B, Q, R)$. Entretanto, o controlador via LQR não é isento de erro de estado estacionário quando o sistema é sujeito a uma perturbação ou uma entrada de referência constante. No caso de serem admitidas perturbações, bem como entrada de referência diferente de zero, o problema LQR deve ser modificado (VALLE, 2014).

Para contornar o problema do erro de estado em regime estacionário, é necessário incorporar integradores na planta antes de calcular os ganhos do controlador, os integradores são introduzidos de forma a integrar as saídas do sistema para as quais se tem especificação de erro de regime igual a zero, então a matriz de ganhos do controlador é calculada para a planta com os integradores incorporados.

4.2.1 Cálculo dos ganhos do controlador

O diagrama de blocos abaixo apresenta o sistema de controle utilizado.

Figura 4.1 – Diagrama de blocos do sistema em malha fechada.



Fonte: Autor.

O sistema tem equação

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \mathbf{A}x(t) + \mathbf{B}u(t); \\ y(t) &= \mathbf{C}x(t) \\ z(t) &= \mathbf{H}x(t).\end{aligned}\tag{4.5}$$

Onde a matriz \mathbf{H} é a matriz de rastreamento 3×10 que seleciona as saídas u , ψ e H do vetor de estados da planta. \mathbf{A} e \mathbf{B} são as matrizes linearizadas do sistema descartando as linhas e colunas relacionadas aos estados ignoráveis x_0 e y_0 e \mathbf{C} é a matriz identidade 10×10 para a seleção dos estados de saída a serem realimentados, nesse caso, todos.

Continua que r_c é o vetor de entradas de referência $[u_r, \psi_r, H_r]^T$ e v é a saída do compensador integral com equação:

$$\begin{aligned}\dot{w} &= \mathbf{F}w + \mathbf{G}e; \\ v &= \mathbf{D}w + \mathbf{J}e;\end{aligned}\tag{4.6}$$

Cujas matrizes \mathbf{F} e \mathbf{J} são matrizes de zeros 3×3 e \mathbf{G} e \mathbf{D} são as matrizes identidade

3x3 e onde w é o vetor de estados do compensador e e o erro de rastreamento na forma:

$$e = r_c - z; \quad (4.7)$$

Em que z são as saídas dos estados a serem rastreados. Ainda, u_c é o vetor que contém as entradas de controle $[T_1, T_2, T_3]^T$ e pode ser escrito como:

$$u_c = -[K_y \ K_v] \begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix}; \quad (4.8)$$

e $-[K_y \ K_v]$ são as matrizes de ganho 3x10 e 3x3, respectivamente, que formam a matriz de ganho do controlador LQR, calculada a partir do sistema aumentado da planta+compensador.

Para o cálculo dos ganhos citados acima, utilizou-se o comando *lqr* do *Matlab*, o sistema aumentado tem a forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{w} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{B}_a u_c + \mathbf{G}_a r_c \quad (4.9)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ v \end{bmatrix} = \mathbf{C}_a \begin{bmatrix} x \\ w \end{bmatrix} + \mathbf{F}_a r_c \quad (4.10)$$

Onde \mathbf{A}_a , \mathbf{B}_a , \mathbf{G}_a , \mathbf{C}_a e \mathbf{F}_a são as matrizes aumentadas:

$$\mathbf{A}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & 0_{10 \times 3} \\ -\mathbf{GH} & \mathbf{F} \end{bmatrix}; \quad (4.11)$$

$$\mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B} \\ 0_{3 \times 3} \end{bmatrix}; \quad (4.12)$$

$$\mathbf{G}_a = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 3} \\ \mathbf{G} \end{bmatrix}; \quad (4.13)$$

$$\mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0_{10 \times 3} \\ -\mathbf{JH} & \mathbf{D} \end{bmatrix}; \quad (4.14)$$

$$\mathbf{F}_a = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 3} \\ \mathbf{J} \end{bmatrix}; \quad (4.15)$$

Os ganhos \mathbf{K} foram calculados considerando uma linearização ao redor da condi-

ção de equilíbrio calculada a partir das entradas $u_e = 0,5 \frac{m}{s}$ e H_e a nível do mar, obtendo-se $\theta_e = -1^\circ$ e o restante dos estados igual a zero e $U_e = [0.0394 \ 0.0394 \ -0.7061]N$. As matrizes **Q** e **R** foram encontradas por tentativa e erro, onde $R_{ii} = 0.01$ e $Q_{ii} = 1$. A matriz de ganhos **K** encontrada foi:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 15,08 & 2,10 & 0,68 & 0,57 & 11,85 & 25,11 & -0,19 & 10,77 & 20,26 & -0,23 & -7,07 & -7,07 & 0,06 \\ 15,08 & -2,10 & 0,68 & -0,57 & 11,85 & -25,11 & 0,19 & 10,77 & -20,26 & -0,23 & -7,07 & 7,07 & 0,06 \\ -0,79 & 0,00 & -50,67 & 0,00 & 4,76 & 0,00 & 0,00 & 16,11 & 0,00 & 33,56 & -0,08 & 0,00 & -1,00 \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

4.3 ANÁLISE DO SISTEMA EM MALHA FECHADA

Para análise do sistema em malha fechada computam-se as matrizes dinâmicas do sistema no espaço de estados, \mathbf{A}_c e \mathbf{B}_c :

$$\mathbf{A}_c = \mathbf{A}_a - \mathbf{B}_a \mathbf{K}; \quad (4.17)$$

$$\mathbf{B}_c = \begin{bmatrix} 0_{10 \times 3} \\ I_{3 \times 3} \end{bmatrix} \quad (4.18)$$

Em que **K** é a matriz de ganhos calculada na seção anterior e as matrizes aumentadas variam para as condições de equilíbrio utilizadas na linearização, apresentadas na sequência.

Em princípio, a análise do sistema considerou três casos onde o dirigível está carregando massas adicionais e três variações de altitude de acordo com algumas cidades consideradas para operação do dirigível, são elas: Rio de Janeiro - RJ, Brasil (0 metros), Santa Maria - RS, Brasil (126 metros) e Bogotá - Colômbia (3000 metros).

Foi considerada uma velocidade de equilíbrio de $u_e = 0,5 \frac{m}{s}$ e o dirigível próximo ao solo para o cálculo das condições de equilíbrio em cada caso. As Tabelas 4.1, 4.2 e 4.3 apresentam as condições de equilíbrio calculadas diferentes de zero.

Tabela 4.1 – Condições de equilíbrio para a primeira série de cenários de operação.

m=21,49 [Kg]	$\rho_{0\ m} = 1,225 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$	$\rho_{126\ m} = 1,2103 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$	$\rho_{3000\ m} = 0,9091 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$
$T_1 [\%T_{max}]$	0,0394	0,0109	-5,6251
$T_2 [\%T_{max}]$	0,0394	0,0109	-5,6251
$T_3 [\%T_{max}]$	-0,7061	1,8427	52,71
$\theta [^\circ]$	-1,03	-1,36	-12,11

Fonte: Autor.

Tabela 4.2 – Condições de equilíbrio para a segunda série de cenários de operação.

m=22,49 [Kg]	$\rho_{0\ m} = 1,225 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$	$\rho_{126\ m} = 1,2103 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$	$\rho_{3000\ m} = 0,9091 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$
T_1 [N]	-0,1499	-0,2379	-7,9673
T_2 [N]	-0,1499	-0,2379	-7,9673
T_3 [N]	9,1069	11,6514	61,70
θ [°]	-2,3	-2,66	-14,54

Fonte: Autor.

Tabela 4.3 – Condições de equilíbrio para a terceira série de cenários de operação.

m=23,49 [Kg]	$\rho_{0\ m} = 1,225 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$	$\rho_{126\ m} = 1,2103 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$	$\rho_{3000\ m} = 0,9091 \left[\frac{Kg}{m^3}\right]$
T_1 [N]	-0,5670	-0,7216	-10,78
T_2 [N]	-0,5670	-0,7216	-10,78
T_3 [N]	18,9	21,43	70,32
θ [°]	-3,63	-4,03	-17,11

Fonte: Autor.

Para todas as condições consideradas, é possível notar que, na altitude de Bogotá, a condição de equilíbrio calculada sempre necessita de um valor de tração no terceiro motor superior à 15,2 N no sentido avante, tração máxima que esse motor pode fornecer nesse sentido. O mesmo ocorre para as situações em que a massa adicionada é de 2 quilogramas. Dessa forma, fica claro que, mesmo que o controlador esteja adequado a essas operações, o *hardware* do sistema não estará, sendo necessário um motor mais potente para que o dirigível possa ser operado nesses casos. De um modo geral, a adequação do *hardware* do dirigível para cada operação depende tanto da quantidade de massa adicionada quanto da altitude desejada para o voo. Sendo assim, convencionou-se que a massa adicional máxima suportada pelos motores seria de 1 Kg e calculou-se a altitude máxima de operação como sendo 800 metros. Logo, a análise do sistema em malha fechada ficou restrita aos casos de massa nominal e massa adicional de 1 Kg e, em substituição à situação de voo a 3000 metros de altitude, utilizou-se a máxima altitude de operação de 800 metros.

Após o cálculo das condições de equilíbrio e linearização do sistema para cada caso, é feito o mapa de polos e zeros para as situações descritas.

4.3.1 Caso 1 - Massa nominal a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros

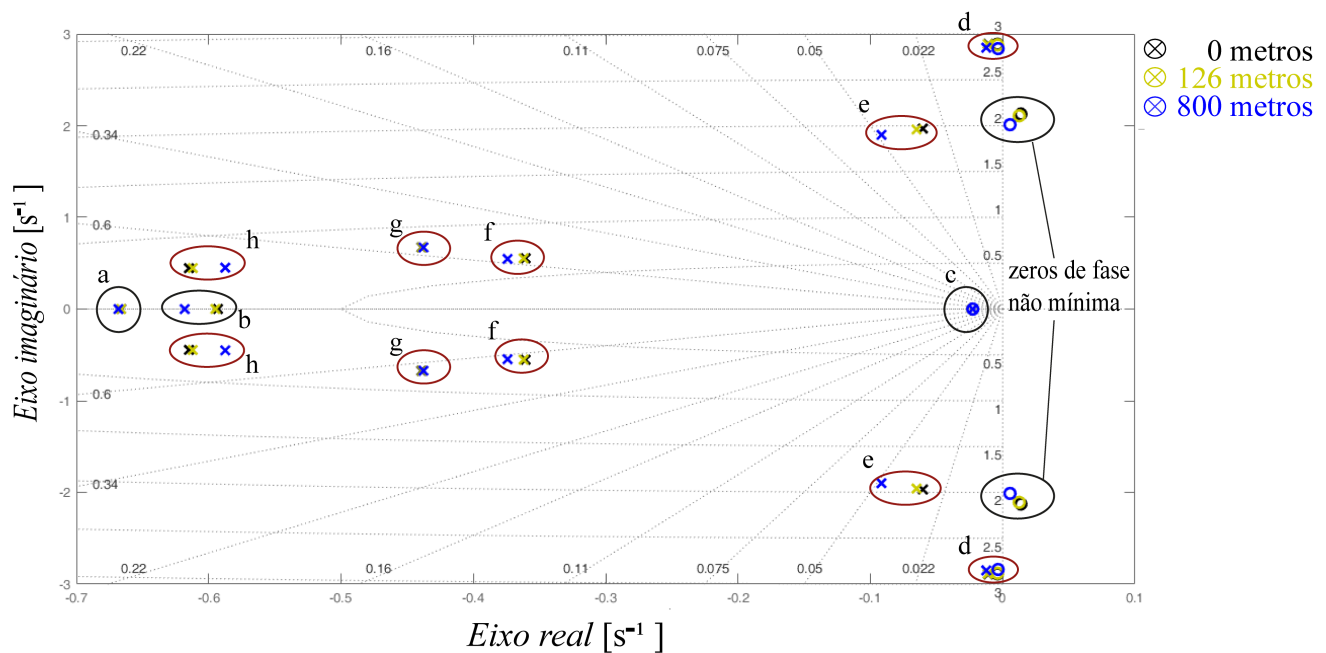
O mapa de polos e zeros para o primeiro caso pode ser visto na Figura 4.2. Os pontos marcados com um x são os polos do sistema, os círculos representam os zeros,

as linhas plotadas são as linhas de razão de amortecimento constante (ζ) e linhas de frequência natural constante (ω_n).

- **Zeros do sistema:** 1 zero real negativo e 2 pares complexos conjugados com parte real positiva;
- **polos do sistema:** 3 polos reais negativos e 5 pares complexos conjugados com parte real negativa;
- **Estabilidade do sistema:** Estável para todas as altitudes, pois não possui polos no semi plano direito do gráfico;
- **Resultados:** para todas as altitudes o sistema apresenta fase não mínima, esse comportamento é induzido pelos zeros no semiplano direito do gráfico apresentado. Segundo (GOMES; RAMOS, 1998), esse é um comportamento natural para dirigíveis operando em baixas velocidades e normalmente está associado à variação aerodinâmica da arfagem, fazendo a aeronave descer antes de começar a ganhar altitude. A posição dos polos e zeros é praticamente idêntica para nível do mar e 126 metros de altitude. O polo real de maior frequência (a) para cada altitude, apresentado no gráfico, está posicionado praticamente no mesmo local. Esse polo está associado com o modo longitudinal de amortecimento de flutuação e arfagem, sua constante de tempo é de aproximadamente 1,7 s, sendo o modo dominante para a dinâmica longitudinal. O segundo polo real (b) também representa uma componente de decaimento exponencial que, por sua vez, está relacionada à subida. Esse modo se torna cada vez mais estável com o aumento da altitude, como pode ser percebido considerando sua posição mais distante do eixo imaginário em 800 metros em relação aos seus pares. Por fim, o polo real de menor frequência (c) está associado ao amortecimento de guinada. Esse polo se encontra muito próximo de zero e está relacionado ao amortecimento de guinada. Para os pares complexos conjugados, os polos mais próximos do eixo imaginário (d), não variam com a altitude, esses polos representam um comportamento oscilatório levemente amortecido que está associado ao ângulo de arfagem e é característico de aeronaves que possuem o centro de empuxo um pouco a frente do centro de gravidade. O par de polos complexos logo a seguir (e), e que varia com a altitude, está relacionado à oscilações no rolamento da aeronave. Esse par de polos tende a ficar mais estável com a variação de altitude. Os próximos 3 pares de polos da direita para a esquerda relacionam-se, sequencialmente, com rolamento e guinada (f), derrapagem (g) e derrapagem e guinada (h), onde o primeiro tende a se tornar mais estável e o último, instável.
- **Comentários:** como o dirigível aqui tratado não utiliza superfícies de controle aerodinâmicas a fase não mínima não é um problema. Segundo (KHOURY; GILLET, 1998),

1999), para velocidades abaixo de 3 metros por segundo, a posição do polo real mais próximo da origem não deve variar, o que significa que não é possível controlar a guinada da aeronave com superfícies de controle aerodinâmicas nessa velocidade, sendo necessária a atuação dos motores. Mais uma vez isso não será um problema, pois o dirigível não conta com tais superfícies.

Figura 4.2 – Mapa de polos e zeros em malha fechada para condição de massa nominal a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros.



Fonte: Autor.

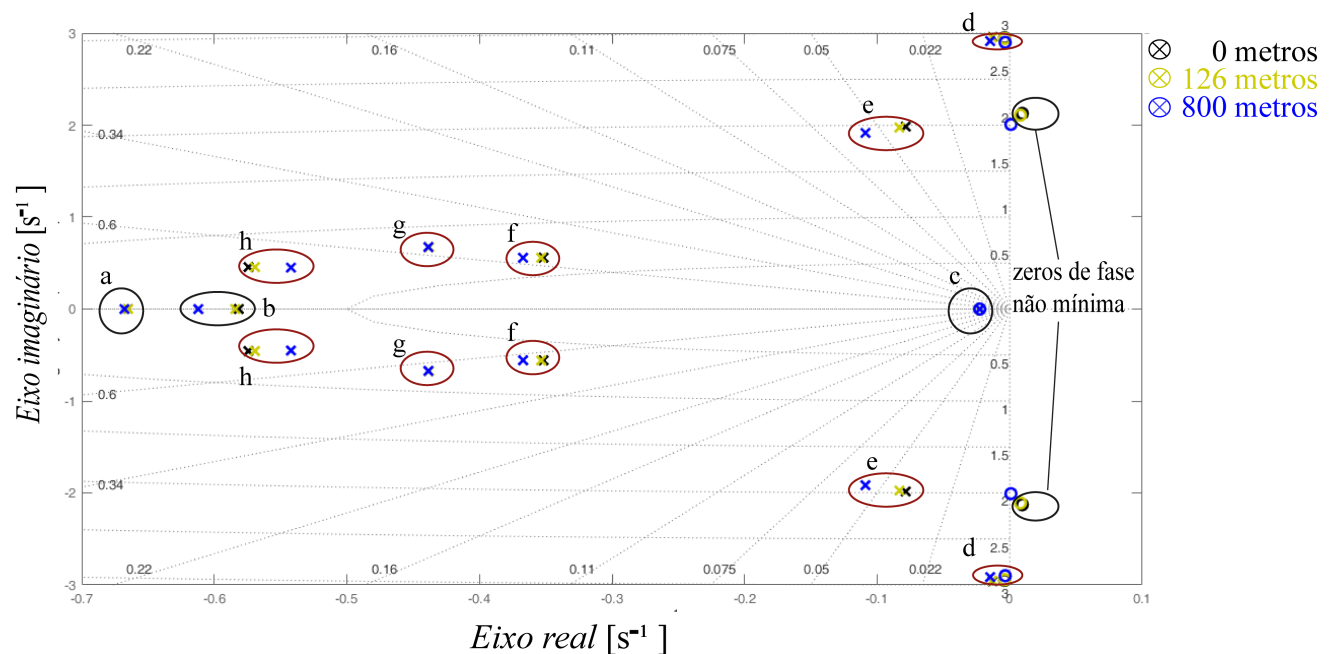
4.3.2 Caso 2 - Massa adicional de 1 Kg a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros

O mapa de polos e zeros para esse caso pode ser visto na Figura 4.3 e segue a notação introduzida na subseção anterior.

- **Zeros do sistema:** 1 zero real negativo e 2 pares complexos conjugados com parte real positiva para os casos de nível do mar e 126 metros de altitude e 1 zero real negativo e 2 pares complexos conjugados puramente imaginários para a altitude de 800 metros;
- **Polos do sistema:** 3 polos reais negativos e 5 pares complexos conjugados com parte real negativa;

- **Estabilidade do sistema:** Estável para todas as altitudes, pois não possui polos no semi plano direito do gráfico;
- **Resultados:** o sistema apresenta fase não mínima para nível do mar e a 126 metros, mas não para o caso de 800 metros de altitude. Comparativamente com o resultado anterior, o aumento na massa contribuiu para aumentar o afastamento dos polos oscilatórios de arfagem com o eixo real. A posição dos polos reais não varia com a massa, bem como o par de polos associado à derrapagem da aeronave. O dirigível estando mais pesado, gerou um aumento no amortecimento do modo oscilatório de rolamento, por outro lado, os modos de acoplamento entre rolamento e guinada e derrapagem e guinada deslocaram-se mais para perto do eixo imaginário.
- **Comentários:** Mesmo que para o caso anterior.

Figura 4.3 – Mapa de polos e zeros em malha fechada para condição de massa adicional de um quilograma a nível do mar, a 126 metros e a 800 metros.



Fonte: Autor.

5 SISTEMA DE GUIAMENTO

5.1 ALGORITMO DE GUIAGEM DO TIPO LOS

O guiamento aqui implementado é baseado na linha de visada (*Lookahead-base Line Of Sight (LOS) Steering*) como descrito por (JENSEN, 2011). A ideia básica por trás dos algoritmos de orientação por linha de visada (LOS) é definir um ponto de ajuste de LOS na linha reta entre dois pontos de referência p_k e p_{k+1} . O vetor da posição atual da aeronave até o ponto de ajuste é conhecido como vetor LOS e sua direção implicitamente também se torna o curso da aeronave. Para o guiamento, o ângulo de trajetória é separado em duas partes:

$$\chi_d(e) = \chi_p + \chi_r(e). \quad (5.1)$$

Onde

$$\chi_p = \alpha_k; \quad (5.2)$$

$$\chi_r(e) = \tan^{-1} \left(\frac{-e(t)}{\Delta} \right). \quad (5.3)$$

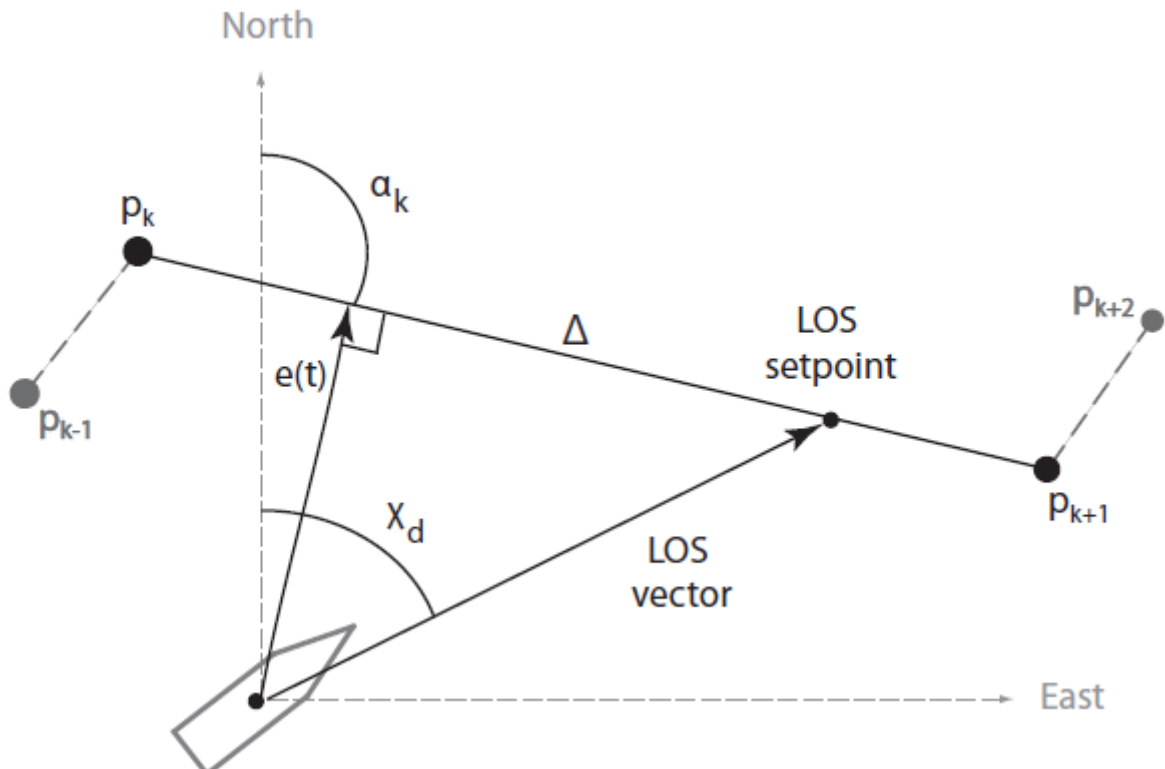
No qual χ_p é ângulo tangencial à trajetória e $\chi_r(e)$ é o rumo em direção ao ponto de ajuste entre os pontos de passagem que é relativo à distância de visada (Δ , sem relação com a matriz de transformação angular) e ao erro de rastreo ($e(t)$), conforme apresentado na Figura 5.1. A distância de visada pode ser escolhida arbitrariamente e a sua redução aumenta a agressividade com que o rastreo da trajetória é feito, essa escolha deve ser realizada em função da dinâmica da aeronave, velocidade e requisitos da aplicação.

Para a troca entre pontos de passagem durante o seguimento de uma trajetória com vários *waypoints* considerou-se o método do círculo de aceitação. Nele, se avalia se a aeronave encontra-se dentro de um círculo que determina a região do *waypoint* a partir da seguinte equação:

$$(x_{k+1} - x(t))^2 + (y_{k+1} - y(t))^2 \leq R^2_{k+1}. \quad (5.4)$$

Onde $(x, y)(t)$ são as posições lineares do veículo e $(x_{k+1}, y_{k+1})(t)$ o ponto de passagem alvo. R é o raio do círculo de aceitação que pode ser determinado arbitrariamente, a depender da necessidade de o veículo cruzar exatamente em cima do ponto de passagem ou apenas por perto.

Figura 5.1 – Princípio LOS de guiamento com distância Δ .



Fonte: (JENSEN, 2011)

5.2 PERFIL DE VELOCIDADE DO GUIAMENTO

Na garantia da viabilidade de qualquer seguimento de trajetória, a adaptação da velocidade do veículo é parte essencial no planejamento do caminho. Por exemplo, para superar curvas fechadas com alta curvatura, a velocidade deve ser acomodada, de modo que seja possível obter um raio de viragem viável, um piloto de automóvel faz isso a partir de impressões visuais e outros sinais. Para um veículo autônomo, essa adaptação passa pela análise de *waypoints*. Considerando a guiagem apresentada na seção anterior é interessante alterar a velocidade de acordo com o caminho, de modo que a velocidade desejada é apenas uma função do ângulo entre o ponto de passagem anterior p_{k-1} , o próximo ponto de passagem p_k e o ponto de passagem consecutivo p_{k+1} , dado por:

$$\|u_k \times u_{k+1}\| = \|u_k\| \|u_{k+1}\| \sin(\alpha_k); \quad (5.5)$$

$$u_k \cdot u_{k+1} = \|u_k\| \|u_{k+1}\| \cos(\alpha_k); \quad (5.6)$$

$$\tan(\alpha_k) = \frac{\|u_k \times u_{k+1}\|}{u_k \cdot u_{k+1}}; \quad (5.7)$$

$$\alpha_k = \tan^{-1} \frac{\|u_k \times u_{k+1}\|}{u_k \cdot u_{k+1}}. \quad (5.8)$$

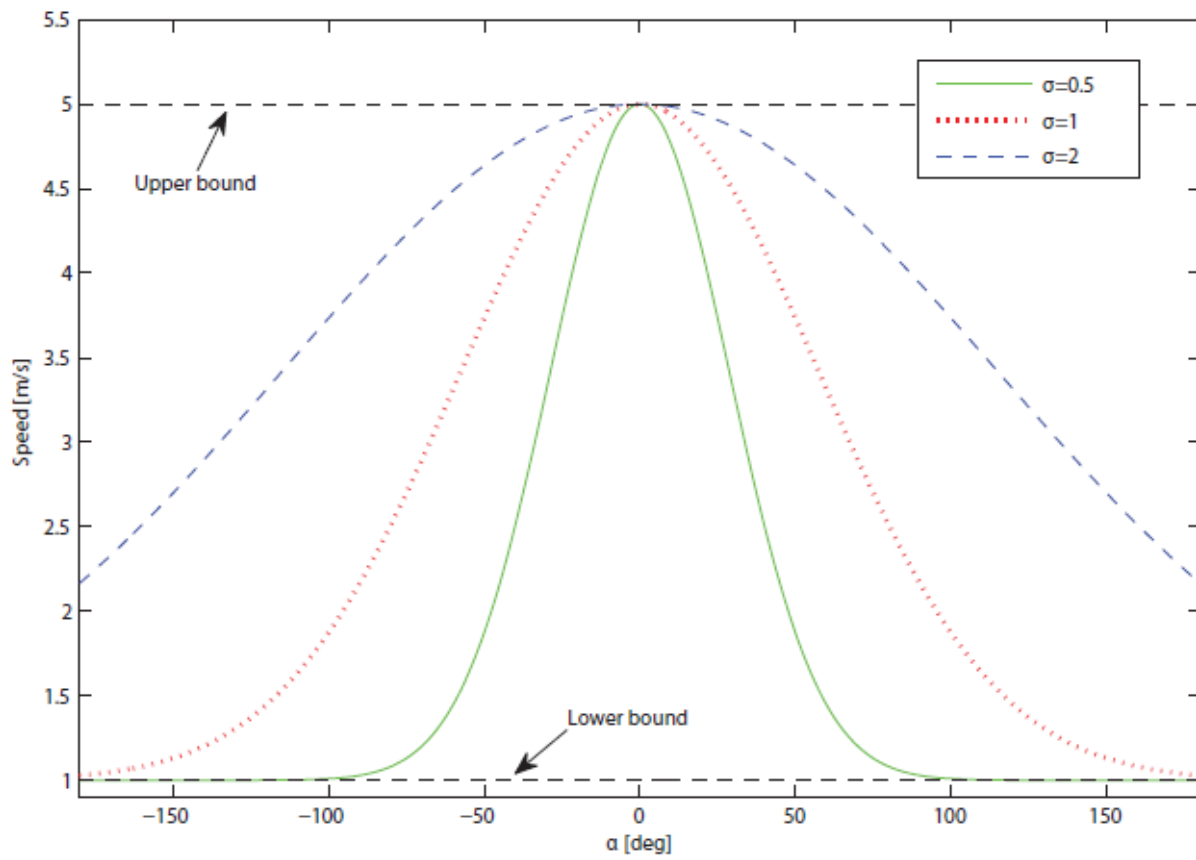
onde $u_k = [x_k \ y_k]^T$ e $u_{k+1} = [(x_{k+1} - x_k) \ (y_{k+1} - y_k)]^T$.

Assim, a fórmula a seguir para a velocidade de referência em cada ponto de passagem é calculada

$$v_{ref}(\alpha_k) = v_{min} + (v_{max} - v_{min}) e^{-\frac{\alpha_k^2}{\sigma^2}}. \quad (5.9)$$

Em que v_{min} é a mínima velocidade de operação do veículo, para o trabalho aqui tratado, $0, 1 \frac{m}{s}$, v_{max} é a máxima velocidade de operação, aqui $1 \frac{m}{s}$, α_k definido acima, é o ângulo entre os pontos de passagem relevantes para a situação e σ o parâmetro de projeto que altera a forma e inclinação da curva da velocidade de referência, conforme apresentado na Figura 5.2 abaixo.

Figura 5.2 – Velocidade de referência v_{ref} em função do fator σ .



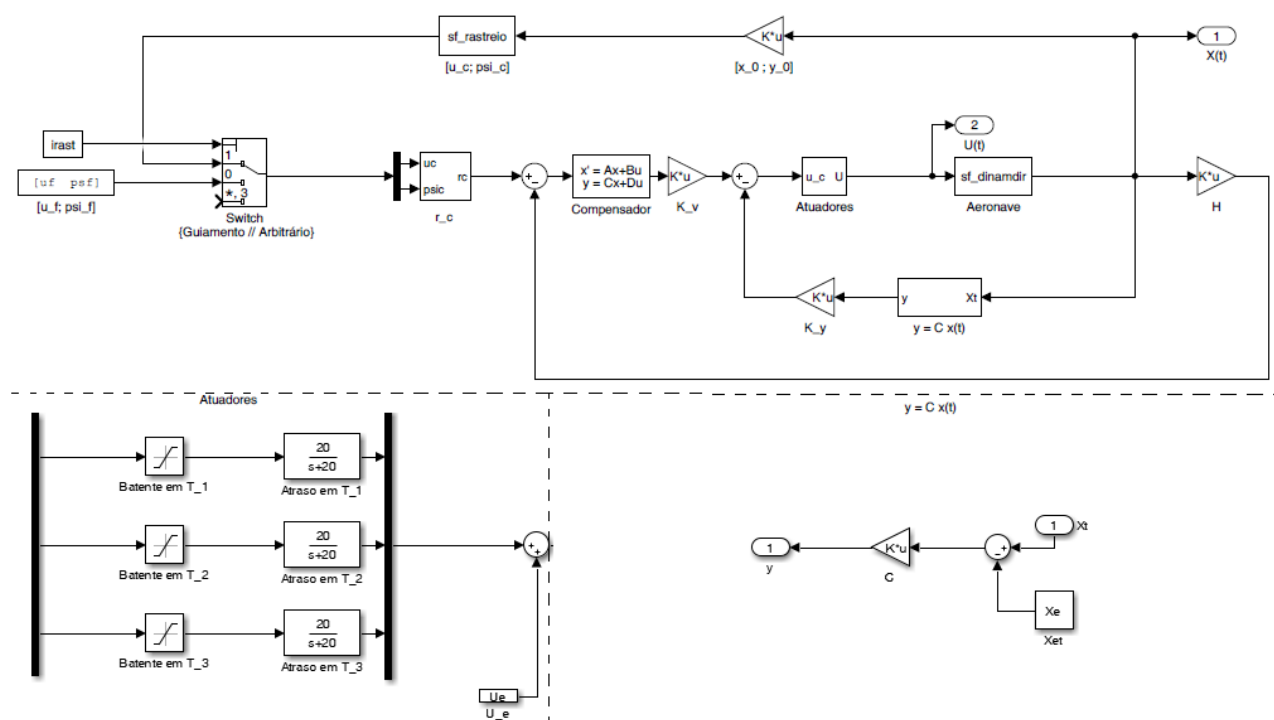
Fonte: (JENSEN, 2011)

6 RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

6.1 APRESENTAÇÃO DOS RESULTADOS

Para testar o controlador projetado foram simuladas algumas condições de voo arbitrárias a nível do mar e com massa nominal. Em seguida, foram simulados dois tipos de trajetórias, uma em vaivém e outra circular, para testar a capacidade do sistema de guiamento e controle em seguir uma trajetória. Essas simulações não lineares foram realizadas com a ferramenta *Simulink* a partir do programa apresentado na Figura 6.1

Figura 6.1 – Diagrama do *Simulink* para simulação não linear



Fonte: Autor.

Os resultados para cada caso de simulação são apresentados em duas figuras. A primeira apresenta a variação dos estados da aeronave e a ação dos atuadores e está dividida da seguinte maneira:

- (a) posições lineares $x(t)$, $y(t)$ e $H(t)$;
- (b) velocidades lineares $u(t)$, $v(t)$ e $w(t)$;
- (c) posições angulares $\phi(t)$, $\theta(t)$ e $\psi(t)$;

- (d) velocidades angulares p , q e r ;
- (e) atuadores laterais T_1 e T_2 ;
- (f) atuador central T_3 .

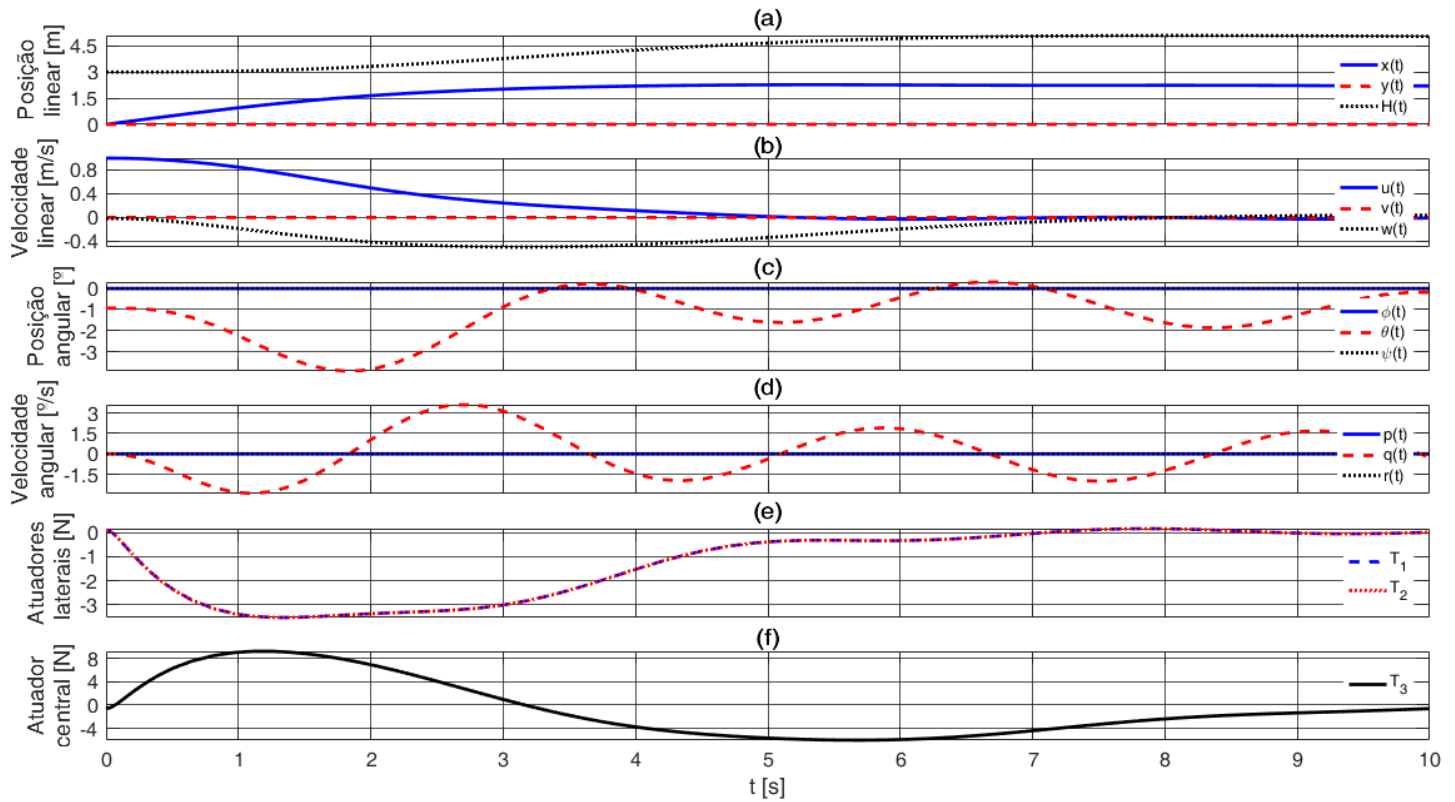
A segunda figura apresenta a trajetória percorrida pela aeronave em duas e três dimensões, respectivamente. Também são mostrados vetores normalizados que indicam a magnitude e direção do vetor velocidade da aeronave para algumas posições no espaço.

6.1.1 Caso 1 - Subida a nível do mar.

Esse resultado é apresentado nas Figuras 6.2 e 6.3

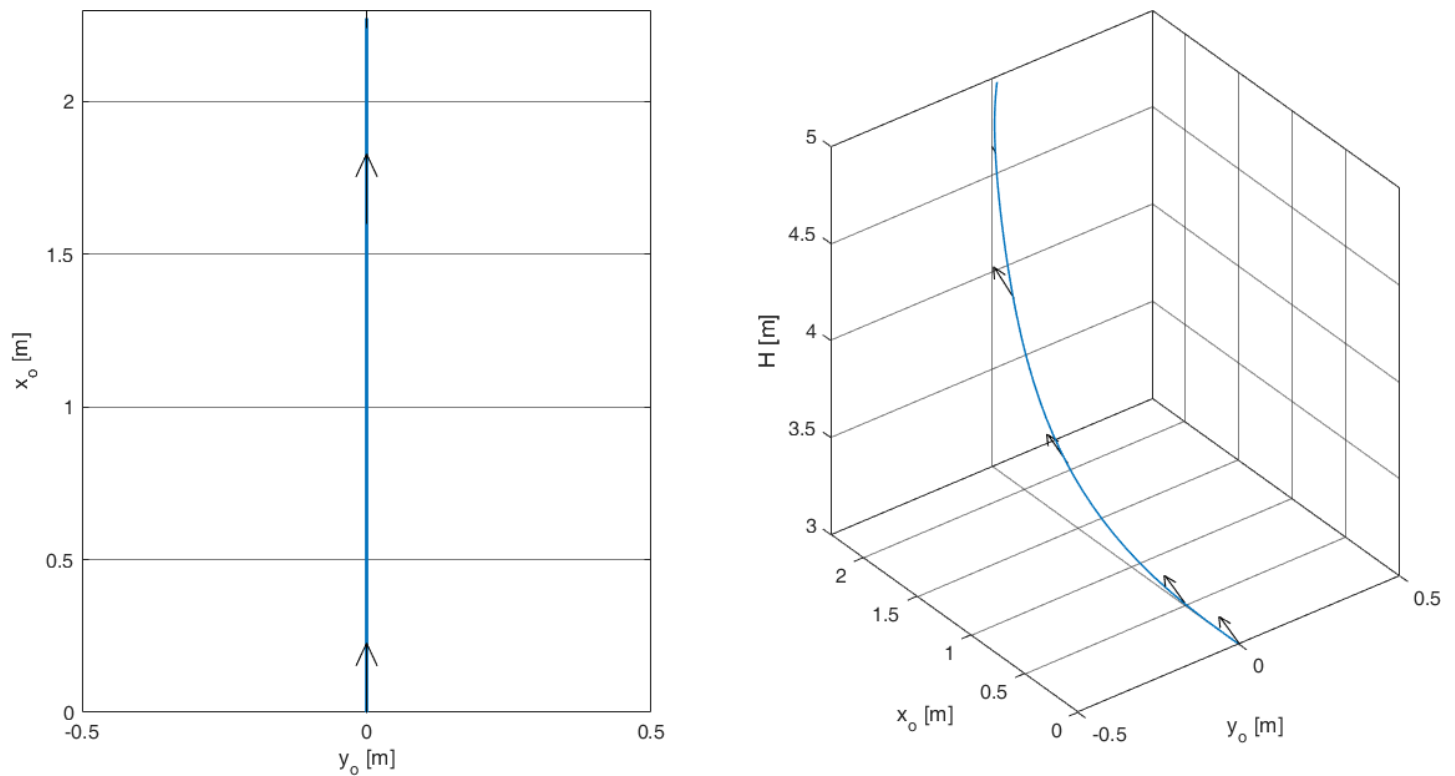
- **Cenário** - subida a nível do mar;
- **Objetivo** - verificar a capacidade de seguimento de referência do controle;
- **Condições iniciais** - aeronave parte de uma altitude de 3 metros com velocidade u de equilíbrio igual a $1 \frac{m}{s}$ e ângulo de guinada nulo;
- **Condições finais desejadas** - deve atingir 5 metros de altitude e parar em seguida sem variar o ângulo de guinada;
- **Resultado** - a aeronave sofre uma variação da velocidade translacional avante com o dirigível parando por volta de 5 segundos após o início da simulação, deslocando-se 2 metros no eixo longitudinal antes de parar. A altitude desejada é atingida por volta do mesmo período. Os motores laterais atuam de modo a frear o dirigível, aplicando trações de mesma magnitude com um máximo valor absoluto em torno de -4 N. O motor central aplica por volta de 9 N de tração máxima para a aeronave atingir a altitude;
- **Observações** - é possível notar uma leve oscilação na velocidade q , resíduo da ação dos motores na velocidade. Os atuadores operam dentro de sua região de operação nominal.

Figura 6.2 – Variação dos estados e ação dos atuadores em subida a nível do mar.



Fonte: Autor.

Figura 6.3 – Trajetória percorrida em subida a nível do mar.



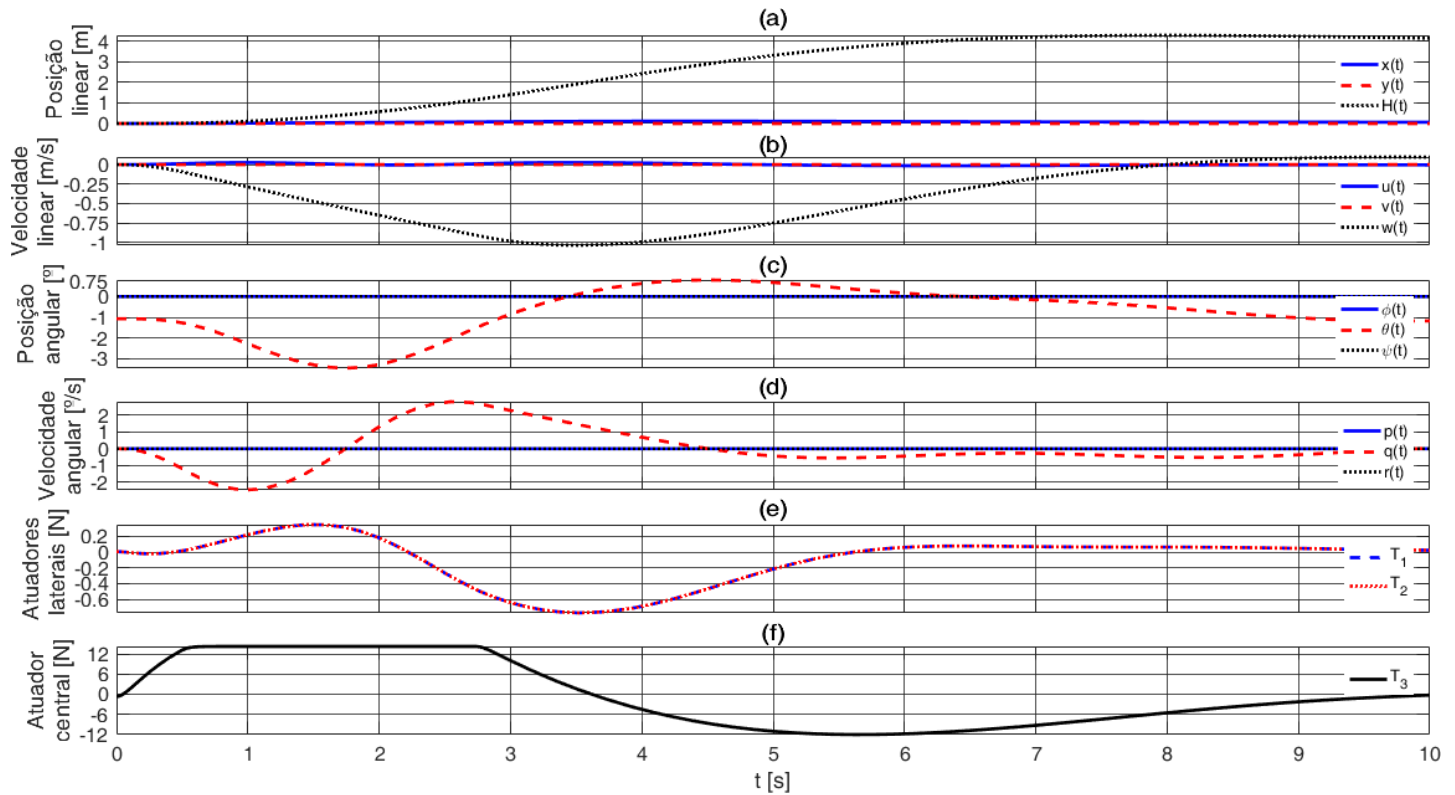
Fonte: Autor

6.1.2 Caso 2 - Subida com velocidade translacional u nula a nível do mar.

Esse resultado é apresentado nas Figuras 6.4 e 6.5

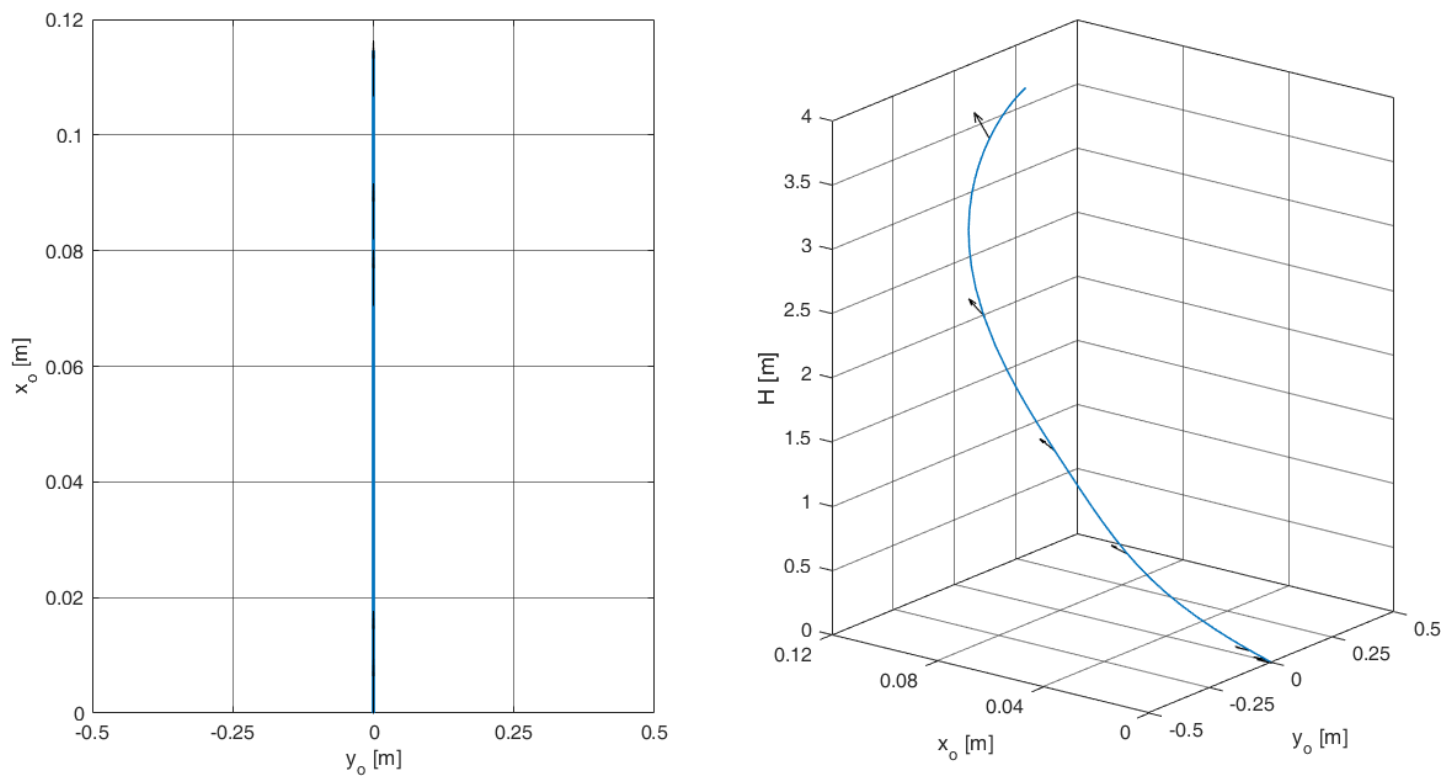
- **Cenário** - subida com velocidade u nula e a nível do mar;
- **Objetivo** - verificar a capacidade de seguimento de referência do controle;
- **Condições iniciais** - aeronave parte do solo, em situação de parada com ângulo de guinada nulo;
- **Condições finais desejadas** - deve atingir 4 metros de altitude sem variar a velocidade translacional u ou o ângulo de guinada;
- **Resultado** - a aeronave sofre uma variação da velocidade translacional avante com o dirigível parando por volta de 5 segundos após o início da simulação, deslocando-se 2 metros no eixo longitudinal antes de parar. A altitude desejada é atingida por volta do mesmo período. Os motores laterais funcionam de modo a manter o dirigível parado no eixo longitudinal com trações máxima e mínima em torno de 0,3 N e -0,3 N, respectivamente. A ação do terceiro motor ocorre enquanto a aeronave está em subida retornando ao equilíbrio logo após o cruzamento com a altitude de referência;
- **Observações** - a velocidade de arfagem q varia de acordo com a ação do motor central. Os motores laterais utilizam pouca tração para manter o dirigível parado, já o motor central satura durante uma parte da operação. A altitude desejada é atingida, ultrapassada e apenas depois de alguns segundos se acomoda no valor indicado pela referência. A aeronave desloca-se cerca de 10 centímetros no eixo longitudinal durante a subida.

Figura 6.4 – Variação dos estados e ação dos atuadores em subida parado a nível do mar.



Fonte: Autor.

Figura 6.5 – Trajetória percorrida em subida parado a nível do mar.



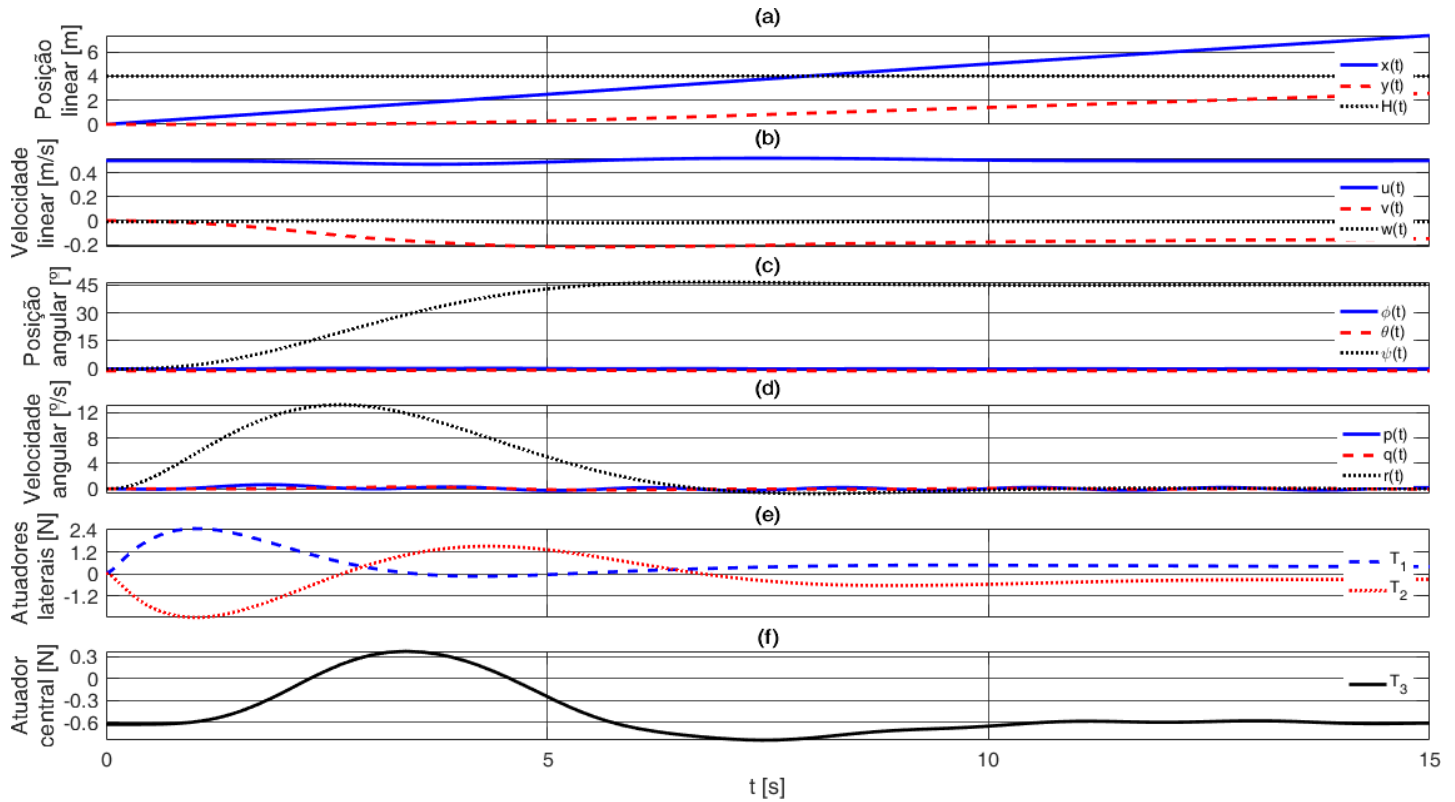
Fonte: Autor.

6.1.3 Caso 3 - Curva com velocidade translacional u , altitude e ângulo de guinada constantes.

Esse resultado é apresentado nas Figuras 6.6 e 6.7

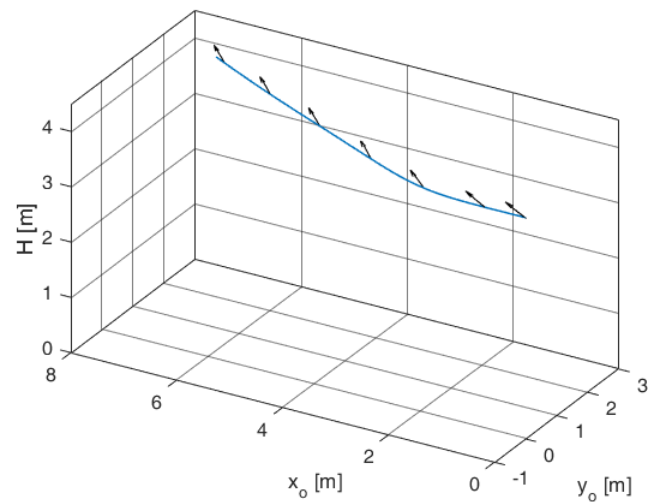
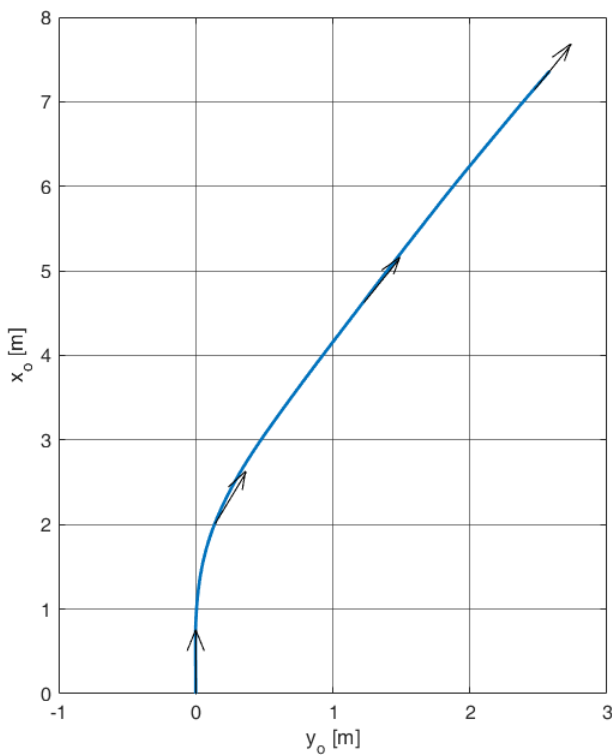
- **Cenário** - referência de guinada de 45° em relação à posição inicial, com velocidade translacional e altitude constantes;
- **Objetivo** - verificar a capacidade de seguimento de referência do controle;
- **Condições iniciais** - aeronave parte de condição de altitude de 4 metros, ângulo de guinada nulo e velocidade de equilíbrio, $u = 0,5 \frac{m}{s}$;
- **Condições finais desejadas** - deve manter a altitude e velocidade enquanto realiza uma curva de 45° ;
- **Resultado** - a velocidade v varia na medida que o veículo entra em curva. O dirigível demora cerca de 6 segundos para atingir o ângulo de 45° comandado, percebe-se uma variação máxima de $\frac{15^\circ}{s}$ na velocidade angular r nesse intervalo. A altitude não varia e mantém-se igual a 4 metros, valor de equilíbrio para essa situação. Os motores laterais fornecem trações com sinais opostos durante o alinhamento do ângulo de guinada e, após, retornam ao valor de equilíbrio. Pouco antes de completar 2 metros de deslocamento longitudinal, o dirigível já encontra-se alinhado ao ângulo comandado e desloca-se seguindo essa e as demais referências.
- **Observações** - o motor T_2 demora mais para retornar ao equilíbrio. O motor central precisa compensar a variação na altitude durante a curva. Não há saturação nos atuadores.

Figura 6.6 – Variação dos estados e ação dos atuadores em curva indicada constante.



Fonte: Autor.

Figura 6.7 – Trajetória percorrida em curva indicada constante.



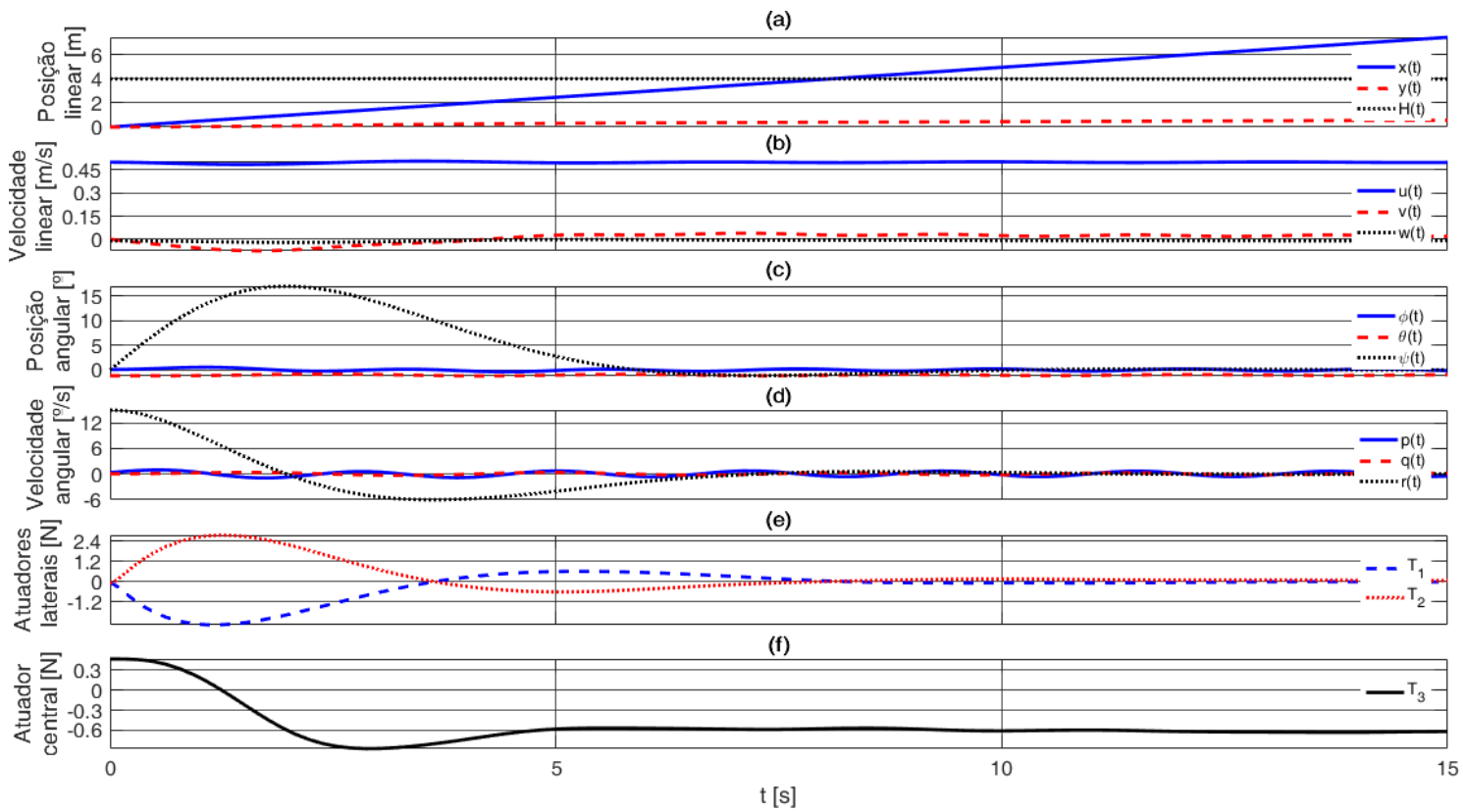
Fonte: Autor.

6.1.4 Caso 4 - Compensação de taxa de variação do ângulo de guinada com velocidade translacional u e altitude constantes.

Esse resultado é apresentado nas Figuras 6.8 e 6.9

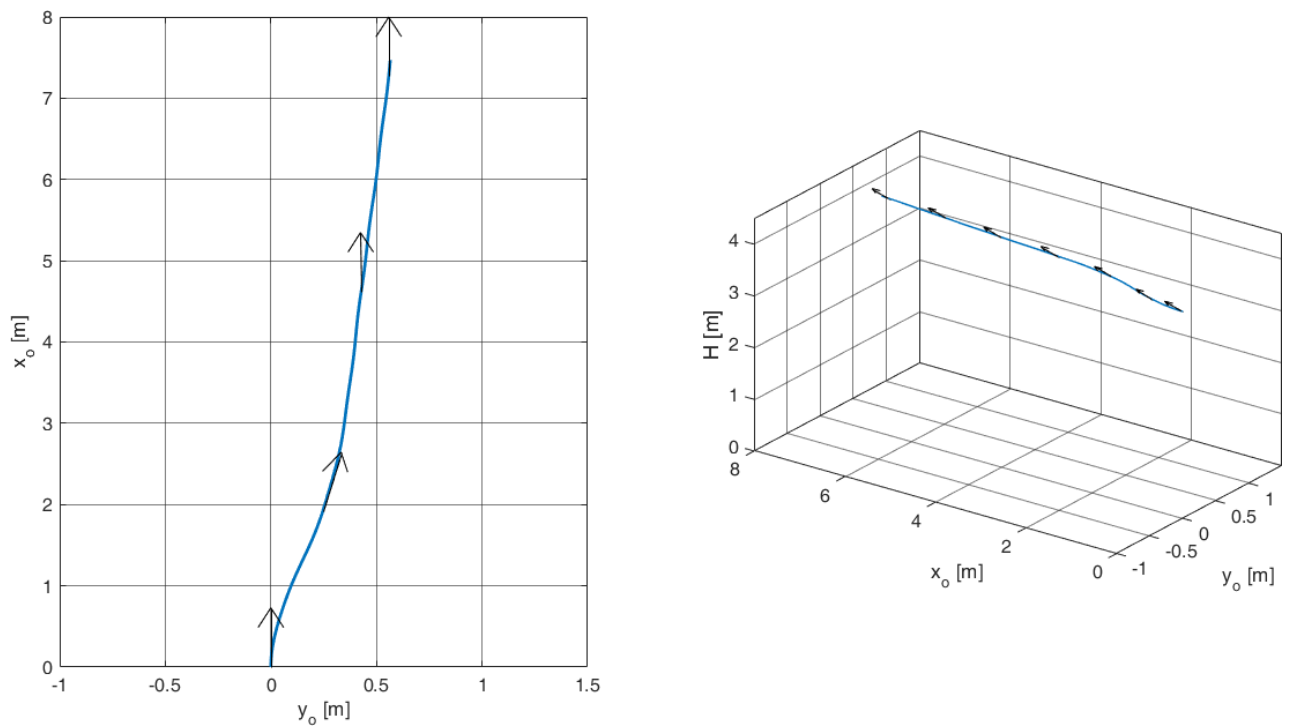
- **Cenário** - aeronave se encontra com o ângulo de guinada variando 15 graus a cada segundo;
- **Objetivo** - verificar a capacidade de seguimento de referência do controle com distúrbio inicial em $\dot{\psi}$;
- **Condições iniciais** - aeronave parte de condição de altitude de 4 metros, ângulo de guinada nulo, taxa de variação do ângulo de guinada de $15 \frac{^\circ}{s}$ e velocidade, $u = 0,5 \frac{m}{s}$;
- **Condições finais desejadas** - deve zerar a taxa de variação do ângulo de guinada mantendo u e H constantes;
- **Resultado** - as velocidades angulares são zeradas em menos de 10 segundos com seguimento de referência de velocidade u e altitude H .
- **Observações** - não há saturação nos motores. Há necessidade do motor central compensar os motores laterais durante o ajuste. Os motores laterais operam de forma espelhada.

Figura 6.8 – Variação dos estados e ação dos atuadores em compensação de curva.



Fonte: Autor.

Figura 6.9 – Trajetória percorrida em compensação de curva.



Fonte: Autor.

6.1.5 Caso 5 - Seguimento de trajetória vaivém a partir do rastreo de pontos de passagem.

O primeiro caso considerado para teste conjunto da lei de guiamento e do controlador foi a simulação de uma trajetória de vaivém. Foram definidos os pontos de passagem previamente cujas coordenadas em x e y estão definidas abaixo (Tabela 6.1):

Tabela 6.1 – Pontos de passagem para a trajetória vaivém.

X_k	Y_k
30	0
45	-20
60	-30
75	-20
90	0
75	20
60	30
45	20
30	0
45	-20
60	-30
75	-20
90	0
75	20
60	30
75	20
90	0

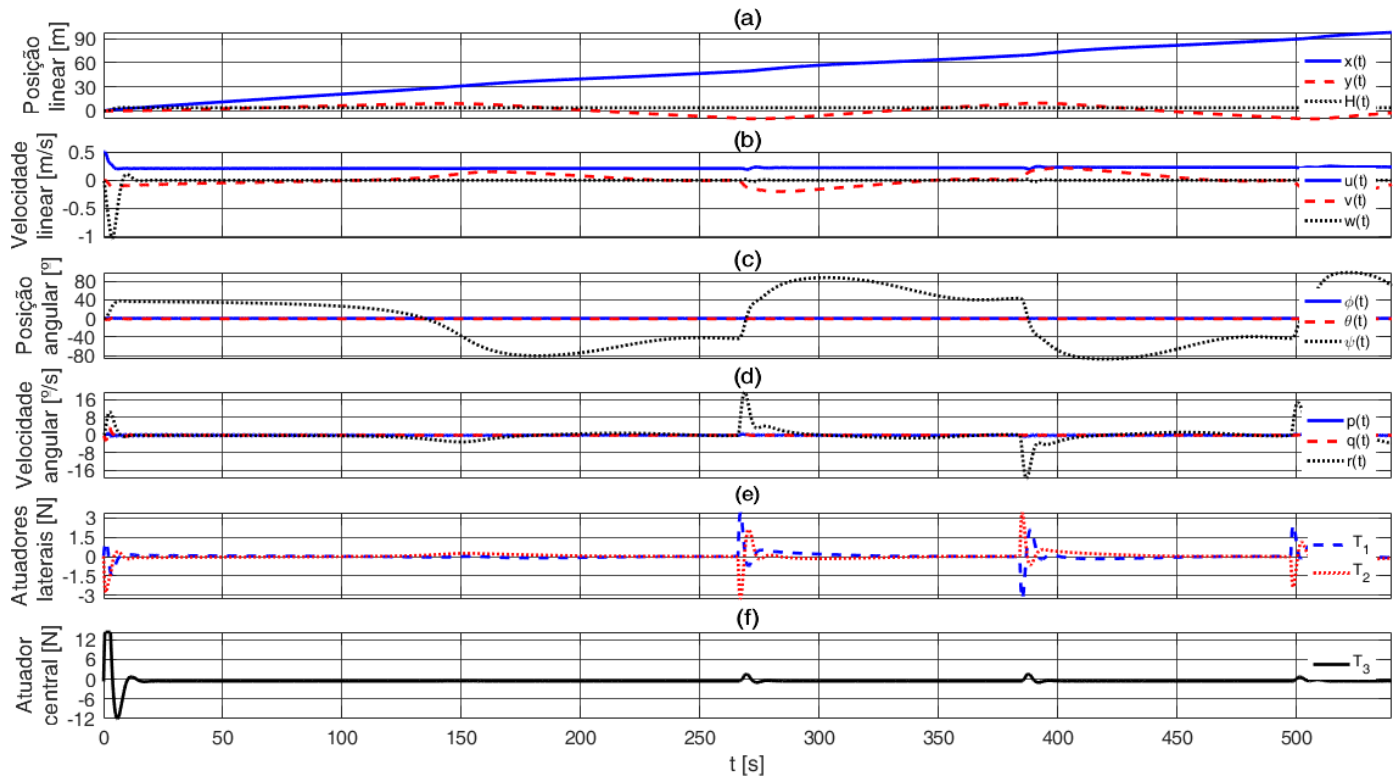
Fonte: Autor.

Esse resultado é apresentado nas Figuras 6.10 e 6.11

- **Cenário** - operação partindo do solo para seguimento de trajetória vaivém pré definida, marcada por pontos de passagem no espaço aéreo;
- **Objetivo** - verificar a capacidade de atuação conjunta do controle e da lei de guiamento;
- **Condições iniciais** - aeronave parte de do solo com ângulo de guinada nulo e velocidade de equilíbrio, $u = 0,5 \frac{m}{s}$;
- **Condições finais desejadas** - deve atingir e manter uma altitude de 4 metros e cruzar por pontos de passagem dispostos de modo a formar um caminho de vaivém no espaço aéreo;

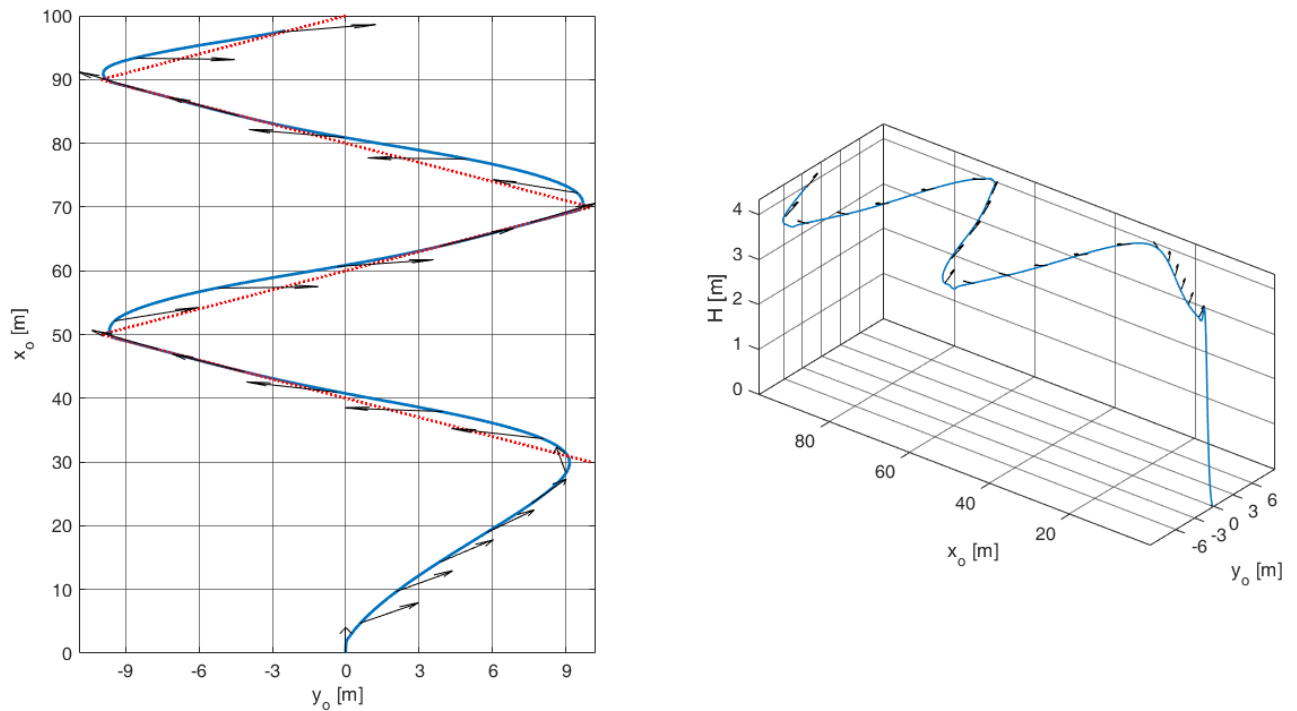
- **Resultado** - a velocidade w varia no período em que a aeronave sobe para a altitude de 4 metros. Nesse mesmo intervalo, o ângulo de guinada começa a ser ajustado pela lei de guiamento para a entrada na trajetória. A velocidade u é reduzida para cerca de 50% do seu valor inicial de modo a permitir que o dirigível encontre os pontos de passagem indicados. Inicialmente, as variações em r e ψ são suaves, se tornando mais agressivas para os pares de pontos após a entrada na trajetória, pois a aeronave precisa corrigir bruscamente a sua trajetória de azimuth devido às características do caminho que forma cantos entre os pontos de passagem. Ainda assim, as variações nas velocidades lineares do dirigível são pequenas e compatíveis com uma operação *indoor* de um dirigível de pequeno porte. Os motores laterais funcionam de maneira diferencial para dar ao dirigível o ângulo de azimuth correto, já o motor central atua nos primeiros instantes da simulação para atingir a altitude comandada e nos momentos de variação grande de ψ para garantir o rastreamento da mesma.
- **Observações** - os atuadores do dirigível operam dentro dos seus limites máximo e mínimo com saturação breve do terceiro motor no início da simulação. Percebe-se que o dirigível cruza os pontos de passagem determinados inicialmente, à exceção do primeiro, que possui um erro de menos de um metro e é a garantia de suavização da trajetória percorrida. Uma maneira de mitigar esse erro é permitir que o veículo pare completamente durante a trajetória, diferentemente do caso considerado de velocidade mínima de $0,1 \frac{m}{s}$. Outra questão é reduzir a tolerância da lei de guiamento com relação aos pontos de passagem, para esse caso, a tolerância foi de 1,5 metro. Logo, o erro para o primeiro ponto de passagem está dentro dos limites aceitáveis.

Figura 6.10 – Variação dos estados e ação dos atuadores em seguimento de trajetória vaivém a nível do mar.



Fonte: Autor.

Figura 6.11 – Caminho percorrido pela aeronave em seguimento de trajetória vaivém a nível do mar.



Fonte: Autor.

6.1.6 Caso 6 - Seguimento de trajetória circular a partir do rastreo de pontos de passagem.

O segundo caso considerado para teste conjunto da lei de guiamento e do controlador foi a simulação de uma trajetória circular. Foram definidos 12 pontos de passagem como função do raio (R) de uma circunferência na forma

$$X_k = -R \cos \Theta + x_c \quad (6.1)$$

$$Y_k = -R \sin \Theta + y_c \quad (6.2)$$

Onde Θ é o vetor de 12 elementos contendo ângulos igualmente espaçados entre 0 e 2π e x_c e y_c são as coordenadas do centro da circunferência em x e em y, respectivamente.

Para uma circunferência de raio 30 m centrada em $x_c = 40m$, $y_c = 0m$, os pontos de passagem determinados estão apresentados na tabela 6.2:

Tabela 6.2 – Pontos de passagem para a trajetória circular.

X_k	Y_k
10.0000	0
14.7624	-16.2192
27.5375	-27.2890
44.2694	-29.6946
59.6458	-22.6725
68.7848	-8.4520
68.7848	8.4520
59.6458	22.6725
44.2694	29.6946
27.5375	27.2890
14.7624	16.2192
10.0000	0.0000

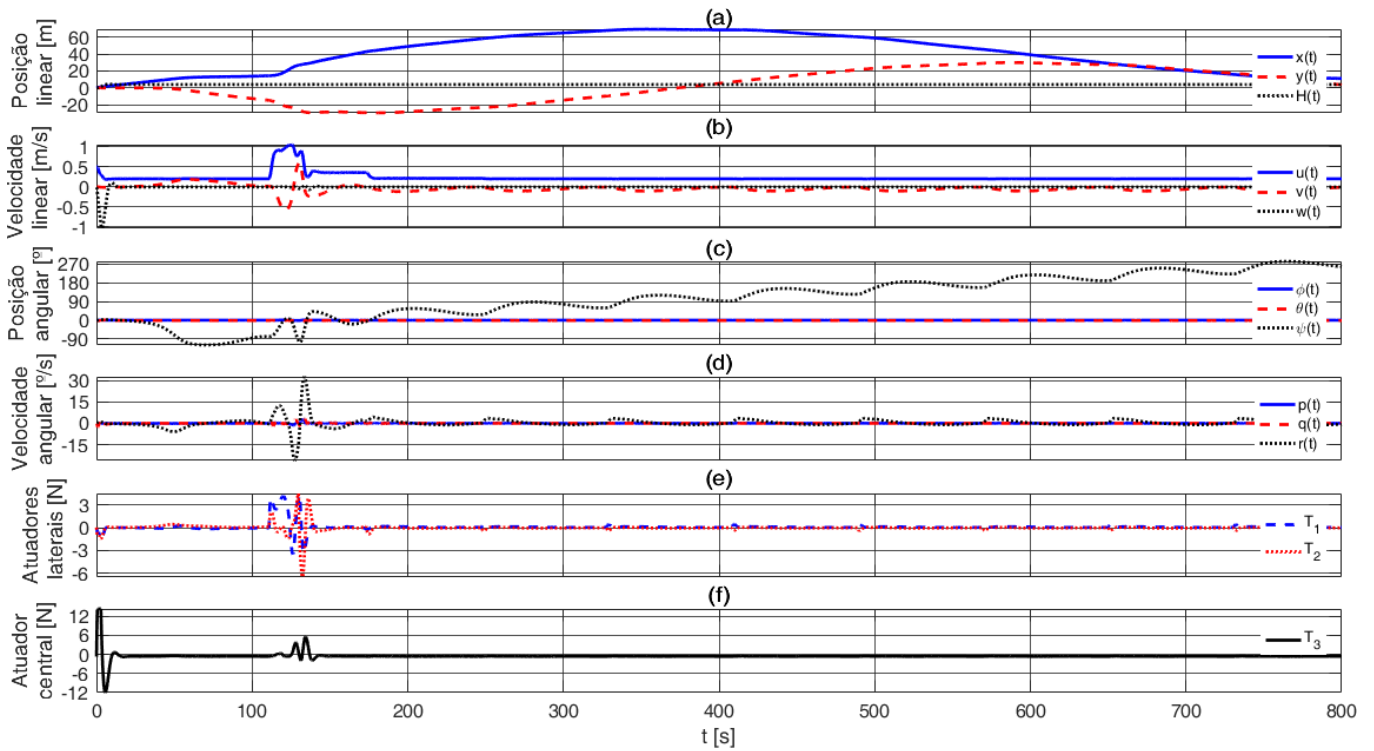
Fonte: Autor.

Esse resultado é apresentado nas Figuras 6.12 e 6.13

- **Cenário** - operação partindo do solo para seguimento de trajetória circular pré definida, marcada por pontos de passagem no espaço aéreo;
- **Objetivo** - verificar a capacidade de atuação conjunta do controle e da lei de guiamento;

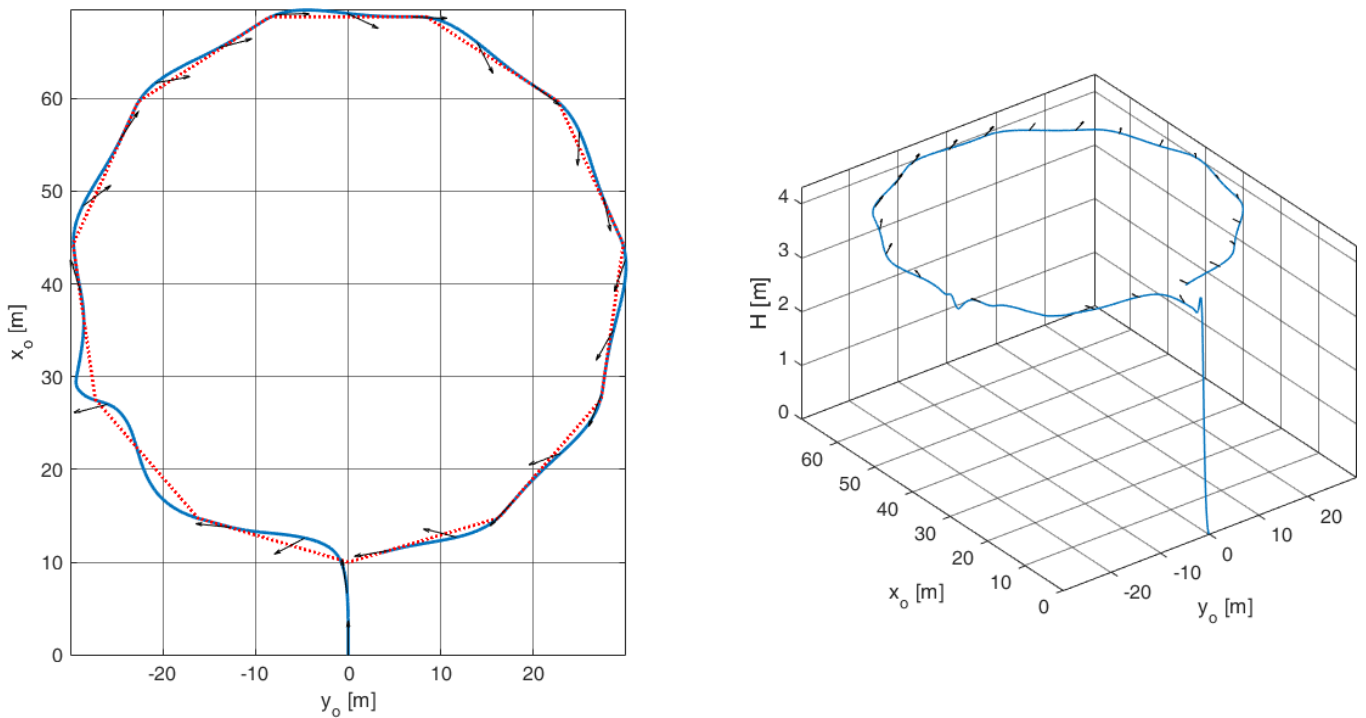
- **Condições iniciais** - aeronave parte de do solo com ângulo de guinada nulo e velocidade de equilíbrio, $u = 0,5 \frac{m}{s}$;
- **Condições finais desejadas** - deve atingir e manter uma altitude de 4 metros e cruzar por pontos de passagem dispostos de modo a formar uma circunferência no espaço aéreo;
- **Resultado** - a velocidade w varia no período em que a aeronave sobe para a altitude de 4 metros. Nesse mesmo intervalo, a velocidade u é reduzida para cerca de 50% do seu valor inicial. Inicialmente, r e ψ assumem valores negativos, no período em que o dirigível busca o primeiro ponto de passagem. Após esse ponto e pouco antes da conexão com o segundo ponto de passagem, há uma variação brusca em r e ψ que se reflete nas outras velocidades lineares e angulares. Pode-se ver claramente o momento em que os atuadores forçam o dirigível a atingir o segundo ponto de passagem, com picos nos atuadores laterais e uma compensação no terceiro motor, que a partir daí segue para o equilíbrio até o fim da operação. Os atuadores laterais, por sua vez, atuam suavemente para manter a aeronave na trajetória. A aeronave cruza o segundo e terceiro *waypoints* em recuperação da atuação agressiva dos motores e segue o restante dos pontos de passagem sem maiores problemas, com variações estruturadas do seu ângulo e velocidade de guinada, enquanto suas velocidades lineares permanecem constantes.
- **Observações** - há uma breve saturação ocorrendo no terceiro atuador durante a subida do dirigível. Fica clara a maior dificuldade do dirigível nos primeiros 3 pontos de passagem e a maneira como a trajetória é seguida suavemente logo depois. A permissão de redução da velocidade translacional até a parada pode ser capaz de evitar esse seguimento oscilante para os primeiros *waypoints*, outra possibilidade é considerar uma região maior para substituição do ponto de passagem alvo antes da entrada na trajetória.

Figura 6.12 – Variação dos estados e ação dos atuadores em seguimento de trajetória circular a nível do mar.



Fonte: Autor.

Figura 6.13 – Caminho percorrido pela aeronave em seguimento de trajetória circular a nível do mar.



Fonte: Autor.

6.2 DISCUSSÃO

Recapitulando os resultados apresentados, em nenhum momento os atuadores laterais sofreram saturação, nunca necessitando mais do que 30% de sua tração máxima para realizar as manobras, já o atuador central saturou nos casos de subida com velocidade translacional u nula e em ambos os casos de seguimento de trajetória, mas foi capaz de atingir a altitude desejada. Especialmente para o movimento de subida nos casos de seguimento de trajetória o atuador central saturou em sua atuação no sentido reverso ao atuar de modo a evitar que a aeronave se mantivesse em uma altitude acima da altitude comandada. Por essas razões fica demonstrado que uma possível vetorização dos atuadores laterais seria benéfica não apenas para amortecer as oscilações de rolamento como também para evitar a saturação do atuador central.

O sistema de guiamento cumpriu bem ambas as trajetórias propostas, mas claramente o fato de haver uma velocidade mínima não nula de operação influenciou nas manobras iniciais de aquisição da trajetória, pois para o primeiro ponto de passagem na trajetória vaivém e nos três primeiro pontos de passagem na trajetória circular foi necessário utilizar a máxima distância do círculo de aceitação projetado. A sintetização de um controlador para um ponto de operação específico não causou problemas nas tentativas de rastreamento de referência. A aeronave partiu de diferentes condições iniciais e atingiu os resultados esperados em todas elas.

7 CONCLUSÃO E SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresentou um sistema de guiamento e controle para um dirigível com três propulsores fixos destinado à operação *indoor*. O projeto do sistema de controle contou com um modelo de seis graus de liberdade (6-GDL), utilizando as dimensões físicas de um dirigível considerado referência para projetos de dirigíveis de pequeno porte e as leis de guiamento e controle foram apresentadas. A síntese do controlador utilizou o método de compensadores integrais com realimentação de estados, considerando o sistema linear invariante no tempo e matrizes obtidas por linearização em torno de ponto de equilíbrio, com velocidade de equilíbrio de $0,5 \frac{m}{s}$, a nível do mar e em voo reto nivelado. O sistema de guiamento é capaz de controlar ângulo de guinada e velocidade longitudinal da aeronave. Uma série de simulações foi realizada com o controlador projetado sem variar os seus parâmetros, para que fosse possível avaliar e demonstrar o seu funcionamento conceitual para entender suas falhas e propor trabalhos futuros. Dentre as simulações, algumas delas propuseram o seguimento de uma trajetória pré-definida, como forma de teste do sistema de guiamento e controle. As trajetórias foram escolhidas com base na ideia de operação do dirigível, isto é, em ambientes internos, em baixa velocidade e altura de operação. O veículo foi capaz de seguir as trajetórias propostas e possuiu bom comportamento frente às demais simulações. Foram feitas análises do sistema em malha fechada para algumas situações não nominais como altitude de operação diferente do nível do mar e massas adicionais. Notou-se que o controle se mantém estável e com desempenho similar nessas situações, entretanto o *hardware* considerado não é capaz de operar em todas as situações propostas, havendo necessidade de um motor central mais potente para operação com mais de 1 Kg adicional na gôndola e/ou em altitude acima de 800 metros.

Nesse sentido, algumas limitações do trabalho aqui apresentado englobam a não cobertura de todas as altitudes possíveis de operação para o dirigível considerando a altitude das várias capitais ao redor do mundo, incapacidade de controle do rolamento da aeronave, um sistema de guiamento que depende da posição linear em tempo real da aeronave com a aeronave operando em ambientes fechados, o que inviabiliza a utilização de GPS (acrônimo do inglês, *Global Positioning System*), entre outras.

Por fim, algumas sugestões para trabalhos futuros são feitas:

- Consideração de vetorização dos motores ou de um atuador lateral adicional para permitir o controle do rolamento do dirigível, a vetorização também pode auxiliar na solução do problema de saturação do atuador central;
- Projeto de um novo controlador baseado em outra técnica para fins de comparação com o projeto atual;
- Refino da lei de adaptação do perfil de velocidades para melhorar o rastreamento de traje-

tória;

- Definição de uma missão e requisitos de projeto específicos de uma operação *indoor*;
- Projeto conceitual de um sistema específico para essa operação, corrigindo a situação encontrada nesse trabalho;
- Modelagem e simulação completa dos atuadores da planta;
- Proposta, modelagem e simulação dos sensores para implementação do projeto aqui construído;
- Modelagem de outros cenários de operação e sua simulação;
- Implementação dos projetos em *Hardware-in-the-loop* e, principalmente, em uma aeronave real;
- Teste do controlador para situações de ambiente aberto, ou seja, com perturbações externas como ventos;
- Reprojetado do controlador para operação *outdoor*.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ASHRAF, M.; CHOUDHRY, M. Dynamic modeling of the airship with matlab using geometrical aerodynamic parameters. **Aerospace Science and Technology**, v. 25, n. 1, p. 56 – 64, 2013.

ASHRAF, Z.; CHOUDHRY, M. Dynamic modeling of the airship using analytical aerodynamic model. In: . [S.l.: s.n.], 2009. p. 188 – 193.

COOK, M. **Flight Dynamics Principles: A Linear Systems Approach to Aircraft Stability and Control**. Elsevier Science, 2011. (Elsevier aerospace engineering series). ISBN 9780080550367. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=sf9Qn9MS0ykC>>.

GOMES, S. B. V.; RAMOS, J. J. G. Airship dynamic modelling for autonomous operation. **Proceedings of the 1998 IEEE International Conference on Robotics and Automation**, Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE), may 1998.

IMLAY, F. The complete expressions for added mass of a rigid body moving in an ideal fluid. p. 31, 07 1961.

JENSEN, T. M. **Waypoint-Following Guidance Based on Feasibility Algorithms**. 2011. Dissertação (Master of Science in Engineering Cybernetics) — Norwegian University of Science and Technology, Trondheim, 2011.

JONES, S. P.; DELAURIER, J. D. Aerodynamic estimation techniques for aerostats and airships. **Journal of Aircraft**, v. 20, n. 2, p. 120–126, 1983.

KHOURY, G. A.; GILLET, J. D. Book; Book/Illustrated. **Airship technology**. [S.l.]: Cambridge : Cambridge University Press, 1999. Includes index. ISBN 0521607531 (pbk.).

KULCZYCKI, E. et al. Towards controller design for autonomous airships using slc and lqr methods. In: . [S.l.: s.n.], 2008.

LAMB, H. **THE INERTIA-COEFFICIENTS OF AN ELLIPSOID MOVING IN FLUID**: Reports and memoranda, no. 623. 1918.

LI, Y.; NAHON, M. Modeling and simulation of airship dynamics. **Journal of Guidance, Control, and Dynamics**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), v. 30, n. 6, p. 1691–1700, nov 2007.

LI, Y.; NAHON, M.; SHARF, I. Airship dynamics modeling: A literature review. **Progress in Aerospace Sciences**, v. 47, p. 217–239, 04 2011.

MÜLLER, J. **Autonomous navigation for miniature indoor airships**. 2013. Tese (Doutorado) — University of Freiburg, 2013.

MUELLER, J. B.; PALUSZEK, M. A. Development of an aerodynamic model and control law design for a high altitude airship. **Proceedings of the 3rd "Unmanned Unlimited" Technical Conference**, American Institute of Aeronautics and Astronautics (AIAA), sep 2004.

OGATA, K. **Engenharia de controle moderno**. PRENTICE HALL BRASIL, 2011. ISBN 9788576058106. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=iL3FYgEACAAJ>>.

SANTOS, H. **Projeto de um Dirigível Remotamente Controlado**. 2008. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Instituto Militar de Engenharia, Rio de Janeiro, 2008.

SILVA, A. L. da. **Notas de aula, Aula 4, UNIDADE 2 – PARAMETRIZAÇÃO DE ATITUDE**. 2017.

STEVENS, B.; LEWIS, F. **Aircraft Control and Simulation**. Wiley, 2003. ISBN 9780471371458. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=T0Ux6av4btIC>>.

STOCKBRIDGE, C.; ALESSANDRO, C.; MARZOCCA, P. Airship research and development in the areas of design, structures, dynamics and energy systems. **International Journal of Aeronautical and Space Sciences**, v. 13, p. 170–187, jun 2012.

TUCKERMAN, L. B. **REPORT No. 210**: Inertia factors of ellipsoids for use in airship design. [S.l.]: Bureau of Standards, 1926.

TUVERI, M.; CERUTI, A.; MARZOCCA, P. Added masses computation for unconventional airships and aerostats through geometric shape evaluation and meshing. **International Journal of Aeronautical and Space Sciences**, The Korean Society for Aeronautical & Space Sciences, v. 15, n. 3, p. 241–257, sep 2014.

VALLE, M. R. C. do. **MODELAGEM, CONTROLE E DESENVOLVIMENTO DO PROTÓTIPO DE UM DIRIGÍVEL COM APLICAÇÃO EM DETECÇÃO DE MINAS TERRESTRES**. 2014. Tese (Doutorado) — Instituto Militar de Engenharia, 2014.

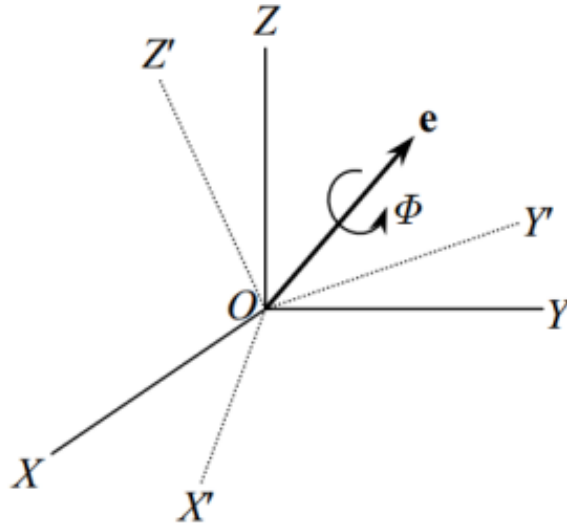
APÊNDICE A – REPRESENTAÇÕES DE ATITUDE - ÂNGULOS DE EULER E MATRIZ DOS COSSENOS DIRETORES

Qualquer número de sistemas de eixos de referência pode ser derivado pela rotação de eixos ortogonais em torno da origem, O. Às vezes, pode ser necessário usar um sistema de eixos com uma origem diferente O'. Então a transformação geral de um sistema de eixos de referência para outro consiste de uma translação da origem, e uma rotação de eixos em torno da origem. Lidar com a translação da origem é relativamente fácil em termos matemáticos, já o trato da rotação dos eixos é um tanto mais sofisticado. Quando trata-se de representações de atitude, isto é, formas de representar a orientação angular de um objeto dada pela orientação de um sistema de referência anexado ao objeto, quando vista em relação a outro sistema, existem algumas maneiras principais de trabalhar, como a matriz de cossenos diretores (DCM, acrônimo do inglês *Direction Cosine Matrix*) e a representação por ângulos de Euler. A primeira representa a orientação de um sistema de eixos OX'Y'Z' com respeito a um sistema OXYZ e a segunda representa a orientação de um sistema qualquer com respeito ao outro por 3 rotações sucessivas de eixos intermediários não colineares. A DCM tem a forma:

$$C = \begin{bmatrix} i' \cdot i & i' \cdot j & i' \cdot k \\ j' \cdot i & j' \cdot j & j' \cdot k \\ k' \cdot i & k' \cdot j & k' \cdot k \end{bmatrix} \quad (A.1)$$

Onde os vetores diretores i, j e k estão associados ao sistema OXYZ e os vetores diretores i', j' e k' estão associados ao sistema OX'Y'Z', representados na Figura A.1

Figura A.1 – Rotação de um sistema de eixos de referência.



Fonte: (SILVA, 2017)

Para o caso dos sistemas de coordenadas utilizados nesse trabalho, a DCM assume a forma:

$$C = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \theta \sin \psi & -\sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta \cos \psi - \cos \phi \sin \psi & \sin \phi \sin \theta \sin \psi + \cos \phi \cos \psi & \sin \phi \cos \theta \\ \cos \phi \sin \theta \cos \psi + \sin \phi \sin \psi & \cos \phi \sin \theta \sin \psi - \sin \phi \cos \psi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Os ângulos de Euler considerados nesse trabalho (ϕ , θ e ψ) estão associados à matrizes de rotação elementares em torno dos eixos x, y e z respectivamente, são elas:

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}; \quad (\text{A.3})$$

para a rotação positiva de ϕ em torno do eixo x.

$$C_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}; \quad (\text{A.4})$$

para a rotação positiva de θ em torno do eixo y.

$$\mathbf{C}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

para a rotação positiva de ψ em torno do eixo z.

De modo que a matriz Δ apresentada na subseção 3.2.7, é obtida, conforme (COOK, 2011), resolvendo o sistema

$$\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1 \mathbf{C}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1 \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

com a substituição das matrizes elementares.

APÊNDICE B – COEFICIENTES AERODINÂMICOS

Os coeficientes aerodinâmicos C_i aqui descritos são apresentados por (VALLE, 2014), a partir do trabalho de (MUELLER; PALUSZEK, 2004). Segue:

$$C_{X1} = -(C_{Dh0}S_h + C_{Df0}S_f + C_{Dg0}S_g) \quad (B.1)$$

$$C_{X2} = (k_2 - k_1)\eta_k I_1 S_h; \quad (B.2)$$

$$C_{Y1} = C_{X2}; \quad (B.3)$$

$$C_{Y2} = -0,5 \frac{\partial C_l}{\partial \alpha_f} S_f \eta_f; \quad (B.4)$$

$$C_{Y3} = -(C_{Dch}J_1 S_h + C_{Dcf}S_f + C_{Dcg}S_g); \quad (B.5)$$

$$C_{Z1} = C_{X2}; \quad (B.6)$$

$$C_{Z2} = C_{Y2}; \quad (B.7)$$

$$C_{Z3} = -(C_{Dch}J_1 S_h + C_{Dcf}S_f); \quad (B.8)$$

$$C_{L1} = \frac{\partial C_l}{\partial \gamma_f} S_f \eta_f l_{f3}; \quad (B.9)$$

$$C_{L2} = -C_{Dcg}S_g l_{gz}; \quad (B.10)$$

$$C_{M1} = -(k_1 - k_2)\eta_k I_3 S_h L; \quad (B.11)$$

$$C_{M2} = -0,5 \frac{\partial C_l}{\partial \alpha_f} S_f \eta_f l_{f1}; \quad (B.12)$$

$$C_{M3} = -(C_{Dch}J_2 S_h L + C_{Dcf}S_f l_{f2}); \quad (B.13)$$

$$C_{N1} = -C_{M1}; \quad (B.14)$$

$$C_{N2} = -C_{M2}; \quad (B.15)$$

$$C_{N3} = -C_{M3}; \quad (B.16)$$

$$C_{Y4} = -0,5 \frac{\partial C_l}{\partial \gamma_f} \eta_f; \quad (B.17)$$

$$C_{Z4} = C_{Y4}; \quad (B.18)$$

$$C_{M4} = -0,5 \frac{\partial C_l}{\partial \gamma_f} S_f \eta_f l_{f1}; \quad (B.19)$$

$$C_{N4} = -C_{M4}. \quad (B.20)$$

Onde $S_f = 2,6355 \text{ m}^2$ é área de referência do estabilizador, $C_{Dg0} = 0,01$ é o coeficiente de arrasto de fluxo cruzado do envelope, $S_g = 1 \text{ m}^2$ é área de referência da gôndola, $\eta_k = 0,25$ é o fator de eficiência do envelope, $\frac{\partial C_l}{\partial \alpha_f} = 5,53$ é a derivada do coeficiente de sustentação do estabilizador com relação ao ângulo de ataque de incidência zero, $\eta_f = 0,29$ é o fator de eficiência do estabilizador, $C_{Dch} = 0,5$ é o coeficiente de

arrasto de fluxo cruzado do envelope, $C_{Dcf} = 1$ é o coeficiente de arrasto de fluxo cruzado do estabilizador, $C_{Dcg} = 1$ é o coeficiente de arrasto de fluxo cruzado da gôndola, $l_{gz} = 1,2019 \text{ m}$ é a distância do centro geométrico da gôndola até a origem do eixo z, $l_{f1} = 2,4459 \text{ m}$ é a distância, em x, da origem até o centro aerodinâmico dos estabilizadores, $l_{f2} = 2,8256 \text{ m}$ é a distância, em x, da origem até o centro geométrico dos estabilizadores, $l_{gx} = 0,2 \text{ m}$ é a distância do centro geométrico da gôndola até a origem do eixo x, $\frac{\partial C_l}{\partial \gamma_f} = 0$ é a derivada do coeficiente de sustentação do estabilizador com relação ao ângulo de deflexão do *flap*, $l_{f3} = 0,97 \text{ m}$ é a distância do centro aerodinâmico dos estabilizadores até a origem do eixo x e $C_{Df0} = 0,006$ é o coeficiente de arrasto de incidência zero do estabilizador.

Ainda, C_{Dh0} é o coeficiente de arrasto de incidência zero do envelope dado por

$$C_{Dh0} = \left[1 + 1.5 \left[\frac{D}{L} \right]^{\frac{3}{2}} + 7 \left[\frac{D}{L} \right]^{\frac{3}{2}} \right] \left[\frac{S_{wet}}{S_h} \right] C_f; \quad (\text{B.21})$$

Em que D e L são do diâmetro máximo e comprimento do envelope, C_f e S_{wet} são, respectivamente, o coeficiente de arrasto de fricção de pele e a área molhada do corpo, dados por

$$S_{wet} = 4 \left[\frac{L}{D} \right]^{\frac{1}{3}} (0,7LS_b)^{\frac{2}{3}}; \quad (\text{B.22})$$

$$C_f = \frac{0,074}{Re^{\frac{1}{5}}} \quad (\text{B.23})$$

Com Re sendo o número de Reynolds e $S_b = \pi b^2$ a área frontal do dirigível. Por fim,

$$J_1 = \frac{b}{2S_h} \left(a_1 \frac{\pi}{2} + a_2 \sqrt{1 - f^2} f \right) + 2a_2 \sin^{-1} f; \quad (\text{B.24})$$

$$I_1 = \pi \frac{b^2}{S_h} (1 - f^2); \quad (\text{B.25})$$

$$I_3 = \pi \frac{b^2}{3LS_h} (a_1 - 2a_2 f^3 - 3a_1 f^2) - \frac{x_{cv}}{L} I_1; \quad (\text{B.26})$$

$$J_2 = J_1 \frac{a_1 - x_{cv}}{L} + \frac{2b}{3LS_h} (a_2^2 - a_1^2 - a_2^2 (1 - f^2)^{\frac{3}{2}}); \quad (\text{B.27})$$

com $f = \frac{l_h - a_1}{a_2}$.

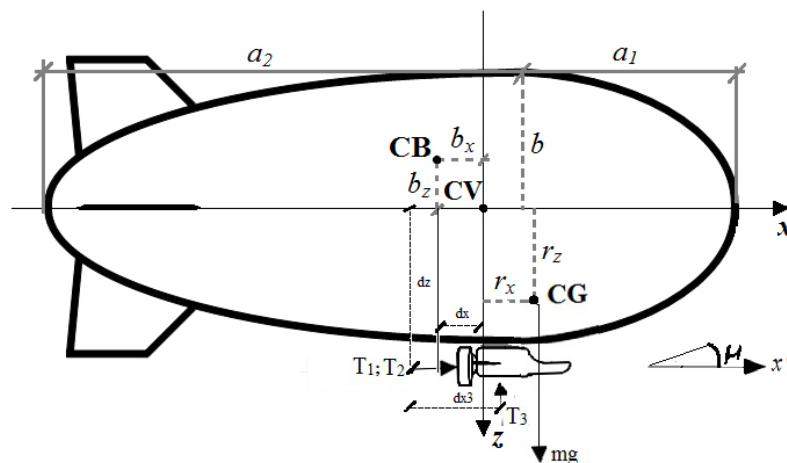
APÊNDICE C – DEDUÇÃO DO VETOR DE FORÇAS E MOMENTOS PROPULSIVOS

Conforme apresentado em (VALLE, 2014), parte-se de uma configuração genérica de dois motores laterais com vetorização individual e um motor central sem vetorização para escrever o vetor de forças e momentos propulsivos:

$$F_P = \begin{bmatrix} T_1 \cos \mu_1 + T_2 \cos \mu_2 \\ 0 \\ -T_1 \sin \mu_1 - T_2 \sin \mu_2 - T_3 \\ T_1 d_y \sin \mu_1 - T_2 d_y \sin \mu_2 \\ T_1 (d_z \cos \mu_1 - d_x \sin \mu_1) + T_2 (d_z \cos \mu_2 - d_x \sin \mu_2) - T_3 d_{x3} \\ T_1 \cos \mu_1 d_y - T_2 \cos \mu_2 d_y \end{bmatrix}. \quad (C.1)$$

onde d_x é a distância da posição dos motores laterais no sentido longitudinal ao Centro de Empuxo, d_y é a metade da distância em y entre os motores T_1 e T_2 , d_z é a distância vertical entre os motores laterais até o plano xy e d_{x3} é a distância, no sentido longitudinal, do motor T_3 ao Centro de Empuxo. Todas essas distâncias são medidas no SRC. Ainda, μ_1 e μ_2 são os ângulos de vetorização dos motores T_1 e T_2 , respectivamente, medidos em relação a um eixo x' qualquer, paralelo ao eixo horizontal da aeronave. De maneira simplificada e sem escala algumas dessas distâncias podem ser observadas na Figura C.1.

Figura C.1 – Definições geométricas para o cálculo do vetor de propulsão.



Fonte: Adaptado de (VALLE, 2014)

Fazendo com que a vetorização dos motores seja igual, chegamos a configuração proposta por (GOMES; RAMOS, 1998) e (ASHRAF; CHOUDHRY, 2009). Considerando-a

nula, temos a configuração proposta nesse trabalho:

$$F_P = \begin{bmatrix} T_1 + T_2 \\ 0 \\ -T_3 \\ 0 \\ (T_1 + T_2)d_z - T_3d_x \\ (T_1 - T_2)d_y \end{bmatrix}. \quad (\text{C.2})$$

APÊNDICE D – MATRIZ DE MASSAS E INÉRCIAS VIRTUAIS

Conforme exposto em (TUVERI; CERUTI; MARZOCCA, 2014), a resposta de um corpo a uma força aplicada em uma direção específica geralmente induz uma aceleração que envolve três componentes de translação e três componentes angulares:

$$\vec{a} = [\dot{u} \ \dot{v} \ \dot{w} \ \dot{p} \ \dot{q} \ \dot{r}]^T \quad (D.1)$$

Onde as seis componentes de força geradas pelos efeitos de massas adicionadas são:

$$\vec{f}_{am} = [X_{am} \ Y_{am} \ Z_{am} \ L_{am} \ M_{am} \ N_{am}]^T \quad (D.2)$$

Em que o subscrito significa *added masses*, do inglês massas adicionadas.

Como resultado, os efeitos inerciais do fluido, devido às seis possíveis componentes de aceleração impostas ao corpo, podem ser identificados por

$$\vec{f}_{am} = \mathbf{M}_a \vec{a} \quad (D.3)$$

Onde, a matriz de massa adicionada para um corpo, considerando seis graus de liberdade, é expressa como:

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & -X_{\dot{v}} & -X_{\dot{w}} & -X_{\dot{p}} & -X_{\dot{q}} & -X_{\dot{r}} \\ -Y_{\dot{u}} & -Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{w}} & -Y_{\dot{p}} & -Y_{\dot{q}} & -Y_{\dot{r}} \\ -Z_{\dot{u}} & -Z_{\dot{v}} & -Z_{\dot{w}} & -Z_{\dot{p}} & -Z_{\dot{q}} & -Z_{\dot{r}} \\ -L_{\dot{u}} & -L_{\dot{v}} & -L_{\dot{w}} & -L_{\dot{p}} & -L_{\dot{q}} & -L_{\dot{r}} \\ -M_{\dot{u}} & -M_{\dot{v}} & -M_{\dot{w}} & -M_{\dot{p}} & -M_{\dot{q}} & -M_{\dot{r}} \\ -N_{\dot{u}} & -N_{\dot{v}} & -N_{\dot{w}} & -N_{\dot{p}} & -N_{\dot{q}} & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix} . \quad (D.4)$$

Os termos J_k são chamados de derivadas de massa adicionada e caracterizam as propriedades de massa adicionada do corpo. Cada derivada tem a forma indicada pela relação típica $J_k = \frac{\partial J}{\partial k}$, conforme (IMLAY, 1961).

Se considerarmos que o escoamento ao redor do corpo é potencial, pode-se mos-

trar, conforme (TUVERI; CERUTI; MARZOCCA, 2014), que a matriz \mathbf{M}_a deve ser simétrica.

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & -X_{\dot{v}} & -X_{\dot{w}} & -X_{\dot{p}} & -X_{\dot{q}} & -X_{\dot{r}} \\ & -Y_{\dot{v}} & -Y_{\dot{w}} & -Y_{\dot{p}} & -Y_{\dot{q}} & -Y_{\dot{r}} \\ & & -Z_{\dot{w}} & -Z_{\dot{p}} & -Z_{\dot{q}} & -Z_{\dot{r}} \\ & & & -L_{\dot{p}} & -L_{\dot{q}} & -L_{\dot{r}} \\ & Sim & & & -M_{\dot{q}} & -M_{\dot{r}} \\ & & & & & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix}. \quad (D.5)$$

É possível realizar mais simplificações na matriz de massas e inércias adicionadas. Para corpos com um plano de simetria (por exemplo, plano de simetria $Oz = 0$), qualquer aceleração limitada a este plano (\dot{u} , \dot{v} , \dot{r}) não produzirá força de massa adicional. Para o caso proposto nesse trabalho, há simetria no plano Oxz , logo, conforme (IMLAY, 1961):

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} -X_{\dot{u}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & -Y_{\dot{v}} & 0 & -Y_{\dot{p}} & 0 & -Y_{\dot{r}} \\ & & -Z_{\dot{w}} & 0 & -Z_{\dot{q}} & 0 \\ & & & -L_{\dot{p}} & 0 & -L_{\dot{r}} \\ & Sim & & & -M_{\dot{q}} & 0 \\ & & & & & -N_{\dot{r}} \end{bmatrix}. \quad (D.6)$$

Ou, escrevendo de maneira compacta:

$$\mathbf{M}_a = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}; \quad (D.7)$$

onde

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}_{11} &= \begin{bmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ 0 & m_{22} & 0 \\ 0 & 0 & m_{33} \end{bmatrix} ; \\
 \mathbf{M}_{12} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{24} & 0 & m_{26} \\ 0 & m_{35} & 0 \end{bmatrix} ; \\
 \mathbf{M}_{21} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ m_{51} & 0 & m_{53} \\ 0 & m_{62} & 0 \end{bmatrix} ; \\
 \mathbf{M}_{22} &= \begin{bmatrix} m_{44} & 0 & m_{46} \\ 0 & m_{55} & 0 \\ m_{64} & 0 & m_{66} \end{bmatrix} ;
 \end{aligned}
 \tag{D.8}$$