

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Lorenzo Quevedo Mantovani

**SIMULAÇÃO E CONTROLE DE SATÉLITES COM PAINÉIS FLEXÍVEIS**

Santa Maria, RS  
2019

**Lorenzo Quevedo Mantovani**

**SIMULAÇÃO E CONTROLE DE SATÉLITES COM PAINÉIS FLEXÍVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

ORIENTADOR: Prof. André Luis da Silva

COORIENTADOR: Prof. Pedro Paglione

Santa Maria, RS  
2019

**Lorenzo Quevedo Mantovani**

**SIMULAÇÃO E CONTROLE DE SATÉLITES COM PAINÉIS FLEXÍVEIS**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do grau de **Bacharel em Engenharia Aeroespacial**.

**Aprovado em 9 de julho de 2019:**

---

**André Luis da Silva, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**Pedro Paglione, Dr. (UFSM)**  
(Coorientador)

---

**Tiago dos Santos, Dr. (UFSM)**

Santa Maria, RS  
2019

## **DEDICATÓRIA**

*Aos meus pais!*

## **AGRADECIMENTOS**

*Agradeço aos meus pais, pois à eles devo tudo.*

*Agradeço meu Professor Orientador Dr. André Luis da Silva por toda sua dedicação, não somente com meu TCC, como durante toda a minha graduação. Também agradeço imensamente o Professor e Coorientador, Dr. Pedro Paglione, pois tornou esse trabalho possível, e me fez apreciar ainda mais a Engenharia Aeroespacial. Ademais, gostaria de expressar meus agradecimentos ao Prof. Dr. Tiago dos Santos por todo o apoio fornecido durante a elaboração deste trabalho.*

*Agradeço meu Mentor e Orientador, Dr. Nelson Jorge Schuch, por compartilhar sua sabedoria, possibilitando que eu me tornasse uma pessoa melhor tanto na esfera profissional, como também pessoal.*

*Por fim, agradeço a todos meus familiares, amigos, professores e colegas.*

*All we have to decide is what to do with  
the time that is given us.*

*(J.R.R. Tolkien)*

## RESUMO

### SIMULAÇÃO E CONTROLE DE SATÉLITES COM PAINÉIS FLEXÍVEIS

AUTOR: Lorenzo Quevedo Mantovani

ORIENTADOR: André Luis da Silva

COORIENTADOR: Pedro Paglione

A crescente demanda de potência dos sistemas espaciais, aliada a redução de massa dos componentes, em alguns casos cria a necessidade das estruturas, antes consideradas como corpo rígido, serem tratadas como corpos flexíveis. Isso torna-se necessário pois a dinâmica de vibração desses corpos pode tanto prejudicar o apontamento de cargas úteis, como levar a interferência nos sistemas de controle gerando inclusive modos de ressonância. Para tanto, esse trabalho utiliza a teoria de multicorpos, incorporada a modelagem de estruturas por formas modais (para vigas e placas), para simular um satélite em ambiente espacial com dois painéis solares engastados. Para a supressão da vibração das estruturas flexíveis, são consideradas forças de controle atuando na estrutura de cada corpo, onde os ganhos são determinados por duas técnicas, alocação de polos e Rastreador Linear Quadrático com compensador PID. Além disso, rodas de reação são empregadas para realizar o controle de atitude - utilizando um Rastreador Linear Quadrático - de forma a simular as manobras de apontamento em órbita. Os resultados apresentam que o controle foi capaz de reduzir a vibração dos painéis na presença de perturbações, enquanto que manobras de atitude não geraram influencia significativa sobre os modos flexíveis para as condições simuladas.

**Palavras-chave:** Multicorpos. Alocação de polos. Rastreador Linear Quadrático. Placas engastadas. Vigas engastadas

## **ABSTRACT**

### **SIMULATION AND CONTROL OF SATELLITES WITH FLEXIBLE PANELS**

**AUTHOR:** Lorenzo Quevedo Mantovani

**ADVISOR:** André Luis da Silva

**CO-ADVISOR:** Pedro Paglione

The increasing power requirement in Space Systems, combined with the mass reduction of the components, in some cases creates the need for analyzing structures as flexible bodies. This is justified by the fact that the bodies' vibration dynamics can impair the pointing of payloads, as well as generating interferences in the control systems, eventually leading to exciting resonance modes. Hence, this work uses the multibody theory integrated with the structural model based on mode shapes (for beams and plates) to simulate a satellite in the space environment with two solar arrays attached to it. To suppress the vibration of the flexible structure, two control forces are considered acting on the structure of each solar array, in which the gains are determined by two techniques, pole placement and Linear Quadratic Tracker with PID compensators. Moreover, reaction wheels are employed to perform the attitude control - using Linear Quadratic Tracker - to simulate in orbit's angular positioning maneuvers. The results obtained show that the control method used was capable of reducing the solar arrays vibrations while being exposed to perturbations. Excitation of the flexible modes induced by the attitude maneuver were negligible for the conditions assumed in this work.

**Keywords:** Multibody. Pole Placement. Linear Quadratic Tracker. Cantilever Beams. Cantilever Plates



## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Sistema Inercial Centrado na Terra .....	18
Figura 2.2 – Sistema Localmente Vertical Localmente Horizontal .....	18
Figura 2.3 – Sistema de referência do segmento do corpo .....	19
Figura 3.1 – Rotações consecutivas utilizando Ângulos de Euler .....	20
Figura 3.2 – Eixo de Euler e ângulo principal de rotação .....	21
Figura 4.1 – Elemento de Viga .....	27
Figura 4.2 – Exemplo de viga engastada .....	29
Figura 5.1 – Decomposição da posição de um ponto $P$ arbitrário .....	34
Figura 6.1 – Diagrama de um sistema Rastreador Linear Quadrático .....	43
Figura 6.2 – Batentes de uma ação de controle .....	48
Figura 6.3 – Atuadores piezoelétricos dispostos sobre estrutura flexível .....	50
Figura 7.1 – Configuração adotada do satélite .....	51
Figura 7.2 – Sistema de referência do corpo 1 .....	53
Figura 7.3 – Primeiro modos dos painéis com perturbação e sem sistema de controle .....	57
Figura 7.4 – Velocidade angular do satélite perturbação e sem sistema de controle ..	57
Figura 7.5 – Coordenadas flexíveis do painel direito .....	58
Figura 7.6 – Primeiro modos dos painéis com perturbação e controle por alocação de polos .....	59
Figura 7.7 – Comparação de $q_{f1}^1$ perturbada sem controle e com controle por alocação de polos .....	59
Figura 7.8 – Comparação da velocidade angular do satélite com e sem controle por alocação de polos .....	60
Figura 7.9 – Ações de controle geradas pela alocação de polos .....	60
Figura 7.10 – Primeiro modos dos painéis com perturbação e controle LQT com compensador PID .....	61
Figura 7.11 – Comparação de $q_{f1}^1$ perturbada sem controle e com controle LQT com compensador PID .....	62
Figura 7.12 – Ações de controle geradas pelo compensador PID .....	62
Figura 7.13 – Ações de controle geradas pelo compensador PID .....	63
Figura 7.14 – Rastreio de posição angular .....	64
Figura 7.15 – Ações de controle durante o rastreio de posição angular .....	65
Figura 7.16 – Velocidade angular das rodas de reação durante o rastreio de posição angular .....	65
Figura 7.17 – Deflexão dos painéis devido o rastreio de posição angular .....	66
Figura 7.18 – Primeiro modos dos painéis (placa) com perturbação e sem sistema de controle .....	67
Figura 7.19 – Comparação da resposta $q_{f1}^1$ pela modelagem de viga e placa .....	68
Figura 7.20 – Coordenadas flexíveis do painel direito pela modelagem de placas ....	68
Figura 7.21 – Força perturbativa no eixo $Z^3$ .....	69
Figura 7.22 – Trajetória no sistema ECI .....	70
Figura A.1 – Formas modais de Flexão .....	75
Figura A.2 – Formas modais de Torção .....	76
Figura A.3 – Primeira forma modal de placa .....	77
Figura A.4 – Segunda forma modal de placa .....	77
Figura A.5 – Terceira forma modal de placa .....	78

Figura A.6 – Quarta forma modal de placa .....	78
Figura C.1 – Coordenadas $q_{f_2}$ modo flexível .....	82
Figura C.2 – Coordenadas $q_{f_3}$ modo flexível .....	83
Figura C.4 – Velocidade angular com perturbação em $q_{f_3}$ .....	83
Figura C.3 – Coordenadas $q_{f_4}$ modo flexível .....	84
Figura C.5 – Coordenadas $q_{f_2}$ modo flexível para placas .....	84
Figura C.6 – Coordenadas $q_{f_4}$ modo flexível para placas .....	85
Figura C.7 – Comparação da resposta de $\phi$ com e sem o Anti Wind-Up .....	86
Figura C.8 – Comparação da ação de controle $u_x$ com e sem o Anti Wind-Up .....	86
Figura C.9 – Comparação da ação de controle $u_x$ com e sem o Anti Wind-Up com perturbação em $q_{f_q}^1$ .....	87

## LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1 – Valores de $\alpha$ e $\sigma$ para viga engastada .....	30
---	----

## LISTA DE SÍMBOLOS

$\mathbf{a}$	Vetor nadir normalizado
$b$	Largura da placa
$c$	Espessura da placa
$\mathbf{e}$	Vetor do eixo de Euler
$\mathbf{f}$	Vetor de rastreo do controlador
$\mathbf{g}$	Saída do compensador
$h$	Constante da solução da forma modal
$\mathbf{k}$	Ação de controle
$l$	Comprimento da estrutura
$\mathbf{m}_{rr}^i$	Matriz de massa de translação do corpo $i$
$\mathbf{m}_{ff}^i$	Matriz de modos flexíveis do corpo $i$
$n^i$	Número de coordenadas elásticas do corpo $i$
$n_{\Theta}^i$	Número de coordenadas de rotação do corpo $i$
$n_c$	Número de equações de restrição
$\mathbf{q}_f^i$	Vetor de coordenadas elásticas do corpo $i$
$\mathbf{r}_P^i$	Vetor de posição de um ponto $P$ no corpo $i$ escrito no ECI
$\mathbf{s}$	Vetor de erros de rastreo
$\bar{\mathbf{u}}^i$	Posição de um ponto $P$ no corpo $i$ escrito no BRF
$\bar{\mathbf{u}}_0^i$	Posição indeformada de um ponto $P$ no corpo $i$ escrito no BRF
$\bar{\mathbf{u}}_f^i$	Posição deformada de um ponto $P$ no corpo $i$ escrito no BRF
$v$	Função de deflexão da viga
$\mathbf{w}$	Estados do compensador
$\mathbf{x}$	Estados da planta
$\mathbf{y}$	Estados medidos da planta
$\mathbf{z}$	Estados de performance da planta
$\mathbf{A}^i$	Matriz de rotação do corpo $i$
$AR$	Área da seção transversal da viga

$\mathbf{B}^i$	Derivada parcial da matriz de rotação pelas coordenadas de posição angular do corpo $i$
$\mathbf{C}$	Matriz de saída
$\mathbf{D}_{ff}$	Matriz de amortecimento
$E$	Módulo de elasticidade
$\mathbf{F}$	Matrizes do compensador
$G_{sm}$	Módulo de cisalhamento
$\mathbf{G}$	Matriz de correlação entre derivada de coordenadas de posição angular e velocidade angular
$\mathbf{H}$	Matriz de performance
$I$	Momento de inércia de área
$\mathbf{I}_{\theta\theta}^i$	Matriz de inércia do corpo $i$
$\mathbf{I}_{\theta f}^i$	Matriz de acoplamento entre rotação e modos flexíveis do corpo $i$
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$J_0$	Momento polar de inércia de massa por unidade de comprimento
$\mathbf{K}_{ff}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{L}$	Vetor de estados derivado parcialmente em relação as coordenadas generalizadas
$M$	Momento fletor atuante na viga
$\mathbf{M}^i$	Matriz de massa generalizada do corpo $i$
$\mathbf{N}$	Matrizes da planta
$\mathbf{Q}$	Forças externas generalizadas
$\mathbf{R}$	Vetor posição da origem do BRF do corpo $i$ em relação ao ECI
$\mathbf{S}^i$	Matriz de deslocamento associado as formas modais associado ao corpo $i$
$\mathbf{S}_r$	Matriz antisimétrica de rotação
$S_x$	Esforço cortante da viga na direção x
$S_y$	Esforço cortante da viga na direção y
$\bar{\bar{\mathbf{S}}}^i$	Matriz de acoplamento entre rotação e modos flexíveis do corpo $i$
$\bar{\bar{\mathbf{S}}}_t^i$	Matriz de acoplamento entre rotação e translação do corpo $i$
$T$	Forma modal de torção

$\mathbf{U}$	Matriz de ganhos do controlador
$V$	Força cisalhante por unidade de comprimento
$W$	Trabalho
$\mathbf{Y}$	Função de custo
$Z$	Forma modal de flexão
$\alpha$	Constante associada à equação de viga
$\eta$	Frequência dos modos flexíveis
$\gamma$	Coeficiente associado ao amortecimento estrutural
$\beta$	Coeficiente associado ao amortecimento estrutural
$\varrho$	Ângulo de fase
$\epsilon$	Vetor de deformações
$\lambda$	Multiplicadores de Lagrange
$\varphi$	Frequências naturais associadas as estruturas
$\omega$	Velocidade angular
$\omega_n$	Velocidade angular da órbita no sistema LVLH
$\phi$	Ângulo de rotação em torno do eixo $x$
$\theta$	Ângulo de rotação em torno do eixo $y$
$\psi$	Ângulo de rotação em torno do eixo $z$
$\sigma$	Vetor de tensões
$\rho$	Densidade
$\Gamma$	Ângulo de torção da viga
$\Lambda$	Equações de restrição
$\Omega$	Velocidade angular das rodas de reação
$\Pi$	Solução temporal associada a forma modal
$\Phi$	Ângulo principal de rotação
$\Theta$	Quaternion
$\Theta_v$	Componente vetorial do quaternion
$\Upsilon$	Quantidade de movimento angular

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>SISTEMAS DE REFERÊNCIA</b>	<b>17</b>
2.1	INERCIAL CENTRADO NA TERRA	17
2.2	SISTEMA LOCALMENTE VERTICAL LOCALMENTE HORIZONTAL	17
2.3	SISTEMA DO CORPO E SEGMENTO DO CORPO	19
<b>3</b>	<b>PARAMETRIZAÇÃO DE ATITUDE</b>	<b>20</b>
3.1	ÂNGULOS DE EULER	20
<b>3.1.1</b>	<b>Cinemática dos Ângulos de Euler</b>	<b>22</b>
3.2	QUATERNIONS	23
<b>3.2.1</b>	<b>Cinemática dos Quatérnions</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>MODELAGEM DE PAINÉIS SOLARES FLEXÍVEIS</b>	<b>26</b>
4.1	MODELAGEM POR VIGAS	26
<b>4.1.1</b>	<b>Teoria de flexão e torção de vigas</b>	<b>26</b>
4.2	MODELAGEM POR PLACAS	31
<b>5</b>	<b>TEORIA DE MULTICORPOS</b>	<b>33</b>
5.1	VELOCIDADE E ACELERAÇÃO GENERALIZADAS	34
5.2	ENERGIA CINÉTICA	35
5.3	MATRIZ DE MASSA GENERALIZADA	36
5.4	FORÇA GENERALIZADA	38
5.5	SISTEMA DE EQUAÇÕES	40
5.6	RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS	41
<b>6</b>	<b>SISTEMA DE CONTROLE</b>	<b>43</b>
6.1	RASTREADOR LINEAR QUADRÁTICO	43
<b>6.1.1</b>	<b>Minimização do Índice de Desempenho</b>	<b>46</b>
6.2	ALOCÇÃO DE POLOS	47
6.3	ANTI WIND-UP	47
6.4	ATUADORES	49
<b>6.4.1</b>	<b>Rodas de reação</b>	<b>49</b>
<b>6.4.2</b>	<b>Atuadores para supressão de vibração</b>	<b>50</b>
<b>7</b>	<b>SIMULAÇÃO E RESULTADOS</b>	<b>51</b>
7.1	MODELAGEM DOS CORPOS	52
7.2	SISTEMAS DE CONTROLE ATIVO	55
7.3	RESULTADOS PARA MODELO ESTRUTURAL POR VIGAS	56
<b>7.3.1</b>	<b>Resposta de modo flexível com controle por alocação de polos</b>	<b>58</b>
<b>7.3.2</b>	<b>Resposta de modo flexível com controle por LQT PID</b>	<b>61</b>
<b>7.3.3</b>	<b>Comparação dos resultados dos controles de supressão de vibração</b>	<b>63</b>
<b>7.3.4</b>	<b>Sistema de Controle de Atitude</b>	<b>63</b>
7.4	RESULTADOS PARA MODELOS ESTRUTURAL POR PLACAS	66
<b>7.4.1</b>	<b>Perturbação de Translação</b>	<b>67</b>
<b>8</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>71</b>
	<b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>73</b>
	<b>APÊNDICE A – FORMAS MODAIS</b>	<b>75</b>
	<b>APÊNDICE B – MATRIZES DE CONTROLE</b>	<b>79</b>
	<b>APÊNDICE C – OUTROS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO</b>	<b>82</b>

## 1 INTRODUÇÃO

O desejo humano da conquista do desconhecido - além de fatores políticos e econômicos - iniciou a corrida espacial que, dentre os mais diversos frutos, trouxe os satélites artificiais. As formas e tamanhos variam desde um femtossatélite, com menos de 100 g (MARTÍNEZ, 2010), até a Estação Espacial Internacional (ISS, do inglês *International Space Station*) com mais de 420 toneladas. Esses equipamentos são postos na órbita da Terra com os mais diversos intuitos tais como servir de sistemas de comunicação e georreferenciamento, ou mesmo imageamento do espaço profundo.

Com algumas tendências como maior necessidade de potência e menor peso, tanto a geometria como a estrutura dos sistemas espaciais vem mudando. Essas novas características empregam materiais mais leves e com maior resistência, além do aumento da área de painéis solares, fazendo com que algumas análises, antes desprezíveis, tornem-se necessárias. Isso pois o comportamento de estruturas maiores e com menor peso faz com que as hipóteses de corpo rígido não possam ser adotadas (não sem risco de dinâmicas importantes serem negligenciadas) tendo, portanto, que ser tratadas como corpos flexíveis.

Para um grande satélite geoestacionário que supre serviços de comunicação, existem estruturas de painéis solares (SAG, do inglês *Solar Array Generator*) que podem atingir mais de 10 metros de comprimento, além de possuírem diversas antenas, evidenciando a importância de uma análise mais detalhada de corpo flexível. Entretanto, um satélite de menor porte como um CubeSat que apresente *booms* (mecanismo extensível a partir do corpo do satélite) também se torna um alvo de estudo. Ademais, durante o processo de abertura dos SAGs e liberação de outros componentes, diversos tipos de vibrações podem se propagar pela estrutura. Como cita Mazzini (2015), as dinâmicas de corpo flexível podem interferir na estabilidade de sistemas de controle ou também gerar uma grande excitação do sistema de controle.

A análise de estruturas com corpos flexíveis pode ser realizada, entre outras formas, utilizando a teoria de multicorpos. A abordagem por multicorpos considera não somente o aspecto de múltiplos corpos conectados das mais diversas maneiras, mas também que a dinâmica flexível seja levada em consideração. Para isso, são adotados modelos estruturais que mais bem representem o comportamento desejado, tais como formas modais e elementos finitos (permite que geometrias mais genéricas sejam empregadas).

Além do estudo da dinâmica em si de multicorpos com dinâmicas flexíveis, a presença de perturbações externas e ações de controle se tornam necessárias para que um modelo mais geral (e real) possa ser desenvolvido e analisado. Em satélites, essas perturbações podem ser resultantes das interações de três corpos, arrasto atmosférico, pressão por radiação solar (PRS), torque gravitacional e magnético (WIE, 2008). Enquanto que as



ações de controle podem ser utilizadas para manutenção/transferência de órbita ou rastreamento e correção da atitude.

Com o objetivo de analisar a resposta de estruturas flexíveis devido a perturbações, nesse trabalho é utilizada a dinâmica de multicorpos associada às formas modais - com o intuito de descrever o comportamento de painéis solares. Para tanto, duas abordagens são adotadas para a modelagem dos SAGs, sendo elas a modelagem como vigas engastadas e como placas engastadas. Ademais, são considerados sistemas de controle tanto para a atitude do satélite como para a supressão da vibração do painel solar. De forma a tornar o caso mais próximo da realidade, os atuadores de controle de atitude são considerados como sendo rodas de reação sujeitas a batentes como a existência de torque gravitacional é utilizado.

## 2 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Os diversos sistemas de referência empregados são de suma importância para o desenvolvimento das equações de forma clara, permitindo uma melhor compreensão do problema. De maneira geral, foram utilizados três sistemas de referência.

### 2.1 INERCIAL CENTRADO NA TERRA

O Sistema Inercial Centrado na Terra (ECI), é fixo na Terra conforme apresenta a Figura (2.1). Os eixos são dispostos de maneira que:

- Eixo  $X_{ECI}$ : Alinhado com o vetor do Equinócio Vernal;
- Eixo  $Z_{ECI}$ : Alinhado com o eixo de rotação da Terra, apontando para o polo Norte;
- Eixo  $Y_{ECI}$ : Está no plano equatorial completando o sistema.

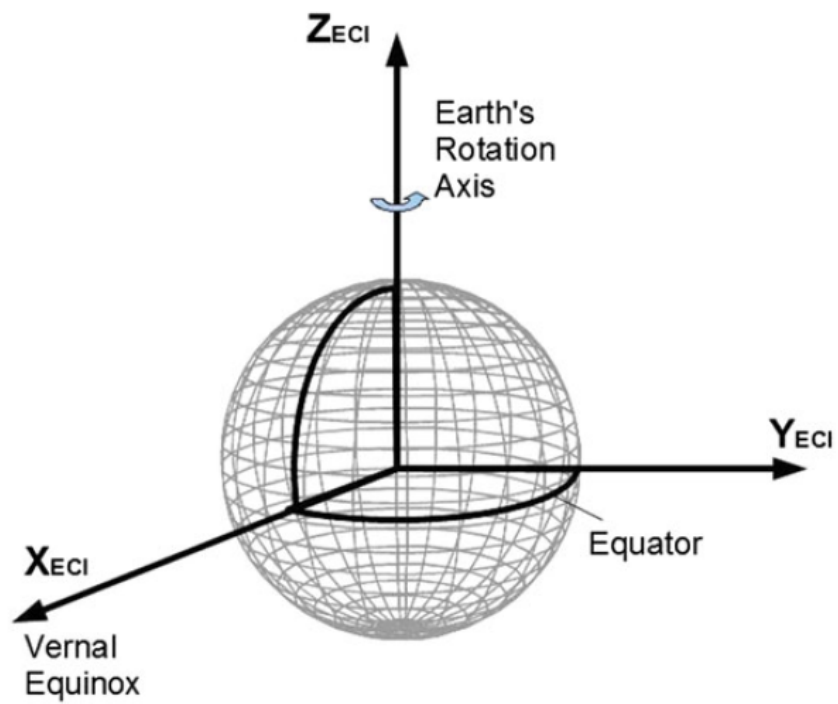
Conforme cita Mazzini (2015), o ECI é um sistema quasi-inercial e pode ser assumido como tal para satélites que orbitam a Terra. A aceleração devido a interação Sol-Terra faz com que esse sistema não possa ser considerado inercial para missões interplanetárias. O equinócio vernal é definido como o instante no qual o plano da Eclíptica intercepta o plano Equatorial, indo do hemisfério sul para o hemisfério norte (WERTZ; EVERETT; PUSCHELL, 2011).

### 2.2 SISTEMA LOCALMENTE VERTICAL LOCALMENTE HORIZONTAL

Para melhor visualização do apontamento do satélite, é interessante utilizar um sistema de referência na órbita. Nesse caso foi adotado o sistema Localmente Vertical Localmente Horizontal (LVLH) mostrado na Figura 2.2. Conforme Wie (2008), este é um sistema cartesiano ortogonal com as características:

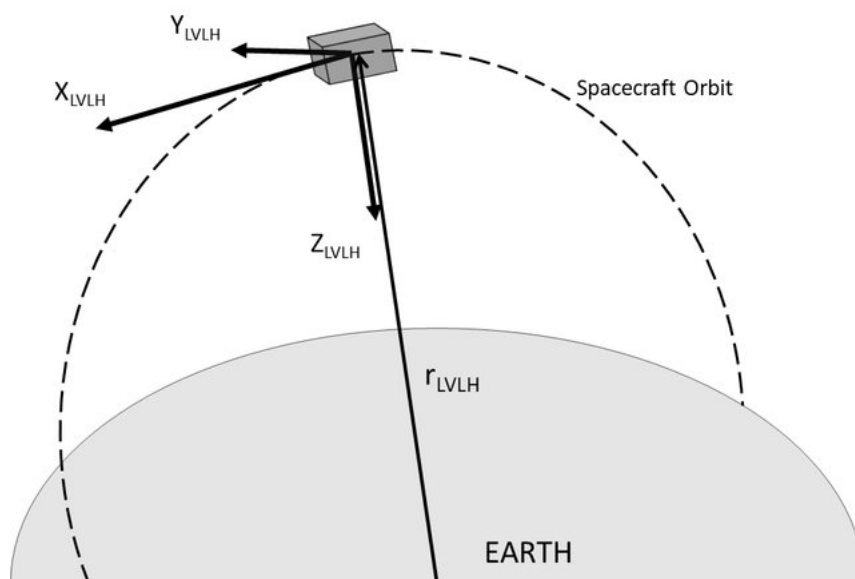
- Eixo  $X_{LVLH}$ : Aponta no sentido do vetor velocidade do satélite;
- Eixo  $Z_{LVLH}$ : Aponta para o nadir;
- Eixo  $Y_{LVLH}$ : Perpendicular ao plano da órbita, completando o sistema;
- Origem do sistema está no centro de massa da espaçonave.

Figura 2.1 – Sistema Inercial Centrado na Terra



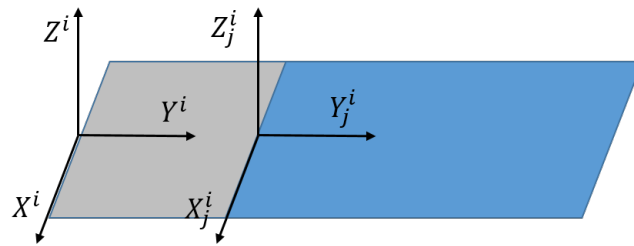
Fonte: Mazzini (2015)

Figura 2.2 – Sistema Localmente Vertical Localmente Horizontal



Fonte: Bloise et al. (2017)

Figura 2.3 – Sistema de referência do segmento do corpo



## 2.3 SISTEMA DO CORPO E SEGMENTO DO CORPO

O sistema de referência do corpo (BRF) é fixo em relação ao corpo indeformado, e será expresso por  $X^i$ ,  $Y^i$  e  $Z^i$ , onde  $i$  indica o respectivo corpo. Para o corpo central, a origem do sistema é adotada no centro de massa.

Além do sistema fixo no corpo, é útil definir o sistema do segmento do corpo ( $X_j^i$ ,  $Y_j^i$  e  $Z_j^i$ ), como apresentado por Shabana (2013) e mostrado na Figura 2.3, onde  $j$  indica o segmento do corpo.

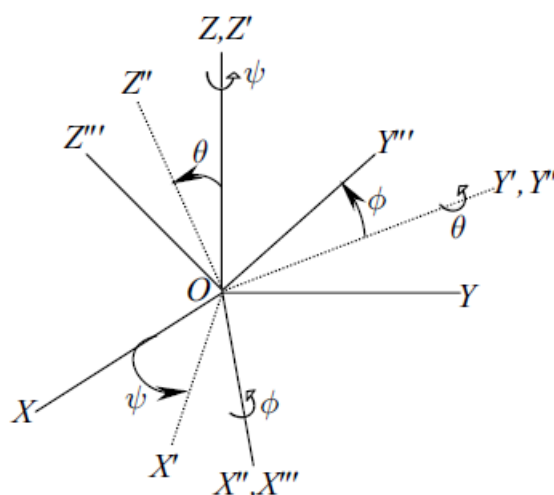
### 3 PARAMETRIZAÇÃO DE ATITUDE

A parametrização de atitude é utilizada para descrever a posição angular entre os sistemas de referência. Os ângulos de Euler apresentam uma forma mais intuitiva de analisar a parametrização de atitude, entretanto contém singularidades em determinadas posições angulares. Dessa maneira, quatérnions são comumente empregados para descrever o apontamento de satélites.

#### 3.1 ÂNGULOS DE EULER

Qualquer orientação pode ser obtida com a utilização de no máximo 3 rotações em sequência (TEWARI, 2007), sendo que cada uma dessas rotações é dada por um ângulo de Euler em torno de um eixo específico (Figura 3.1). Comumente é empregada a sequência de rotação 321, ou seja, inicialmente a rotação ocorre em torno do eixo  $z$ , posteriormente em torno de  $y$  e por fim em torno de  $x$ .

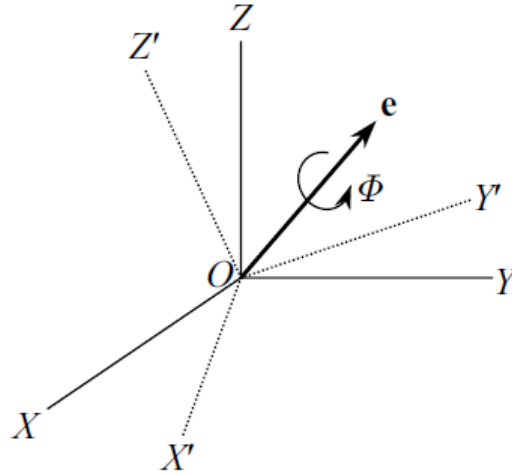
Figura 3.1 – Rotações consecutivas utilizando Ângulos de Euler



Fonte: Tewari (2007)

A rotação de um vetor pode ser expressa matematicamente pela multiplicação por uma matriz de rotação. Para o caso dos ângulos de Euler, a matriz, que indica a transformação do referencial inicial para o girante, varia dependendo do eixo de rotação adotado, conforme apresentam as equações 3.1, 3.2 e 3.3. Assume-se rotações em torno dos eixos

Figura 3.2 – Eixo de Euler e ângulo principal de rotação



Fonte: Tewari (2007)

$x$  com ângulo  $\phi$ ,  $y$  com ângulo  $\theta$  e  $z$  com ângulo  $\psi$ , respectivamente.

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \text{sen}(\phi) \\ 0 & -\text{sen}(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

$$\mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\text{sen}(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \text{sen}(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{A}_3 = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \text{sen}(\psi) & 0 \\ -\text{sen}(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Assim, a matriz de rotação total  $\mathbf{A}_{321}$ , do referencial inicial para o girante, é dada pelo produto  $\mathbf{A}_{321} = \mathbf{A}_1(\phi) \mathbf{A}_2(\theta) \mathbf{A}_3(\psi)$ . De maneira similar, a transformação inversa (do girante para o inicial) pode ser obtida pela matriz  $\mathbf{A}_{321}^{-1}$  e, devido as matrizes de rotações serem ortogonais, a relação  $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$  é verdadeira (TEWARI, 2007).

Apesar de serem apresentadas três rotações sucessivas em torno de três eixos, pode-se simplificar a rotação ao eixo de Euler ( $e$ ) e o ângulo principal ( $\Phi$ ), conforme apresenta a Figura 3.2. O ângulo principal de rotação é o autovalor real da matriz de rotação, enquanto o eixo de Euler é o autovetor associado ao autovalor real.

Apesar da clara interpretação que os Ângulos de Euler fornecem, eles possuem singularidades que os impendem de representar todas as atitudes possíveis. Para o caso da sequência 321, orientações onde o ângulo  $\theta$  seja múltiplo de  $\pi/2$  geram problemas, pois

a matriz  $C_{321}$  se torna singular.

### 3.1.1 Cinemática dos Ângulos de Euler

A variação no tempo dos ângulos de Euler pode ser obtida em função do vetor de velocidades angulares,  $\omega$ , que representa as taxas instantâneas de variação angulares, com respeito ao espaço inercial, escritas em torno dos eixos do sistema girante. Assim, para o caso especial da sequência de rotações 321, pode-se escrever as equações na forma:

$$\omega = A_1(\phi)A_2(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} + A_1(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Isso ocorre, pois  $\dot{\psi}$  está no sistema inicial e precisa ser rebatida para o sistema final pela matriz  $A_1(\phi)A_2(\theta)$ . Já  $\dot{\theta}$  está no sistema intermediário e necessita ser rebatido para o sistema final por  $A_1(\phi)$ . Por fim,  $\dot{\phi}$  está escrito no sistema final, por ser a última rotação da sequência 321.

Resolvendo o sistema de equações para  $\dot{\phi}$ ,  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_x + \tan(\theta) (\omega_y \sin(\phi) + \omega_z \cos(\phi)) \\ \omega_y \cos(\phi) - \omega_z \sin(\phi) \\ \sec(\theta) (\omega_y \sin(\phi) + \omega_z \cos(\phi)) \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

onde  $\omega = \begin{bmatrix} \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{bmatrix}^T$  são as velocidades angulares escritas no sistema do corpo.

Ilustrando o caso da orientação do sistema de referência do corpo (BRF) com respeito ao LVLH, adota-se a sequência de rotações 321. Então, os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  indicam a posição angular do satélite em relação ao sistema LVLH. Como o vetor  $\omega$  representa a velocidade em do BRF em relação ao ECI ao invés do LVLH, é necessário levar em consideração a velocidade do sistema LVLH em relação ao ECI. Caso contrário, os ângulos  $\phi$ ,  $\theta$  e  $\psi$  indicariam a posição angular do BRF em relação ao ECI. Assim, rebatendo a velocidade angular  $\omega_n$  (escrita no sistema LVLH) para o sistema do corpo, a equação 3.5 se torna:

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sec(\theta) (\sin(\phi)\omega_y + \cos(\phi)\omega_z) + \omega_n \sin(\psi) \tan(\theta) \\ \omega_n \cos(\psi) + \cos(\phi)\omega_y - \sin(\phi)\omega_z \\ \omega_n \sec(\theta) \sin(\psi) + \omega_x + (\sin(\phi)\omega_y + \cos(\phi)\omega_z) \tan(\theta) \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

### 3.2 QUATERNIONS

Diferente dos Ângulos de Euler, os Parâmetros simétricos de Euler (quatérnions) não apresentam singularidades e, portanto, podem indicar qualquer atitude. Além disso, por apresentar um menor número de operações necessárias para seu cálculo e não possuírem funções trigonométricas explícitas, são muito mais vantajosos computacionalmente (TEWARI, 2007).

Um quatérnion é composto por 4 escalares mutualmente dependentes. Sua definição é dada a partir do eixo e ângulo de Euler ( $e$  e  $\Phi$ , respectivamente). Possui uma parte vetorial, formada pelos três primeiros escalares, e uma escalar, dada pelo último, sendo definidas como:

$$\begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \end{bmatrix} = e \sin \left( \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.7)$$

$$\theta_4 = \cos \left( \frac{\Phi}{2} \right) \quad (3.8)$$

É usada a seguinte notação:  $\mathbf{Q} = [\Theta_v^T, \Theta_4]^T$  (vetor coluna quadridimensional), onde  $\Theta_v = [\Theta_1, \Theta_2, \Theta_3]^T$  é a parte vetorial do quatérnion.

Os quatro parâmetros respeitam a relação:

$$\Theta_1^2 + \Theta_2^2 + \Theta_3^2 + \Theta_4^2 = 1 \quad (3.9)$$

Conforme Tewari (2007), a matriz de rotação (do sistema inercial para o girante) pode ser obtida através dos quatérnions da forma

$$\mathbf{A} = (\Theta_4^2 - \Theta_v^T \Theta_v) \mathbf{I} + 2\Theta_v \Theta_v^T - 2\Theta_4 \mathbf{S}(\Theta) \quad (3.10)$$

sendo  $\mathbf{S}(\Theta)$  a matriz antissimétrica:

$$\mathbf{S}(\Theta) = \begin{bmatrix} 0 & -\Theta_3 & \Theta_2 \\ \Theta_3 & 0 & -\Theta_1 \\ -\Theta_2 & \Theta_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

A partir da matriz de rotação, os elementos dos quatérnions podem ser obtidos



como

$$\begin{aligned}
 \Theta_1 &= \frac{c_{23} - c_{32}}{4\Theta_4} \\
 \Theta_2 &= \frac{c_{31} - c_{13}}{4\Theta_4} \\
 \Theta_3 &= \frac{c_{12} - c_{21}}{4\Theta_4} \\
 \Theta_4 &= \pm \frac{1}{2} \sqrt{1 + \text{tr}(\mathbf{A})}
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

sendo  $\text{tr}(\mathbf{A})$  o traço da matriz  $\mathbf{A}$  e  $c_{ij}$  os elementos da matriz  $\mathbf{A}$ .

Para representação de rotações sucessivas com quatérnions, é utilizada a equação 3.13, sendo  $\Theta$  e  $\Theta'$  os quatérnions que representam a primeira e segunda rotação, respectivamente, e  $\Theta''$  o quatérnion associado à rotação final.

$$\begin{bmatrix} \Theta''_1 \\ \Theta''_2 \\ \Theta''_3 \\ \Theta''_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Theta'_4 & \Theta'_3 & -\Theta'_2 & \Theta'_1 \\ -\Theta'_3 & \Theta'_4 & \Theta'_1 & \Theta'_2 \\ \Theta'_2 & -\Theta'_1 & \Theta'_4 & \Theta'_3 \\ -\Theta'_1 & -\Theta'_2 & -\Theta'_3 & \Theta'_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_1 \\ \Theta_2 \\ \Theta_3 \\ \Theta_4 \end{bmatrix} \tag{3.13}$$

A equação 3.13 também é a definição da multiplicação entre os quatérnions  $\Theta$  e  $\Theta'$  é:  $\Theta'' = \Theta' \otimes \Theta$ , sendo que o operador  $\otimes$  indica a forma como os quatérnions foram multiplicados na equação 3.13. Assim, duas rotações sucessivas são representadas pela multiplicação quatérnions, a qual não é comutativa.

Como apresenta Tewari (2007), o ângulo principal de rotação, assim como o eixo principal de rotação podem ser obtidos simplesmente manipulando as equações 3.7 e 3.8, resultando nas equações 3.14 e 3.15.

$$\Phi = 2\cos^{-1}(\Theta_4) \tag{3.14}$$

$$e = \frac{\Theta}{\sin(\Phi/2)} \tag{3.15}$$

### 3.2.1 Cinemática dos Quatérnions

A cinemática dos quatérnions pode ser expressa pela relação:

$$\frac{d\Theta}{dt} = \frac{1}{2} \Omega \Theta \tag{3.16}$$

Lembrando que  $\Theta = \begin{bmatrix} \Theta_1 & \Theta_2 & \Theta_3 & \Theta_4 \end{bmatrix}^T$ . A matriz  $\Omega$  é dada por:

$$\Omega = \begin{bmatrix} 0 & \omega_z & -\omega_y & \omega_x \\ -\omega_z & 0 & \omega_x & \omega_y \\ \omega_y & -\omega_x & 0 & \omega_z \\ -\omega_x & -\omega_y & -\omega_z & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Note que a matriz da equação 3.17 é análoga à matriz na equação 3.13, onde a velocidade angular pode ser vista como um quatérnion de parte real nula.

## 4 MODELAGEM DE PAINÉIS SOLARES FLEXÍVEIS

Uma das abordagens que pode ser adotada para a modelagem dos painéis solares é considera-los vigas esbeltas<sup>1</sup> e, para isso, é considerado o modelo de Euler-Bernoulli. Entretanto, devido as suas dimensões (largura próximo do comprimento), os painéis acabam sendo melhor representados por placas. Ambas as modelagens foram consideradas e implementadas, com as condições de contorno de viga engastada-livre e placa engastada-livre-livre-livre.

### 4.1 MODELAGEM POR VIGAS

#### 4.1.1 Teoria de flexão e torção de vigas

Na modelagem de vigas pela teoria de Euler-Bernoulli, existem algumas restrições (BLEVINS, 1979):

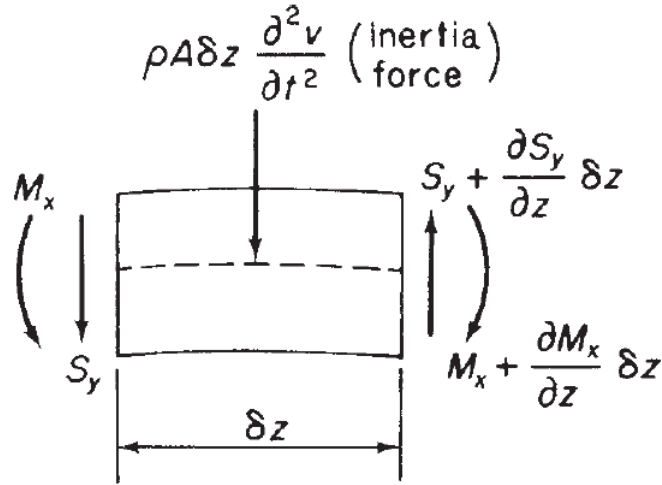
- A deformação devido a tensão cisalhante não é considerada;
- A inércia de rotação não é considerada;
- As vigas são esbeltas;
- Não são aplicadas cargas axiais às vigas;
- O centro de cisalhamento da viga coincide com o centro de massa, de forma que a translação e torção são desacopladas.

Conforme apresentado por Megson (2016), é possível obter duas equações de equilíbrio através de um elemento de viga (Figura 4.1).

---

<sup>1</sup>Em uma viga esbelta, uma dimensão é muito maior que as outras duas.

Figura 4.1 – Elemento de Viga



Fonte: Megson (2016)

A primeira equação obtida é para o equilíbrio de momentos (4.1), onde o termo  $M_x$  representa o momento fletor em torno do eixo  $x$  da viga,  $S_y$  o esforço cisalhante na direção  $y$  e  $\delta z$  o comprimento do elemento de viga.

$$S_y \frac{\delta z}{2} + M_x + \left( S_y + \frac{\partial S_y}{\partial z} \delta z \right) \frac{\delta z}{2} - \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial z} \delta z \right) = 0 \quad (4.1)$$

A segunda equação (4.2) é devido ao equilíbrio de forças, na qual é considerada a inércia do elemento do viga, sendo a massa expressa por  $\rho AR \delta z$ , onde  $\rho$  e  $AR$  são respectivamente a densidade e a área da seção transversal da viga. O termo de aceleração é dado pela segunda derivada temporal de  $v$  que representa a deflexão da viga.

$$\left( S_y + \frac{\partial S_y}{\partial z} \delta z \right) - S_y - \rho AR \delta z \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

Simplificando a equação 4.2, a seguinte expressão é obtida:

$$\frac{\partial S_y}{\partial z} = \rho AR \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Desprezando os termos de segunda ordem da equação 4.1, obtém-se a relação:

$$S_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} \quad (4.4)$$

que, substituída na equação 4.3:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial z^2} = \rho AR \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.5)$$

Utilizando a relação  $M_x = -EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}$  da teoria de deflexão de vigas, onde  $E$  é o

módulo de elasticidade e  $I$  o momento de inércia de área da seção transversal em torno de  $x$  e, substituindo na equação 4.5:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}(-EI \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}) = \rho AR \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \quad (4.6)$$

E, portanto:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} + \rho AR \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = 0 \quad (4.7)$$

Como apresentado por Leissa e Qatu (2011), uma solução dada por  $v(z, t) = Z(z)\Pi(t)$  pode ser assumida. Quando substituída na equação acima, resulta em:

$$\frac{\frac{\partial^4 Z}{\partial z^4}}{Z} = -\frac{\rho AR}{EI} \frac{\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2}}{\Pi} = \alpha^4 \quad (4.8)$$

de forma que a seguinte separação pode ser realizada

$$\frac{\partial^4 Z}{\partial z^4} - \alpha^4 Z = 0 \quad (4.9)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial t^2} - \varphi_n^2 \Pi = 0 \quad (4.10)$$

onde os termos  $\alpha$  e  $\varphi$  se relacionam pela relação:

$$\lambda^2 = \frac{EI\alpha^2}{\rho AR} \quad (4.11)$$

sendo que a solução para ambas as equações 4.9 e 4.10 geram a solução final, conforme apresenta a equação:

$$v(z, t) = h_a Z(z) \text{sen}(\varphi t + \varrho) \quad (4.12)$$

onde  $\lambda$  é a frequência natural,  $\varrho$  o ângulo de fase e  $h_a$  uma constante que representa a amplitude. O termo  $Z(z)$  representa a solução para a equação 4.9 e, também, as formas modais.  $Z(z)$  pode ser expresso como

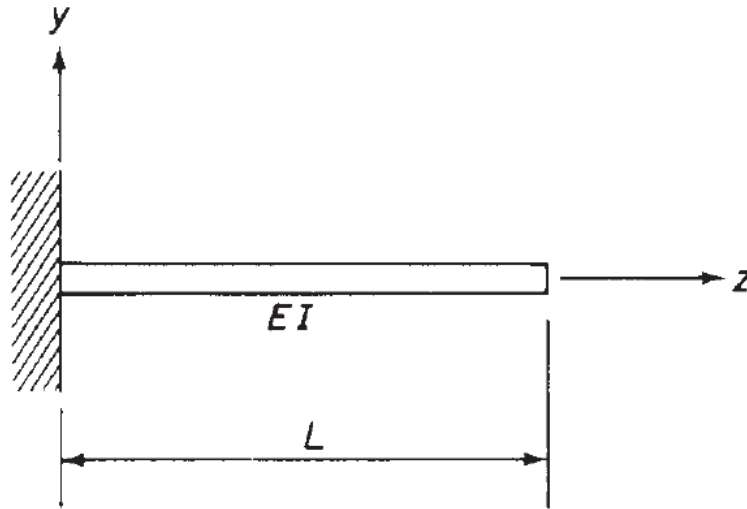
$$Z(z) = h_1 \text{sen}(\alpha \frac{z}{l}) + h_2 \cos(\alpha \frac{z}{l}) + h_3 \sinh(\alpha \frac{z}{l}) + h_4 \cosh(\alpha \frac{z}{l}) \quad (4.13)$$

onde as constantes  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_3$  e  $h_4$  são determinadas pelas condições de contorno e  $l$  é comprimento da viga. Para o caso de uma viga engastada (Figura 4.2), onde  $Z(0) = 0$ ,  $\frac{dZ(0)}{dz} = 0$ ,  $\frac{d^2 Z(l)}{dz^2} = 0$  e  $\frac{d^3 Z(l)}{dz^3} = 0$ , a expressão final obtida é:

$$Z_i(z) = \cosh(\alpha_i \frac{z}{l}) - \cos(\alpha_i \frac{z}{l}) - \sigma_i (\sinh(\alpha_i \frac{z}{l}) - \sin(\alpha_i \frac{z}{l})) \quad (4.14)$$

É importante ressaltar que, a partir da equação acima, diversas formas modais

Figura 4.2 – Exemplo de viga engastada



Fonte: Megson (2016)

podem ser obtidas, uma para cada  $\alpha_i$ . De forma ideal, a solução é dada por

$$v(z, t) = \sum_{i=1}^{\infty} h_{a_i} Z(z)_i \text{sen}(\varphi_i t + \varrho) \quad (4.15)$$

entretanto, por quesitos computacionais e práticos, trunca-se a série em um  $i$  determinado. Sendo que, para isso, o intervalo adotado de formas modais deve ser capaz de representar o comportamento da estrutura nas condições impostas com boa precisão.

Os termos  $\alpha$  e  $\sigma$  são obtidos utilizando as equações 4.16 e 4.17.

$$\cos(\alpha_i) \cosh(\alpha_i) + 1 = 0 \quad (4.16)$$

$$\sigma_i = \frac{\cos(\alpha_i) + \cosh(\alpha_i)}{\text{sen}(\alpha_i) + \sinh(\alpha_i)} \quad (4.17)$$

Para o caso da viga engastada, os valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  obtidos numericamente são mostrados na Tabela 4.1.

Com a deflexão em torno do eixo  $z$ , também é possível considerar deslocamentos no eixo  $x$  devido a deflexão da viga.

Além disso, é interessante ressaltar a propriedade ortogonal das formas modais, de forma que as seguintes relações são obtidas (BLEVINS, 1979):

$$\int_0^L Z_i(z) Z_j(z) dz = \begin{cases} l, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (4.18)$$

Tabela 4.1 – Valores de  $\alpha$  e  $\sigma$  para viga engastada

modo	$\alpha$	$\sigma$
1	1,87510406871	0,73409551375
2	4,69409113297	1,01846731875
3	7,85475743823	0,99922449651
4	10,9955407348	1,00003355325
5	14,1371683910	0,99999855010
6	17,2787595320	1,00000006265

Para termos de comparação torna-se útil a equação para as frequências naturais de uma viga engastada, dada por:

$$\varphi_i = \alpha_i^2 \sqrt{\frac{EI}{ml^3}} \quad (4.19)$$

Na tentativa de representar rotações da estrutura, também podem ser obtidas as formas modais para torção de uma viga. Para isso, parte-se da equação

$$(M_t + \frac{\partial M_t}{\partial z} \delta z) - M_t = J_0 \delta z \frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad (4.20)$$

sendo  $M_t$  o momento torcional,  $J_0$  o momento polar de inércia de massa (por unidade de comprimento) e  $\Gamma$  o ângulo de torção da viga. Considerando a relação

$$M_t(z, t) = G_{sm} I \frac{\partial \Gamma(z, t)}{\partial z} \quad (4.21)$$

onde  $G_{sm}$  é o módulo de cisalhamento, pode-se manipular a equação 4.20 de forma que:

$$\frac{\partial}{\partial z} (G_{sm} I \frac{\partial \Gamma(z, t)}{\partial z}) = J_0 \frac{\partial \Gamma(z, t)}{\partial t} \quad (4.22)$$

Analogamente ao que foi feito para a flexão de vigas, a solução para o termo de  $\frac{\partial \Gamma(z, t)}{\partial z}$  gera as formas modais de torção. Aplicando as condições de contorno para uma viga engastada -  $\Gamma(0, t) = 0$  e  $\frac{\partial \Gamma(l, t)}{\partial z} = 0$ , obtém-se a equação

$$T_i = \sin\left(\frac{\pi(2i - 1)z}{2l}\right) \quad (4.23)$$

sendo  $i$  o modo de torção - primeiro, segundo, terceiro, etc-.

As figuras com as formas modais, tanto de flexão como torção, podem ser vistas no Apêndice A.1.

## 4.2 MODELAGEM POR PLACAS

Outra forma de tratar os SAGs dos satélites é assumi-los como placas finas e, então utilizar as formas modais para uma placa engastada. De forma geral, pode-se considerar uma placa com espessura  $c$ , comprimento  $L$  e largura  $b$ . As forças cisalhantes por unidade de comprimento são representadas pelas letras  $V_x$  e  $V_y$ , além dos momentos de flexão  $M_x$ ,  $M_y$  e os momentos de torção  $M_{xy}$  e  $M_{yx}$ .

Como apresentado por Leissa e Qatu (2011), o somatório de forças no  $z$  (assumido como transversal a placa), obtém-se

$$-V_x \delta y + (V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta x) - V_y \delta x + (V_y + \frac{\partial V_y}{\partial y} \delta y) \delta x = \rho c \delta x \delta y \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (4.24)$$

sendo  $\frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2}$  a função que descreve o deslocamento transversal de um ponto na viga em função de  $x$ ,  $y$  e  $t$ . Simplificando a equação acima e dividindo-a pela área,  $\delta y \delta x$ :

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = \rho c \frac{\partial^2 v(x, y, t)}{\partial t^2} \quad (4.25)$$

Além disso, o somatório de momentos realizado em torno de um ponto arbitrário da placa resulta em:

$$\begin{aligned} M_x \delta y - (M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta x) \delta y + M_{xy} \delta x - (M_{xy} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \delta y) \delta x + V_x \delta y \frac{\delta x}{2} \\ + (V_x + \frac{\partial V_x}{\partial x} \delta x) \delta y \frac{\delta x}{2} = \rho \frac{c^3}{12} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Além disso,

$$\begin{aligned} V_x - \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} &= 0 \\ V_y - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

onde a relação  $M_{xy} = M_{yx}$  é verdadeira. Como apresentado por Leissa e Qatu (2011), existem solução analíticas somente para algumas condições de contorno, entretanto soluções aproximadas podem ser obtidas através das formas modais de vigas, na forma

$$v(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} A_{ij} Z_x(x) Z_y(y) \varrho \quad (4.28)$$

onde o termo  $\varrho$  representa a coordenada modal dependente do tempo, e  $Z_x(x)$  e  $Z_y(y)$  as formas modais que dependem das coordenadas  $x$  e  $y$ , respectivamente. Dessa maneira,



aproxima-se cada solução,  $Z_x(x)$  e  $Z_y(y)$ , por soluções de vigas com as condições de contorno adequadas. Considerando a placa engastada na coordenada  $y = 0$  e livre na coordenada  $y = L$ , a forma modal é a mesma apresentada anteriormente na equação 4.14.

A forma modal ( $Z_x(x)$ ) para uma viga livre-livre, é dada por:

$$Z_{x_i} = 1 \quad (4.29)$$

$$Z_{x_i} = \sqrt{3}(1 - 2x/b) \quad (4.30)$$

$$Z_{x_i} = \cos(\alpha_i) \left( \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) - \sin \left( \frac{\alpha_i}{2} \right) \cosh(\alpha_i) \operatorname{csch} \left( \frac{\alpha_i}{2} \right) \left( \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.31)$$

$$Z_{x_i} = \sin(\alpha_i) \left( \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) + \sin \left( \frac{\alpha_i}{2} \right) \sinh(\alpha_i) \operatorname{csch} \left( \frac{\alpha_i}{2} \right) \left( \frac{y}{b} - \frac{1}{2} \right) \quad (4.32)$$

Enquanto as equações 4.29 e 4.30 representam o primeiro e segundo modo, respectivamente, a equação 4.31 serve para as formas modais pares maiores que 2. Já a equação 4.32 representa as formas modais de valor ímpar maiores que 3. Além disso, são necessárias duas equações auxiliares para determinar os valores de  $\alpha_i$ , sendo elas

$$\tan(\alpha_i/2) + \tanh(\alpha_i/2) = 0 \quad (4.33)$$

$$\tan(\alpha_i/2) - \tanh(\alpha_i/2) = 0 \quad (4.34)$$

onde a equação 4.33 é resolvida para obter os parâmetros pares e a equação 4.34 para os parâmetros ímpares.

Mesmo com as formas modais representando o deslocamento no eixo  $z$ , os deslocamentos nos eixos  $x$  e  $y$  podem ser obtidos pelas relações:

$$\begin{aligned} \delta x &= -z \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial x} \\ \delta y &= -z \frac{\partial v(x, y, t)}{\partial y} \end{aligned} \quad (4.35)$$

As formas modais utilizadas para as placas podem ser vistas nas figuras do Apêndice A.2.

## 5 TEORIA DE MULTICORPOS

A teoria de multicorpos busca modelar o comportamento de diversos corpos conectados, tanto rígidos como flexíveis. As conexões entre os corpos são descritas através de equações de restrições cinemáticas e incorporadas ao sistema, utilizando multiplicadores de Lagrange.

Para os corpos rígidos em um sistema tridimensional, são considerados 6 graus de liberdade onde três indicam a atitude e três a posição. Enquanto que, para os flexíveis, são  $6 + n$ , sendo  $n$  as coordenadas elásticas responsáveis por descrever o deslocamento flexível do corpo (SHABANA, 2013). De maneira ideal, para um meio contínuo,  $n$  tenderia ao infinito mas, para permitir uma abordagem computacional, são utilizados métodos de aproximação.

Dessa maneira, um ponto  $P$  qualquer de um corpo  $i$  tem sua posição em relação ao sistema de referência inercial descrita como:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{u}}^i \quad (5.1)$$

O vetor  $\mathbf{R}^i$  indica a posição de um ponto  $O^i$  no corpo  $i$  em relação ao sistema inercial e  $\mathbf{A}$  é a matriz de rotação que leva do sistema do corpo  $i$  para o sistema inercial (Figura 5.1). Por sua vez, o vetor  $\bar{\mathbf{u}}^i$  é posição do ponto  $P^i$  em relação a  $O^i$  e pode ser escrito como a soma entre posição do ponto  $P^i$  no estado indeformado,  $\bar{\mathbf{u}}_0^i$ , e o vetor de deformação,  $\bar{\mathbf{u}}_f^i$ , como mostra a equação 5.2. Ao longo do desenvolvimento das equações, será utilizada a notação no qual o vetor  $\bar{\mathbf{u}}^i$  indica estar escrito no sistema do corpo  $i$  enquanto  $\mathbf{u}^i$  indica estar escrito no sistema inercial.

$$\bar{\mathbf{u}}^i = \bar{\mathbf{u}}_0^i + \bar{\mathbf{u}}_f^i \quad (5.2)$$

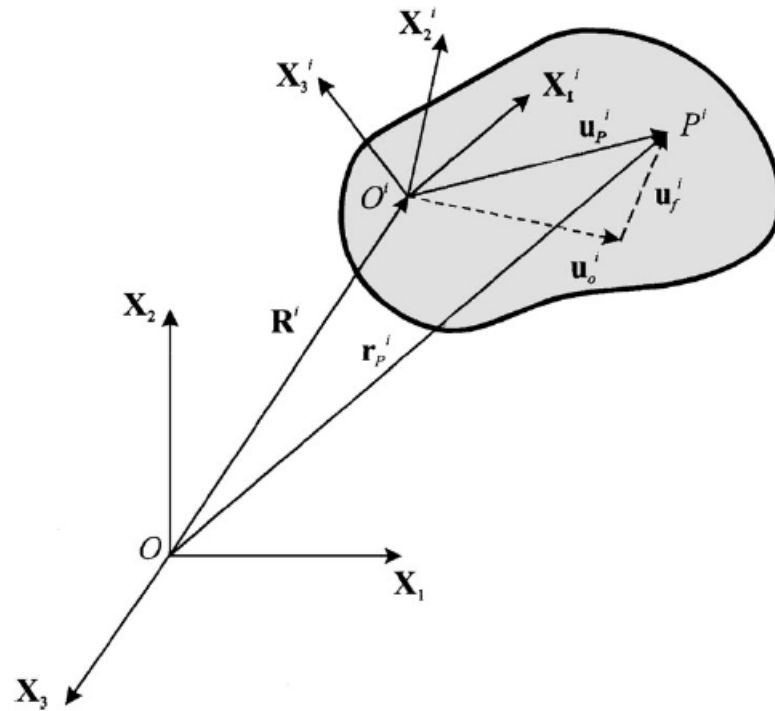
Ainda, pode-se escrever o vetor  $\bar{\mathbf{u}}_f^i$  em função da matriz de formas modais dependente do espaço,  $\mathbf{S}^i$ , e do vetor de coordenadas elásticas generalizadas dependentes do tempo,  $\mathbf{q}_f^i$ , de dimensão  $n_{qf}^i$  por 1, sendo  $n_{qf}^i$  o número de coordenadas elásticas do corpo  $i$  - posteriormente definidas em função das necessidades do problema:

$$\bar{\mathbf{u}}_f^i = \mathbf{S}^i \mathbf{q}_f^i \quad (5.3)$$

Onde a matriz  $\mathbf{S}^i$  possui 3 linhas, referente as 3 coordenadas do sistema do corpo, e  $n_{qf}$  colunas. Combinando as equações 5.1 com 5.2, sendo  $\bar{\mathbf{u}}_f^i$  expresso de acordo com a equação 5.3, obtém-se:

$$\mathbf{r}_P^i = \mathbf{R}^i + \mathbf{A}^i (\bar{\mathbf{u}}_0^i + \mathbf{S}^i \mathbf{q}_f^i) \quad (5.4)$$

Figura 5.1 – Decomposição da posição de um ponto  $P$  arbitrário



Fonte: Shabana (2013)

### 5.1 VELOCIDADE E ACELERAÇÃO GENERALIZADAS

Como apresentado por Shabana (2013), é possível derivar a equação 5.4 no tempo e obter a equação 5.5. Como o ponto  $\bar{u}_0^i$  é considerado invariante no tempo, sua derivada é zero.

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{R}}^i + \dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^i + \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i \quad (5.5)$$

Considerando os quaternions ( $\Theta$ ), como mostrado no Capítulo 3.2, podemos expressar uma matriz  $\bar{\mathbf{G}}^i$  na forma

$$\bar{\mathbf{G}}^i = 2 \begin{bmatrix} -\Theta_2^i & \Theta_1^i & \Theta_4^i & -\Theta_3^i \\ -\Theta_3^i & -\Theta_4^i & \Theta_1^i & \Theta_2^i \\ -\Theta_4^i & \Theta_3^i & -\Theta_2^i & \Theta_1^i \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

a qual possui a propriedade:

$$\bar{\omega}^i = \bar{\mathbf{G}}^i \dot{\Theta} \quad (5.7)$$

Com isso, é possível utilizar a seguinte equação, como demonstrado por Shabana

(2013):

$$\dot{\mathbf{A}}^i \bar{\mathbf{u}}^i = -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i \bar{\mathbf{G}}^i \dot{\Theta}^i \quad (5.8)$$

onde  $\tilde{\mathbf{u}}^i$  é a matriz antissimétrica do vetor  $\bar{\mathbf{u}}^i$  e  $\bar{\mathbf{G}}^i$  dado pela equação 5.6. Assim, é possível expressar a equação 5.5 da forma:

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i \bar{\mathbf{G}}^i & \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i \\ \dot{\Theta}^i \\ \dot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

Utilizando a relação  $\mathbf{L}^i = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i \bar{\mathbf{G}}^i & \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i \end{bmatrix}$  e  $\dot{\mathbf{q}}^i = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^i & \dot{\Theta}^i & \dot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix}^T$ , a equação resultante é:

$$\dot{\mathbf{r}}_P^i = \mathbf{L}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (5.10)$$

Derivando-a uma segunda vez em relação ao tempo:

$$\ddot{\mathbf{r}}_P^i = \dot{\mathbf{L}}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \mathbf{L}^i \ddot{\mathbf{q}}^i \quad (5.11)$$

## 5.2 ENERGIA CINÉTICA

O termo da energia cinética, para o corpo  $i$ , é obtido como mostra a equação 5.12.

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\mathbf{r}}_P^i{}^T \dot{\mathbf{r}}_P^i dV^i \quad (5.12)$$

Substituindo a relação da equação 5.10 na equação acima, obtém-se:

$$T^i = \frac{1}{2} \int_{V^i} \rho^i \dot{\mathbf{q}}^i{}^T \mathbf{L}^i{}^T \mathbf{L}^i \dot{\mathbf{q}}^i dV^i \quad (5.13)$$

Manipulando a equação 5.13, é possível escrever uma matriz de massa generalizada,  $\mathbf{M}^i$ ,

$$T^i = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^i{}^T \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i \quad (5.14)$$

onde  $\mathbf{M}^i$  é dada por

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{L}^i{}^T \mathbf{L}^i dV^i \quad (5.15)$$

Como mostrado em Shabana (2013), a equação 5.15 pode ser expressa da forma

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{B}^i & \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i \\ \mathbf{B}^{iT} & \mathbf{B}^{iT} \mathbf{B}^i & \mathbf{B}^{iT} \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i \\ (\mathbf{A}^i \mathbf{S}^i)^T & (\mathbf{B}^{iT} \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i)^T & \mathbf{S}^{iT} \mathbf{S}^i \end{bmatrix} dV^i \quad (5.16)$$

onde

$$\mathbf{B}^i = -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i \bar{\mathbf{G}}^i \quad (5.17)$$

ou também

$$\mathbf{B}^i = \left[ \frac{\partial(\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i)}{\partial \theta_1^i} \dots \frac{\partial(\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i)}{\partial \theta_{n_\Theta}^i} \right] \quad (5.18)$$

sendo que, de forma generalizada,  $n_\Theta$  é o número de coordenadas de rotação utilizadas (já que diversas parametrizações podem ser adotadas, como Ângulos de Euler, Quaternions, Parâmetros de Rodriguez, entre outros). Além disso, é importante notar que os limites das integrais são os limites do segmento do corpo  $i$  escritos no sistema do corpo  $i$ .

### 5.3 MATRIZ DE MASSA GENERALIZADA

Para facilidade de contas, os termos da matriz da equação 5.16 podem ser separados em diversas integrais menores, denominadas integrais de forma, conforme Shabana (2013). Pelo fato da matriz  $\mathbf{M}^i$  ser simétrica, o número de integrais de forma é 6. O primeiro termo da matriz,  $\mathbf{M}^i(1, 1)$ , é dado por:

$$\mathbf{m}_{rr}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{I} dV^i \quad (5.19)$$

Já o termo  $\mathbf{M}^i(1, 2)$  é escrito da forma

$$\mathbf{m}_{r\Theta}^i = - \int_{V^i} \rho^i \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{u}}^i \bar{\mathbf{G}}^i dV^i = -\mathbf{A}^i \left[ \int_{V^i} \rho^i \tilde{\mathbf{u}}^i \bar{\mathbf{G}}^i dV^i \right] \quad (5.20)$$

que, de forma simplificada é

$$\mathbf{m}_{r\Theta}^i = -\mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{S}}_t^i \bar{\mathbf{G}}^i \quad (5.21)$$

sendo  $\tilde{\mathbf{S}}_t^i$  dado pela equação 5.22.

$$\tilde{\mathbf{S}}_t^i = \int_{V^i} \rho^i \tilde{\mathbf{u}}^i dV^i \quad (5.22)$$

O termo  $\mathbf{M}^i(1, 3)$  é:

$$\mathbf{m}_{rf}^i = \mathbf{A}^i \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^i dV^i = \mathbf{A}^i \bar{\mathbf{S}}^i \quad (5.23)$$

A matriz  $\bar{\mathbf{S}}^i$  pode ser expressa conforme:

$$\bar{\mathbf{S}}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^i dV^i \quad (5.24)$$

O elemento  $\mathbf{M}^i(2, 2)$  é dado como

$$\mathbf{m}_{\Theta\Theta}^i = \int_{V^i} \rho^i \mathbf{B}^{iT} \mathbf{B}^i dV^i \quad (5.25)$$

e, devido a relação  $\mathbf{A}^{iT} \mathbf{A}^i = \mathbf{I}$ , a equação acima é simplificada para

$$\mathbf{m}_{\Theta\Theta}^i = \bar{\mathbf{G}}^{iT} \left[ \int_{V^i} \rho^i \tilde{\mathbf{u}}^{iT} \tilde{\mathbf{u}}^i dV^i \right] \bar{\mathbf{G}}^i = \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta}^i \bar{\mathbf{G}}^i \quad (5.26)$$

onde:

$$\bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta}^i = \int_{V^i} \rho^i \tilde{\mathbf{u}}^{iT} \tilde{\mathbf{u}}^i dV^i \quad (5.27)$$

O termo  $\mathbf{M}^i(2, 3)$  é

$$\mathbf{m}_{\Theta f}^i = - \int_{V^i} \rho^i \mathbf{B}^{iT} \mathbf{A}^i \mathbf{S}^i dV^i \quad (5.28)$$

que, então, pode ser simplificado para

$$\mathbf{m}_{\Theta f}^i = \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f}^i \quad (5.29)$$

sendo  $\bar{\mathbf{I}}_{\Theta f}^i$  expresso conforme

$$\bar{\mathbf{I}}_{\Theta f}^i = \int_{V^i} \rho^i \tilde{\mathbf{u}}^i \mathbf{S}^i dV^i \quad (5.30)$$

e, por fim, o termo  $\mathbf{M}^i(3, 3)$  é

$$\mathbf{m}_{ff}^i = \int_{V^i} \mathbf{S}^{iT} \mathbf{S}^i dV^i \quad (5.31)$$

Dessa forma, a matriz  $\mathbf{M}^i$  pode ser expressa como:

$$\mathbf{M}^i = \int_{V^i} \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr}^i & \mathbf{m}_{r\Theta}^i & \mathbf{m}_{rf}^i \\ \mathbf{m}_{r\Theta}^{iT} & \mathbf{m}_{\Theta\Theta}^i & \mathbf{m}_{\Theta f}^i \\ \mathbf{m}_{rf}^{iT} & \mathbf{m}_{\Theta f}^{iT} & \mathbf{m}_{ff}^i \end{bmatrix} dV^i \quad (5.32)$$

#### 5.4 FORÇA GENERALIZADA

Para que as forças atuantes no sistema sejam determinadas, utiliza-se o princípio do trabalho virtual. Como apresentado por Shabana (2013), parte-se do trabalho virtual das forças internas da forma

$$\delta W_S^i = - \int_{V^i} \boldsymbol{\sigma}^{iT} \delta \boldsymbol{\epsilon}^i dV^i \quad (5.33)$$

sendo  $\boldsymbol{\sigma}^i$  as tensões presentes no corpo  $\epsilon^i$  e as deformações, podendo ser escrito também como:

$$\boldsymbol{\epsilon}^i = \mathbf{D}^i \mathbf{S}^i \mathbf{q}_f^i \quad (5.34)$$

E, já que

$$\boldsymbol{\sigma}^i = \mathbf{E}^i \boldsymbol{\epsilon}^i \quad (5.35)$$

a equação 5.33 pode ser reescrita como:

$$\delta \mathbf{W}_S^i = - \mathbf{q}_f^{iT} \int_{V^i} (\mathbf{D}^i \mathbf{S}^i)^T \mathbf{E}^i \mathbf{D}^i \mathbf{S}^i dV^i \mathbf{q}_f^i \quad (5.36)$$

Assim, a integral é definida como a matriz de rigidez da forma

$$\mathbf{K}_{ff}^i = \int_{V^i} (\mathbf{D}^i \mathbf{S}^i)^T \mathbf{E}^i \mathbf{D}^i \mathbf{S}^i dV^i \quad (5.37)$$

onde a matriz constitutiva  $\mathbf{E}$  pode ser dada, para um material elástico linear isotrópico, por

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (5.38)$$

em função de  $\lambda$  e  $\mu$ , o primeiro e segundo parâmetro de Lamé, respectivamente. A matriz  $\mathbf{D}$  é um operador de derivada e é dado, para o modelo estrutural adotado, por:

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Ainda, de acordo com Shabana (2013), o trabalho virtual realizado pela forças externas pode ser dado como

$$\delta W_e^i = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R^{iT} & \mathbf{Q}_\theta^{iT} & \mathbf{Q}_f^{iT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^i \\ \delta \theta^i \\ \delta \mathbf{q}_f^i \end{bmatrix} \quad (5.40)$$

onde  $\mathbf{Q}_R^{iT}$  está associado às forças de translação,  $\mathbf{Q}_\theta^{iT}$  às forças de rotação e  $\mathbf{Q}_f^{iT}$  às forças das coordenadas elásticas. Assim, define-se o vetor  $\mathbf{Q}_e^i$  conforme a equação 5.41.

$$\mathbf{Q}_e^{iT} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_R^{iT} & \mathbf{Q}_\theta^{iT} & \mathbf{Q}_f^{iT} \end{bmatrix} \quad (5.41)$$

Dessa maneira, o trabalho virtual total é a soma do trabalho virtual devido as forças internas e as forças externas:

$$\delta W^i = \delta W_s^i + \delta W_e^i \quad (5.42)$$

Que, então, pode ser escrita como

$$\delta W^i = -\mathbf{q}_f^{iT} \mathbf{K}_{ff} \delta \mathbf{q}_f^i + \mathbf{Q}_e^{iT} \delta \mathbf{q}^i \quad (5.43)$$

ou

$$\delta W^i = \mathbf{Q}^{iT} \delta \mathbf{q}^i \quad (5.44)$$

sendo  $\mathbf{Q}^i$  o vetor de forças generalizadas:

$$\mathbf{Q}^{iT} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & -(\mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f^i)^T \end{bmatrix}^T + \mathbf{Q}_e^{iT} \quad (5.45)$$

Além disso, existe o vetor de velocidade quadrática,  $\mathbf{Q}_v^i$  que surge devido ao formato do sistema de equações e é definido conforme equação 5.46. Esse vetor de forças engloba tanto as forças centrífugas como o efeito de Coriolis.

$$\mathbf{Q}_v^i = -\dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i + \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta}{\delta \mathbf{q}^i} (\dot{\mathbf{q}}^{iT} \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i) \right] \quad (5.46)$$

Assim como realizado para a matriz de massa generalizada, é possível subdividir o vetor  $\mathbf{Q}_v^i$  para simplificar a modelagem. Dessa maneira, obtém-se os termos referentes a translação,  $\mathbf{Q}_{vR}^i$ , rotação,  $\mathbf{Q}_{v\theta}^i$ , e dinâmica flexível,  $\mathbf{Q}_{vf}^i$ , conforme as equações 5.47, 5.48 e 5.49 respectivamente.

$$\mathbf{Q}_{vR}^i = -\mathbf{A}^i \left[ (\tilde{\omega}^{i2} \bar{\mathbf{S}}_t^i + 2\tilde{\omega}^i \bar{\mathbf{S}}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i) \right] \quad (5.47)$$

$$\mathbf{Q}_{v\theta}^i = -2\dot{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i \bar{\omega}^i - 2\dot{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}_{\theta f}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i - \bar{\mathbf{G}}^{iT} \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i \dot{\bar{\omega}}^i \quad (5.48)$$



$$\mathbf{Q}_{v_f}^i = - \int_{V^i} \rho^i \mathbf{S}^{iT} \left[ (\tilde{\omega}^i \tilde{\omega}^i) \bar{\mathbf{u}}^i + 2\tilde{\omega}^i \dot{\bar{\mathbf{u}}}_f^i \right] dV^i \quad (5.49)$$

## 5.5 SISTEMA DE EQUAÇÕES

Considerando a equação 5.14, a equação de Lagrange para o sistema se torna

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{Q}^i \quad (5.50)$$

onde  $\mathbf{Q}^i$  é dado pela equação 5.45. Os dois primeiros termos da equação acima podem ser expandidos da forma

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i + \dot{\mathbf{M}}^i \dot{\mathbf{q}}^i - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}^i} (\dot{\mathbf{q}}^{iT} \mathbf{M}^i \dot{\mathbf{q}}^i) \right] \quad (5.51)$$

sendo que, substituindo a equação 5.46 na expressão acima, obtém-se:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T^i}{\partial \dot{\mathbf{q}}^i} \right)^T - \left( \frac{\partial T^i}{\partial \mathbf{q}^i} \right)^T = \mathbf{M}^i \ddot{\mathbf{q}}^i - \mathbf{Q}_v^i \quad (5.52)$$

Apesar da equação de  $\mathbf{Q}_v^i$  ter sido apresentada e deduzida antes, a equação 5.46 é obtida através da equação 5.51. As equações foram deduzidas tendo em mente a derivada segunda dos quaternions, entretanto, para que o sistema fique de forma genérica e (para qualquer parametrização) utiliza-se a relação  $\bar{\alpha}^i = \bar{\mathbf{G}}^i \ddot{\theta}^i$ , sendo  $\bar{\alpha}^i$  a aceleração angular (SHABANA, 2013). Assim, são obtidas as equações generalizadas de Newton-Euler na forma matricial a partir da equação 5.52:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{m}_{rr}^i & \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{S}}_t^{iT} & \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{S}}^i \\ \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{S}}_t^{iT} & \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i & \bar{\mathbf{I}}_{\theta f}^i \\ \mathbf{A}^i \tilde{\mathbf{S}}^i & \bar{\mathbf{I}}_{\theta f}^{iT} & \mathbf{m}_{ff}^i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^i \\ \alpha^i \\ \ddot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{e_r}^i \\ \mathbf{Q}_{e_\alpha}^i \\ \mathbf{Q}_{e_f}^i - \mathbf{K}_{ff}^i \mathbf{q}_f^i - \mathbf{D}_{ff}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{v_r}^i \\ \mathbf{Q}_{v_\alpha}^i \\ \mathbf{Q}_{v_f}^i \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

A matriz  $\mathbf{D}_{ff}^i$  é a matriz de amortecimento do corpo flexível. O vetor  $\mathbf{Q}_{v_\alpha}^i$  é dado pela expressão:

$$\mathbf{Q}_{v_\alpha}^i = -\bar{\omega}^i \times (\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i) - \dot{\bar{\mathbf{I}}}_{\theta\theta}^i \bar{\omega}^i - \bar{\omega}^i \times (\bar{\mathbf{I}}_{\theta f}^i \dot{\mathbf{q}}_f^i) \quad (5.54)$$

Como apresentado por Rao (2011), a matriz de amortecimento por ser considerada como uma combinação linear entre a matriz de massa  $\mathbf{M}_{ff}$  e a matriz de rigidez  $\mathbf{K}_{ff}$ ,

conforme:

$$\mathbf{D} = \gamma \mathbf{m}_{ff} + \beta \mathbf{K}_{ff} \quad (5.55)$$

Em termos dos coeficientes  $\gamma$  e  $\beta$ , pode-se utilizar a relação

$$\alpha + \eta^2 \beta = 2\zeta \eta \quad (5.56)$$

e, considerando  $\eta = \mathbf{m}_{ff}^{-1} \mathbf{K}_{ff}$ , a matriz de amortecimento pode ser determinada em função de um fator de amortecimento,  $\zeta$ . Para as simulações, o coeficiente  $\beta$  foi considerado zero e, portanto, a equação da matriz de amortecimento pode ser reescrita da forma:

$$\mathbf{D}_{ff}^i = 2\zeta \mathbf{m}_{ff}^i \sqrt{\mathbf{m}_{ff}^{i-1} \mathbf{K}_{ff}^i} \quad (5.57)$$

## 5.6 RESTRIÇÕES CINEMÁTICAS

A teoria de mult corpos se mostra útil no momento em que diversos corpos rígidos ou flexíveis são conectados entre si e o sistema geral modelado. E, para isso, é essencial descrever as restrições presentes no movimento entre esses corpos. Essas restrições podem ser descritas por constantes ou mesmo funções, dependendo da forma de conexão existente.

Matematicamente, utilizam-se os multiplicadores de Lagrange para introduzir as restrições no sistema. A adição dos multiplicadores aumenta o número de equações a serem resolvidas, entretanto traz simplificações pois o processo de identificação e escrita das equações em função somente das coordenadas independentes não é necessário (SHABANA, 2013). As restrições possuem algumas classificações, tais como holonômicas, escleronômicas, reonômicas, entre outras.

Como apresenta Bauchau (2011), pode-se escrever as equações de restrição do sistema em função das coordenadas generalizadas na forma

$$\Lambda_i(q_1, q_2, q_3, \dots, q_n, t) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n_c \quad (5.58)$$

onde  $n_c$  é o número de restrições existentes. O total de equações do sistema final é, portanto,  $\sum_{j=1}^i (6 + n^j) + n_c$ . O vetor  $\Lambda$  é definido como:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} \Lambda_1(\mathbf{q}, t) & \Lambda_2(\mathbf{q}, t) & \dots & \Lambda_{n_c}(\mathbf{q}, t) \end{bmatrix}^T \quad (5.59)$$

Para o caso das restrições serem escritas da forma apresentada na equação 5.59, essas são denominadas holonômicas ou geométricas e, caso sejam  $C_i(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$  são

cinemáticas. Caso o tempo não apareça explicitamente nas equações, a denominação escleronômicas então é utilizada. Já quando o tempo estiver explícito, são restrições reonômicas.

Conforme Shabana (2013), com a adição das restrições e multiplicadores de Lagrange ( $\lambda$ ) na equação 5.52, o sistema de equações se torna

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}^T \lambda = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v \quad (5.60)$$

onde  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}i} = \left[ \partial\Lambda_1/\partial q_i \quad \partial\Lambda_2/\partial q_i \quad \dots \quad \partial\Lambda_{n_c}/\partial q_i \right]^T$  e, dessa forma,  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}\delta\mathbf{q} = 0$ . A matriz  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}$ , portanto, é escrita como

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \Lambda_{11} & \Lambda_{12} & \dots & \Lambda_{1n} \\ \Lambda_{21} & \Lambda_{22} & \dots & \Lambda_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Lambda_{n_c1} & \Lambda_{n_c2} & \dots & \Lambda_{n_cn} \end{bmatrix} \quad (5.61)$$

onde o termo  $\Lambda_{ij} = \frac{\delta\Lambda_i}{\delta q_j}$ . Além disso, a matriz  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}$  tem posto igual a  $n_c$  já que as funções de restrição são linearmente independentes. A primeira derivada parcial com respeito ao tempo é

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} = -\mathbf{\Lambda}_t \quad (5.62)$$

e, novamente derivado em relação ao tempo

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}} = -[\mathbf{\Lambda}_{tt} + (\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} + 2\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}t}\dot{\mathbf{q}}] \quad (5.63)$$

de forma que  $\mathbf{Q}_c = \mathbf{C}_{\mathbf{q}}\ddot{\mathbf{q}}$ . No formato matricial, o sistema torna-se

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}^T \\ \mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_t \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

sendo que o vetor  $\mathbf{Q}_c$  é obtido pela relação

$$\mathbf{Q}_c = -\mathbf{\Lambda}_{tt} - 2\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}t}\dot{\mathbf{q}} - (\mathbf{\Lambda}_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}})_{\mathbf{q}}\dot{\mathbf{q}} \quad (5.65)$$

onde os sub escritos  $t$  e  $\mathbf{q}$  indicam derivadas parciais em função do tempo e das coordenadas generalizadas, respectivamente. O vetor  $\mathbf{Q}_t$  é dado por:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\mathbf{K}_{ff}\mathbf{q} - \mathbf{D}_{ff}\dot{\mathbf{q}} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

## 6 SISTEMA DE CONTROLE

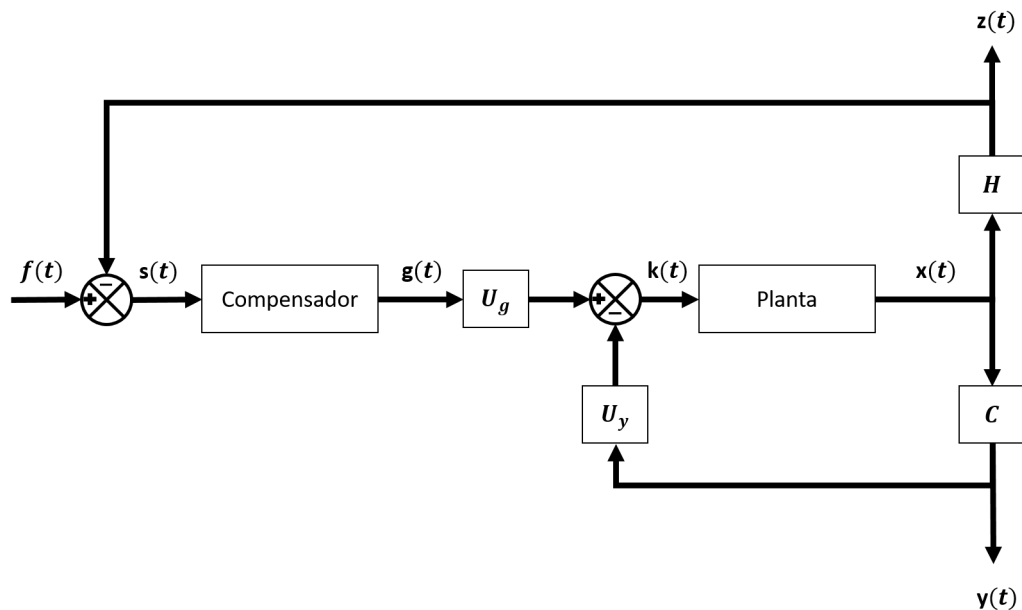
Os sistemas de controle estão presentes nos mais diversos equipamentos de forma a manter uma condição desejada de forma automática. De maneira similar, satélites os utilizam para que uma atitude seja mantida ou atingida. Como atuadores, podem ser utilizadas rodas de reação, bobinas magnéticas, giroscópios de controle de momento, entre outros (WIE, 2008).

Neste trabalho somente foram consideradas rodas de reação como atuadores e, para a lei de controle para rastreamento da atitude, utilizou-se um sistema de rastreador linear quadrático (do inglês *Linear Quadratic Tracker*, LQT).

### 6.1 RASTREADOR LINEAR QUADRÁTICO

Um sistema LQT é um servo sistema que visa o rastreamento de comandos específicos e diferentes de zero com uma configuração genérica de compensadores. Conforme apresenta a Figura 6.1, existe uma malha de realimentação interna para um sistema de aumento de estabilidade (do inglês *Stability Augmentation System*, SAS) e uma malha externa para rastreamento das variáveis de interesse.

Figura 6.1 – Diagrama de um sistema Rastreador Linear Quadrático



Fonte: Adaptado de Stevens, Lewis e Johnson (2015)

Conforme apresentado na Figura 6.1, as variáveis medidas,  $y$ , podem ser expressas

da forma

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) \quad (6.1)$$

e as variáveis de performance

$$\mathbf{z}(t) = \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \quad (6.2)$$

sendo  $\mathbf{x}(t)$  o vetor de estados da planta. As matrizes  $\mathbf{U}_y$  e  $\mathbf{U}_g$  são matrizes de ganho enquanto que  $\mathbf{f}(t)$ ,  $\mathbf{s}(t)$ ,  $\mathbf{g}(t)$ ,  $\mathbf{k}(t)$  são, respectivamente, os vetores de rastreo, erro, saída do compensador e ação de controle. O erro, portanto, é escrito como

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{z}(t) \quad (6.3)$$

ou então

$$\mathbf{s}(t) = \mathbf{f}(t) - \mathbf{H}\mathbf{x}(t) \quad (6.4)$$

Além disso, o compensador é do formato

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{F}_w \mathbf{w} + \mathbf{F}_s \mathbf{s} \\ \mathbf{g} &= \mathbf{F}_d \mathbf{w} + \mathbf{F}_j \mathbf{s} \end{aligned} \quad (6.5)$$

para que a estrutura desejada possa ser adotada (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015). As variáveis  $\mathbf{w}$  e  $\mathbf{g}$  são os vetores de estado e saída do compensador, respectivamente. Para o modelo proposto, a dinâmica da planta pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{N}_x \mathbf{x} + \mathbf{N}_k \mathbf{k} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{N}_y \mathbf{x} \end{aligned} \quad (6.6)$$

Para o desenvolvimento das equações futuras, foi considerada a dinâmica aumentada da planta, ou seja, a união do vetor de estados da planta com o vetor de estados do compensador. Em formato matricial, a dinâmica aumentada pode ser escrita da forma

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_k \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{k} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad (6.7)$$

e, utilizando a relação da equação 6.4 na expressão acima, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_k \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{k} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \mathbf{f} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (6.8)$$

que, após manipulação algébrica, assume o formato da equação 6.9.

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \dot{\mathbf{w}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & 0 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{H} & \mathbf{F}_w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{N}_k \\ 0 \end{bmatrix} \mathbf{k} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (6.9)$$

As matrizes aumentadas são retiradas da equação 6.9 e dadas conforme as equações abaixo:

$$\overline{\mathbf{N}}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_x & 0 \\ -\mathbf{F}_s \mathbf{H} & \mathbf{F}_w \end{bmatrix} \quad (6.10)$$

$$\overline{\mathbf{N}}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{N}_k \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.11)$$

$$\overline{\mathbf{F}}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

De forma similar ao que foi realizado para os estados do sistema, é possível unir as saídas da planta com as saídas do compensador:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \mathbf{s} \quad (6.13)$$

Substituindo a relação 6.4 na equação 6.13, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ 0 & \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \mathbf{f} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathbf{F}_j \mathbf{H} \end{bmatrix} \mathbf{x} \quad (6.14)$$

Unindo os termos da equação 6.14 obtém-se:

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{y}} \\ \dot{\mathbf{v}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{F}_j \mathbf{H} & \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \mathbf{f} \quad (6.15)$$

A equação 6.15 fornece as matrizes aumentadas  $\overline{\mathbf{C}}$  e  $\overline{\mathbf{F}}_j$ , dadas pelas equações 6.16 e 6.17 respectivamente.

$$\overline{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & 0 \\ -\mathbf{F}_j \mathbf{H} & \mathbf{F}_d \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

$$\overline{\mathbf{F}}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{F}_j \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

A matriz  $\overline{\mathbf{H}}$  é obtida considerando a matriz  $\mathbf{H}$  e zeros com mesmo número de colu-

nas da matriz  $F_w$ .

$$\bar{H} = \begin{bmatrix} H \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

A ação de controle, por sua vez, é escrita como:

$$k = -U_y y + U_g g \quad (6.19)$$

Podendo ser resumida da forma:

$$k = [-U_y | U_g] \begin{bmatrix} y \\ g \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

Sendo, então, a matriz de ganhos aumentada,  $K_a$ , dada por:

$$\bar{U} = [U_y | U_g] \quad (6.21)$$

### 6.1.1 Minimização do Índice de Desempenho

Para determinar os ganhos para o modelo, conforme (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015) aponta, é possível utilizar a equação de Lyapunov, resolvendo a para  $P$ , conforme

$$0 = \bar{\bar{N}}_x^T P + P \bar{\bar{N}}_x + U_x + \bar{C}^T \bar{U}^T U_k \bar{U} C \quad (6.22)$$

sendo os termos  $U_k$  e  $U_x$  matrizes de ponderação para as ações de controle e estados, respectivamente,  $\bar{\bar{N}}_x = \bar{N}_x - \bar{N}_k \bar{U} C$  e  $\bar{\bar{N}}_k = \bar{F}_s - \bar{N}_k \bar{U} F_j$ . Considerando a equação:

$$X = \bar{\bar{N}}_x^{-1} \bar{\bar{N}}_k f_0 f_0^T \bar{\bar{N}}_k^T \bar{\bar{N}}_x^T \quad (6.23)$$

Com as equações 6.23 e 6.22, é possível determinar a função de custo ótimo,  $Y$ , a ser minimizada (6.24):

$$Y = tr(PX) \quad (6.24)$$

## 6.2 ALOCAÇÃO DE POLOS

O sistema de alocação de polos para um problema de regulador (quando a entrada de referência é nula), no espaço de estados, e pode ser expresso pela equação

$$\mathbf{k} = -\mathbf{U}\mathbf{x} \quad (6.25)$$

sendo  $\mathbf{k}$  o vetor de controle,  $\mathbf{U}$  a matriz de ganhos e  $\mathbf{x}$  o vetor de estados. Como apresentado por Ogata (2010), essa técnica de controle é utilizada com o objetivo de tornar a saída igual a zero que, com a presença de perturbações, irá se distanciar da referência. O sistema pode então, ser dado por:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = (\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_k\mathbf{U})\mathbf{x}(t) \quad (6.26)$$

Resolvendo a equação acima, obtém-se

$$\mathbf{x}(t) = e^{(\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_k\mathbf{U})t}\mathbf{x}(0) \quad (6.27)$$

sendo tanto a estabilidade quando o formato da resposta temporal podem ser obtidos pela autovalores de  $\mathbf{N}_x - \mathbf{N}_k\mathbf{U}$ , os quais são denominados polos reguladores. Dessa forma, os ganhos da matriz  $\mathbf{U}$  podem ser ajustados de forma a obter os valores desejados dos polos de malha fechada.

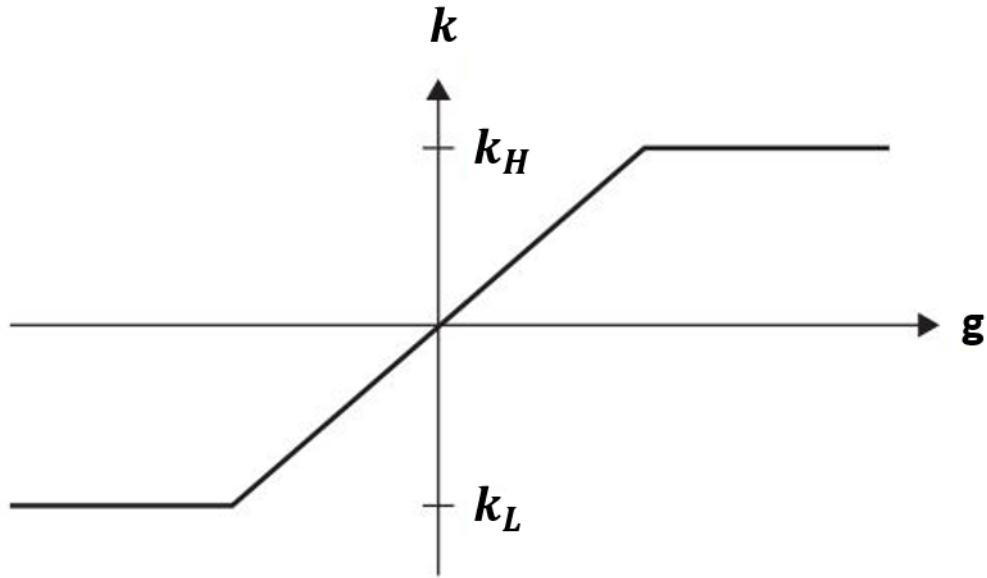
## 6.3 ANTI WIND-UP

De forma ideal, os atuadores podem entregar as ações de controle desejadas sem ter um limite máximo ou mínimo. Entretanto, na prática, existem valores que devem ser respeitados, denominados de batentes, sendo que o gráfico da capacidade de atuação pode ser visto na Figura 6.2. Dessa forma, mesmo que uma ação de controle seja extremamente alta, o atuador não irá ultrapassar sua capacidade limite.

Com isso, é necessário prestar atenção em alguns detalhes do projeto de controle quando compensadores empregarem integradores. Isso porque os valores da ação de controle continuarão a ser integrados mesmo após o batente ser atingido, não correspondendo o valor desejado com o valor real do controle gerado pelo atuador. Para mitigar esse problema, utilizam-se filtros Anti Wind-Up de forma a limitar o estado do controlador. Como apresentado por Stevens, Lewis e Johnson (2015), é possível modificar o compensador de forma a garantir que não ocorra o Wind-Up limitando o estado do controlador. Para isso, parte-se da equação 6.5, entretanto os vetores de estados necessitam ser modificados de forma a englobar o sistema de aumento de estabilidade (SAS). Isso ocorre pois os ganhos são dados pelo controlador - compensador mais o SAS - que então necessita ter seu



Figura 6.2 – Batentes de uma ação de controle



Fonte: Adaptado de Stevens, Lewis e Johnson (2015)

estado limitado. Portanto, a equação 6.5 pode ser reescrita como

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{w}} &= \mathbf{F}_{w0} \mathbf{w} + \mathbf{F}_{s0} \mathbf{w}_a \\ \mathbf{g} &= \mathbf{F}_{dk} \mathbf{w} + \mathbf{F}_{jk} \mathbf{w}_a\end{aligned}\tag{6.28}$$

onde  $\mathbf{w}_a$  indica a entrada aumentada do controlador, sendo então

$$\mathbf{w}_a = \begin{bmatrix} s \\ y \\ \mathbf{k}_U \end{bmatrix}\tag{6.29}$$

ou seja, estando em função do erro, dos estados da planta e da própria ação de controle com batentes, já que  $\mathbf{k}_U$  representa a ação de controle após ser limitada pelos batentes. A matriz  $\mathbf{F}_{dk}$ , por sua vez, engloba a matriz de ganhos da saída do compensador, antes definida por  $\mathbf{U}_g$ , enquanto que a matriz  $\mathbf{F}_{jk}$  engloba a matriz de ganhos de realimentação interna,  $\mathbf{U}_y$ . As matrizes  $\mathbf{F}_{w0}$  e  $\mathbf{F}_{s0}$  são dadas por

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{w0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_w - \mathbf{U}_L \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \mathbf{F}_{s0} &= \begin{bmatrix} \mathbf{F}_s - \mathbf{U}_L \mathbf{F}_d & \mathbf{U}_L \end{bmatrix}\end{aligned}\tag{6.30}$$

onde  $\mathbf{U}_L$  deve ser escolhida de forma a manter a relação  $\mathbf{F}_0 = \mathbf{F} - \mathbf{U}_L \mathbf{C}$  assintoticamente

estável e, para isso, pode ser empregada a técnica de alocação de polos.

## 6.4 ATUADORES

### 6.4.1 Rodas de reação

Para o controle de atitude, são comumente empregadas rodas de reação, de forma a gerar torque e alterar a quantidade de movimento angular do sistema. Como apresentado por Wie (2008), a equação da quantidade de movimento angular ( $\Upsilon$ ) para um corpo rígido é dada por

$$\Upsilon = \mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat} \boldsymbol{\omega} + \mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas} (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \quad (6.31)$$

sendo  $\mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat}$  a matriz de inércia do satélite e  $\mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas}$  a matriz de inércia das rodas de reação. Além disso,  $\boldsymbol{\Omega}$  indica a velocidade angular das rodas de reação em relação ao sistema do corpo. Derivando a equação 6.31 em relação ao sistema inercial, obtém-se:

$$\dot{\Upsilon} = \mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat} \boldsymbol{\omega}) + \mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas} (\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \dot{\boldsymbol{\omega}}) + (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas} (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega})) \quad (6.32)$$

Considerando que  $\dot{\Upsilon}$  pode ser igualado aos torques externos ( $\mathbf{Q}_e$ ), e utilizando a relação  $\mathbf{Q}_v = -(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat} \boldsymbol{\omega}))$ , obtém-se

$$(\mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat} + \mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas}) \dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{Q}_e + \mathbf{Q}_v + \mathbf{Q}_r \quad (6.33)$$

sendo  $\mathbf{Q}_r$  atribuído às rodas de reação e dado por:

$$\mathbf{Q}_r = -(\mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas} \dot{\boldsymbol{\Omega}} + (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}) \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^{rodas} (\boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}))) \quad (6.34)$$

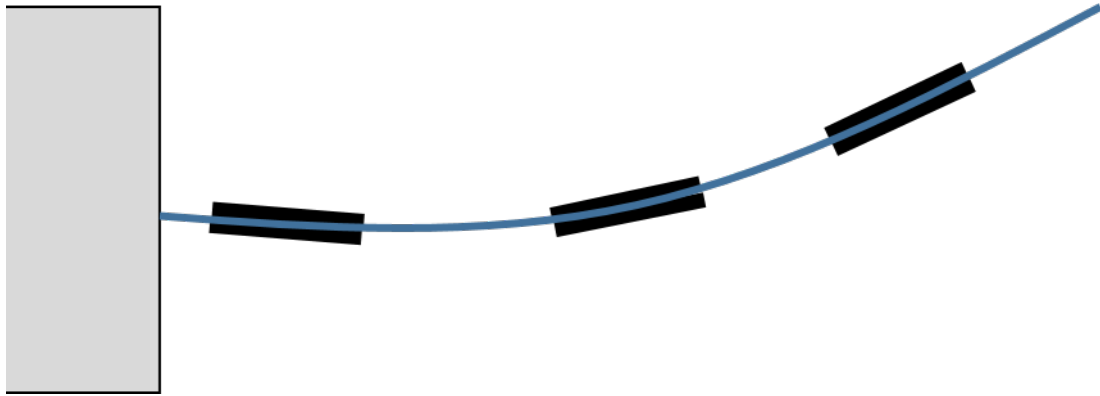
Dessa forma, as acelerações angulares das rodas de reação podem ser utilizadas como as variáveis de controle, responsáveis por gerar os torques de controle no satélite. Apesar de não ter sido considerado durante as simulações, a utilização de rodas de reação geralmente exige o uso de outros atuadores para dessaturá-las, ou seja, evitar que atinjam sua velocidade máxima de rotação e, conseqüentemente, percam sua eficiência (MANTOVANI et al., 2018).

### 6.4.2 Atuadores para supressão de vibração

Diversas formas foram estudadas com o intuito de controlar a vibração de estruturas flexíveis. Entre as formas empregadas está a utilização de atuadores piezoelétricos (HU; MA, 2005), controles de atitude que consideram os modos flexíveis (WANG et al., 2017) e até mesmo giroscópios de controle de momento posicionados na superfície da estrutura flexível (HU; ZHANG, 2015). Além dos mais diversos atuadores, variadas técnicas de controle são estudadas tais como  $H_\infty$  (SOUZA; SOUZA, 2015) e controle preditivo (TAYYEBTAHER; ESMAEILZADEH, 2017).

A utilização de piezoelétricos, que podem atuar tanto como sensores como atuadores, é feita sobre as estruturas flexíveis, como mostra a Figura 6.3, onde a estrutura flexível é mostrada em azul e os atuadores em preto.

Figura 6.3 – Atuadores piezoelétricos dispostos sobre estrutura flexível

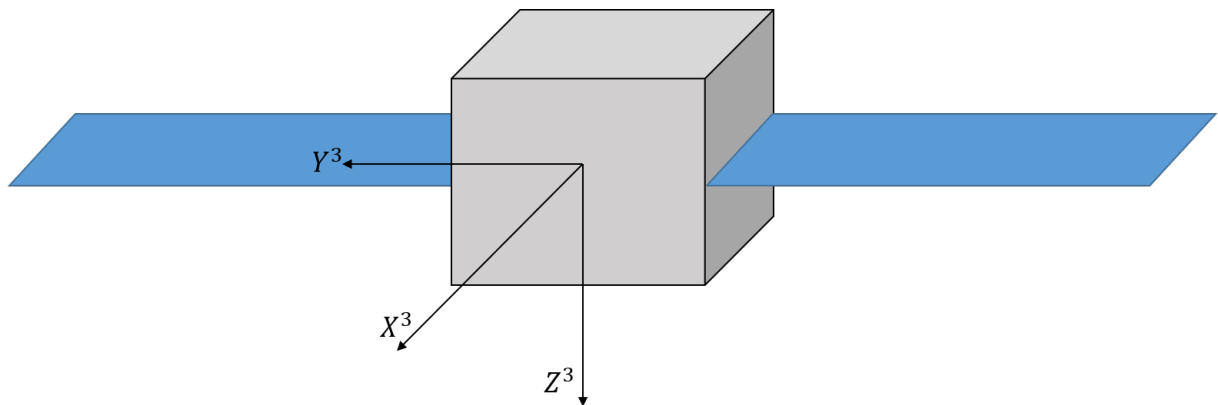


Nesse formato, esses atuadores são distribuídos sobre a superfície do painel e quando sujeitos a uma corrente elétrica geram forças, agindo sobre os modos flexíveis. Para as simulações, matematicamente foram considerados duas variáveis de controle agindo sobre o primeiro modo de flexão da estrutura, uma para cada painel. Dessa maneira, a ação de controle é alocada no primeiro termo do vetor  $Q_{er}^i$ . Isso se torna efetivo devido ao primeiro modo ser dominante em relação aos outros, e portanto, atuar sobre ele se é uma maneira viável de atenuar a vibração, podendo ser considerado análogo a atuar sobre o próprio deslocamento do painel.

## 7 SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Com a implementação das equações, apresentadas dos Capítulos 5 e 6, através dos *softwares* Mathematica e MATLAB, foi possível simular as condições de um satélite no espaço, além de analisar os resultados obtidos. Conforme indica a Figura 7.1, foram adotados dois SAGs (em azul) conectados em lados opostos do hub.

Figura 7.1 – Configuração adotada do satélite



Os dados utilizados para a simulação foram:

- Massa do *hub* do satélite: 500 kg;
- Matriz de inercia do *hub*:  $\mathbf{I}_{\theta\theta}^{sat} = \begin{bmatrix} 310 & 1.11 & 1.01 \\ 1.11 & 360 & -0.35 \\ 1.01 & -0.35 & 530.7 \end{bmatrix} kg.m^2$ ;
- Massa do painel solar: 7.5 kg;
- Comprimento do painel solar:  $l = 3 m$ ;
- Largura do painel solar:  $b = 1 m$ ;
- Espessura do painel solar:  $c = 0.09 m$ ;
- Módulo de elasticidade:  $0.8035 * 10^9 Pa$ ;
- Fator de amortecimento: 0.025;
- Módulo de Poisson: 0.3;
- Posição da raiz da linha de simetria do painel direito em relação ao centro de massa do hub:

- $X_0^1 = 0 \text{ m};$
- $Y_0^1 = 0.45 \text{ m};$
- $Z_0^1 = -0.7 \text{ m};$
- Posição da raiz da linha de simetria do painel esquerdo em relação ao centro de massa do hub:
  - $X_0^2 = 0 \text{ m};$
  - $Y_0^2 = -0.45 \text{ m};$
  - $Z_0^2 = -0.7 \text{ m};$
- Raio da órbita:  $600 \text{ km};$
- Inclinação da órbita:  $0^\circ.$

A órbita é assumida como circular. Durante as simulações, tinha-se como objetivo analisar a forma da resposta de corpo flexível dos painéis sobre deflexões, assim como na presença de torques externos e de controle. Inicialmente o sistema de eixos do corpo é assumido como estando alinhado com o sistema de referência LVLH, ou seja,  $\phi = \theta = \psi = 0$ . Como agentes externos, foi considerada a força da gravidade agindo sobre os painéis, além do torque gravitacional, dado por:

$$\mathbf{Q}_g = 3\omega_n^2 \mathbf{a} \times (\mathbf{I}_{\theta\theta}^{corpo} \mathbf{a}) \quad (7.1)$$

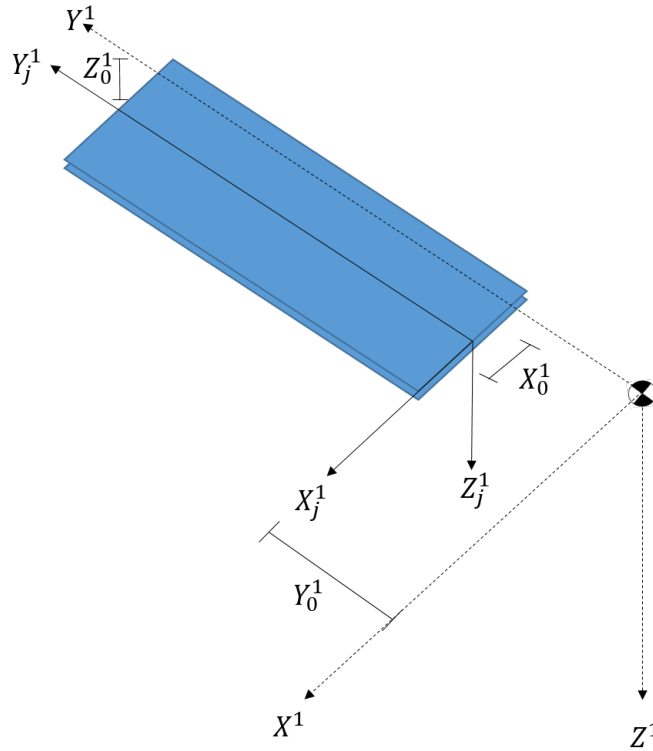
O vetor  $\mathbf{a}$  é um vetor unitário que aponta do sistema do corpo para o centro da Terra.

## 7.1 MODELAGEM DOS CORPOS

A sequência adotada define o painel direito como o corpo 1, o painel esquerdo como corpo 2 e o hub como corpo 3. Para a modelagem da estrutura, foi considerado um hub central com as propriedades de massa e inércia apresentadas anteriormente. O centro do sistema de coordenadas do hub foi posicionado em seu centro de massa.

Para o painel direito, o sistema de referência  $(X^1, Y^1, Z^1)$  foi adotado de forma a ficar coincidente com o sistema do corpo central, ou seja, o sentido positivo dos eixos coincide com os do hub quando colocado na sua posição de engaste. Ademais, a origem desse sistema foi posicionada na origem do sistema do hub de forma a simplificar o modelo, conforme a Figura 7.2. Também foi definido um sistema auxiliar, do segmento  $j$  do corpo  $i$ , dado pelos eixos  $X_j^1$ ,  $Y_j^1$  e  $Z_j^1$ , representado na Figura 7.2.

Figura 7.2 – Sistema de referência do corpo 1



Com essa configuração assumida, a integral de  $\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^i$ , por exemplo, seria

$$\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^1 = \int_{X_0^1-b/2}^{X_0^1+b/2} \int_0^{Y_0^1+L} \int_{Z_0^1-c/2}^{Z_0^1+c/2} \rho^1 \tilde{\mathbf{u}}^{1T} \tilde{\mathbf{u}}^1 dV^1 \quad (7.2)$$

entretanto, como o segmento inicial do painel (de 0 até  $Y_0^1$ ) é adotado para que a origem dos sistemas coincida, pode-se manipular a equação 7.2 de forma a obter

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^1 &= \int_{X_0^1-b/2}^{X_0^1+b/2} \int_0^{Y_0^1} \int_{Z_0^1-c/2}^{Z_0^1+c/2} \rho^1 \tilde{\mathbf{u}}^{1T}(X^1, Y^1, Z^1) \tilde{\mathbf{u}}^1(X^1, Y^1, Z^1) dX dY dZ \\ &+ \int_{X_0^1-b/2}^{X_0^1+b/2} \int_0^L \int_{Z_0^1-c/2}^{Z_0^1+c/2} \rho^1 \tilde{\mathbf{u}}^{1T}(X^1, \bar{Y}^1, Z^1) \tilde{\mathbf{u}}^1(X^1, \bar{Y}^1, Z^1) dX d\bar{Y} dZ \end{aligned} \quad (7.3)$$

sendo que, para isso, assume-se que  $\bar{Y} = Y_0^1 + Y$  e, portanto,  $d\bar{Y} = dY$ . Além do mais, o segmento inicial do painel possui massa zero e, conseqüentemente  $\rho = 0$ , o que leva a equação 7.4. As integrais realizadas para os corpos 1 e 2 seguem o mesmo princípio aqui demonstrado.

$$\bar{\mathbf{I}}_{\theta\theta}^1 = \int_{-b/2}^{b/2} \int_0^L \int_{-c/2}^{c/2} \rho^1 \tilde{\mathbf{u}}^{1T}(\bar{X}^1, \bar{Y}^1, \bar{Z}^1) \tilde{\mathbf{u}}^1(\bar{X}^1, \bar{Y}^1, \bar{Z}^1) dX dY dZ \quad (7.4)$$

Inicialmente, a matriz  $\mathbf{S}^1$  foi montada considerando as formas modais de vigas tanto para deflexão como para torção. Foi considerado que, durante uma deflexão positiva da

viga (sentido positivo de  $Z$ ), os elementos superiores ( $Z = c/2$ ) se deslocam no sentido negativo do eixo  $Y^1$  e os elementos inferiores ( $Z = -c/2$ ) se deslocam no sentido positivo. Além disso, durante a torção no sentido positivo, elementos posicionados em  $X^1 < 0$  sofrem deslocamentos positivos no eixo  $X^1$  e, conseqüentemente, elementos posicionados  $X^1 < 0$  sofrem deslocamento negativo em  $X^1$ . Dessa maneira

$$\mathbf{S}^1 = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial T_t}{\partial y} yz \\ -z \frac{\partial Z_z}{\partial y} & 0 \\ Z_z & -T_t x \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

onde os termos  $Z_z$  e  $T_t$  são as formas modais de flexão e torção, respectivamente. Para tanto, são adotados  $n_{q_{ff}}$  formas de flexão e  $n_{q_{ft}}$  formas de torção, de forma que o número total de coordenadas elásticas do corpo  $i$  seja dado por  $n_{q_f}^i = n_{q_{ff}}^i + n_{q_{ft}}^i$ . A matriz apresentada na equação 7.5 de forma que o vetor de coordenadas flexíveis esteja  $\mathbf{q}_f = \begin{bmatrix} q_{ff} & q_{ft} \end{bmatrix}^T$ . O processo análogo foi realizado para a matriz  $\mathbf{S}^2$ . Com esse sistema definido, valores positivos de  $q_{f1}$  para ambos os painéis indicam uma deflexão positiva no eixo  $Z$ .

Considerando os três corpos e suas respectivas matrizes de massa generalizadas, força generalizada e coordenadas generalizadas, é possível escrever o sistema total da seguinte forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}^1 \\ \mathbf{q}^2 \\ \mathbf{q}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^1 \\ \mathbf{Q}^2 \\ \mathbf{Q}^3 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

Devido aos painéis estarem engastados ao corpo central, é necessário adicionar restrições ao sistema. Pode-se expressar a relação da posição dos painéis (considerando a origem dos sistemas de referência dos corpos) da forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^1 - \mathbf{R}^3 &= 0 \\ \theta^1 - \theta^3 &= 0 \\ \mathbf{R}^2 - \mathbf{R}^3 &= 0 \\ \theta^2 - \theta^3 &= 0 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Realizando a derivada parcial das equações acima em função das coordenadas

generalizadas, é possível obter a seguinte relação

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^1 \\ \delta \theta^1 \\ \delta \mathbf{q}_f^1 \\ \delta \mathbf{R}^2 \\ \delta \theta^2 \\ \delta \mathbf{q}_f^2 \\ \delta \mathbf{R}^3 \\ \delta \theta^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (7.8)$$

e, portanto

$$\mathbf{C}_q = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{I} \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{I} & 0 & 0 & -\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

sendo  $\mathbf{I}$  a matriz identidade. A obtenção do vetor  $\mathbf{Q}_c$ , como apresentado pela equação 5.65, a partir da equação 7.7, resulta em  $\mathbf{Q}_c = 0$ . Isso ocorre pois a relação das equações de restrição não dependem explicitamente do tempo e, portanto, a derivada parcial em relação ao tempo é nula. Ademais, os termos  $(\mathbf{C}_q \dot{\mathbf{q}})_q$  também resultam em zero. O sistema final, com as relações de restrição é, então:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & 0 & 0 & \\ 0 & \mathbf{M}^2 & 0 & \mathbf{C}_q^T \\ 0 & 0 & \mathbf{M}^3 & \\ & \mathbf{C}_q & & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q} \\ \mathbf{Q}_c \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

## 7.2 SISTEMAS DE CONTROLE ATIVO

O sistema de controle de atitude foi projetado considerando três rodas de reação como atuadores, posicionadas cada uma em um eixo do sistema do corpo do hub. As rodas de reação possuem as seguintes propriedades:

- Inércia:  $0.01911 \text{ kgm}^2$ ;
- Torque máximo:  $0.075 \text{ Nm}$ ;
- Velocidade angular máxima:  $6000 \text{ RPM}$ .



Como compensador, foi utilizado um integrador puro de forma a rastrear os estados da posição angular ( $\phi, \theta, \psi$  ou  $q$ ), enquanto que todos os estados do corpo rígido (posição e velocidade angular) foram realimentados internamente. As matrizes do compensador, assim como os ganhos e ponderações utilizados estão no Apêndice B.1.

Para o controle de modo flexível, foram utilizadas duas técnicas de controle considerando atuadores ideais agindo sobre o primeiro modo dos painéis - tais como piezoelétricos. O primeiro é o método de alocação de polos de forma a regular as velocidades das coordenadas de deformação. Dessa maneira, o controle se torna uma espécie de sistema de aumento de estabilidade, aumentando artificialmente a rigidez inerente aos painéis. As matrizes para esse caso estão no Apêndice B.2.1.

Como segundo método, foi utilizado um LQT com compensador PID, onde as variáveis rastreadas são as velocidades do primeiro modo flexível de cada painel. Nesse sistema, não foi utilizada a realimentação interna. Para esse sistema, as matrizes encontram-se no Apêndice B.2.2.

### 7.3 RESULTADOS PARA MODELO ESTRUTURAL POR VIGAS

Para o modelo do painel solar engastado modelado pela teoria de vigas, foram considerados os dois primeiros modos de flexão e os dois primeiros modos de torção. Como condição inicial, o satélite foi colocado no espaço nos ângulos  $\theta = 0$ ,  $\psi = 0$  e  $\phi = 1.03^\circ$  (hub e painéis, já que estão alinhados). Essa posição de equilíbrio surge pelo satélite estar sobre a influência do torque gravitacional e possui produtos de inércia. Além disso, devido a órbita ser circular e com raio de  $600 \text{ km}$ , as velocidades angulares de equilíbrio são:  $p = 0 \text{ rad/s}$ ,  $q = 0.00108 \text{ rad/s}$  e  $r = -1.9 \cdot 10^{-5} \text{ rad/s}$ . Ademais, os painéis possuem uma deflexão de equilíbrio, que surge da força gravitacional agindo sobre os corpos. A condição de equilíbrio para os modos são  $q_{f1} = -0.0001489$ ,  $q_{f2} = 0$ ,  $q_{f3} = 4.2 \cdot 10^{-5}$  e  $q_{f4} = 0$ , sendo esses valores aplicáveis para ambos os painéis. A partir disso é possível avaliar que os corpos flexíveis iniciam com uma deflexão em relação ao centro da Terra, esperado devido a força gravitacional.

Nessa condição de equilíbrio, é possível colocar uma perturbação de 0.05 na coordenada do primeiro modo flexível do painel, para observar a resposta que surge. Esse caso é mostrado na Figura 7.3 e, como é possível ver, uma perturbação no painel direito acaba excitando vibrações no painel esquerdo. Além disso, existem alterações na velocidade angular do satélite, como apresenta a Figura 7.4. Também é possível verificar pela Figura 7.5 que a segunda forma modal encontra-se muito menos excitada que a primeira, enquanto as outras se aproximam de zero - o resultado análogo é obtido para o painel esquerdo.

É interessante avaliar que a frequência da oscilação obtida pela simulação é pró-

Figura 7.3 – Primeiro modos dos painéis com perturbação e sem sistema de controle

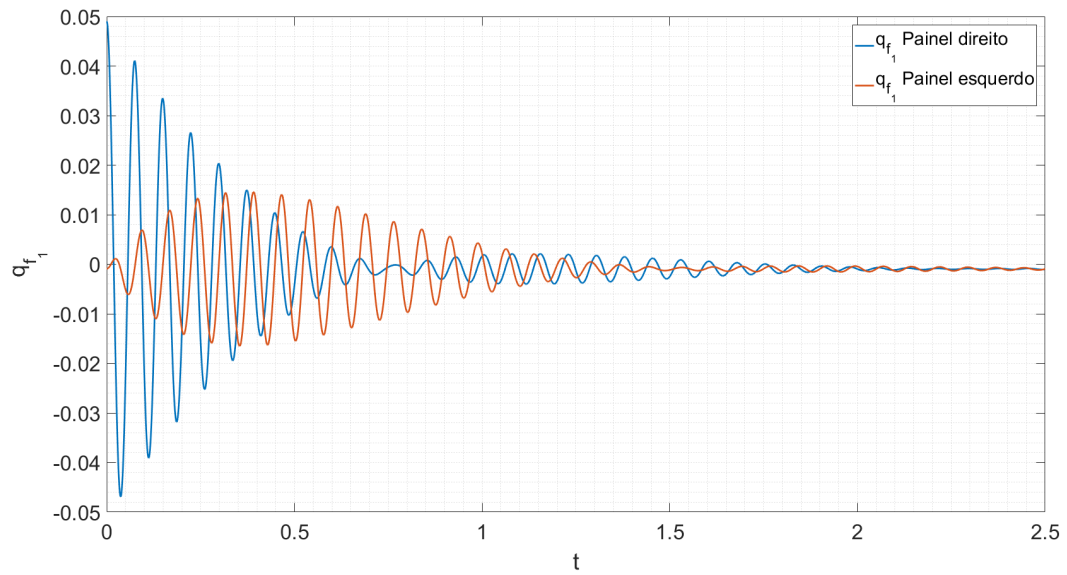


Figura 7.4 – Velocidade angular do satélite perturbação e sem sistema de controle

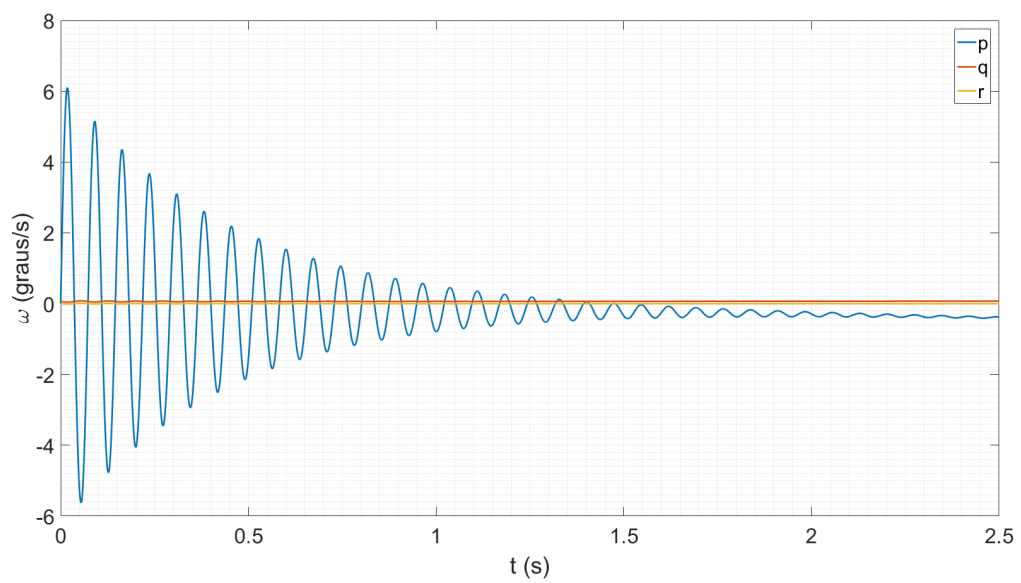
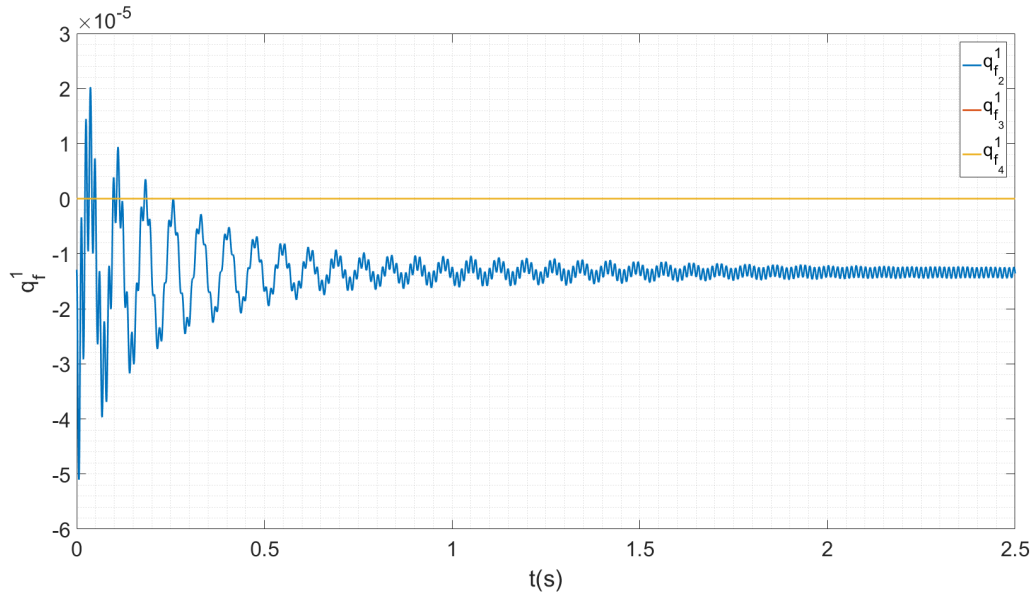


Figura 7.5 – Coordenadas flexíveis do painel direito



xima a frequência obtida por equações analíticas de viga engastada, isso supondo Poisson igual a zero. Nesse caso, a frequência de primeiro modo da viga é obtida pela equação 4.19, resultando em  $70.47 \text{ rad/s}$  e, consequentemente tendo período de  $0.08915 \text{ s}$ . O valor obtido para o primeiro modo é de  $0.08649$ , representando uma diferença de somente 3%.

As respostas do sistema considerando perturbação em outros modos flexíveis podem ser vistas no Apêndice C.1.

### 7.3.1 Resposta de modo flexível com controle por alocação de polos

Para as simulações com a perturbação do primeiro modo de flexão, foi considerado uma perturbação de  $q_{f1}^1 = 0.025$ , sendo que a resposta com o controle de supressão de vibração por alocação de polos é mostrado na Figura 7.6. A Figura 7.7 já apresenta a comparação entre a coordenada  $q_{f1}^1$  sem controle e com o controle por alocação de polos.

Como visto, a perturbação do modo flexível acaba perturbando também as velocidades angulares do satélite, mas que acabam sendo minimizadas de forma simultânea quando o controle estiver ativo atuando sobre os painéis. Na Figura 7.8 é possível analisar a comparação das velocidades angulares  $p$  do satélite sem e com o controle de modo flexível. Já as ações de controle obtidas para esse caso são apresentadas na Figura 7.9.

Como é possível ver, o controle por alocação de polos foi capaz de reduzir tanto a vibração dos painéis como a velocidade angular dos corpos.

Figura 7.6 – Primeiro modos dos painéis com perturbação e controle por alocação de polos

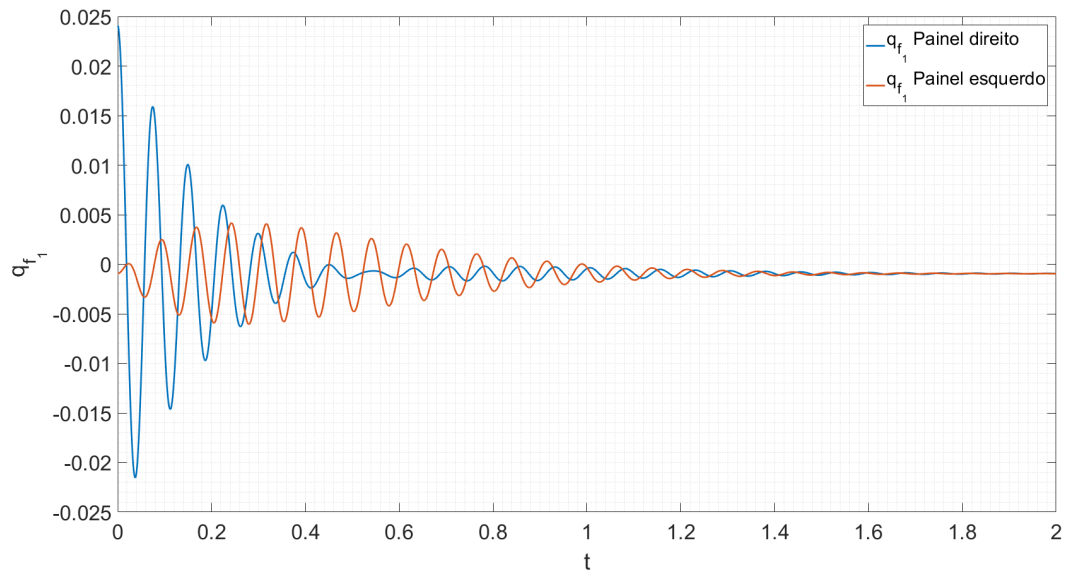


Figura 7.7 – Comparação de  $q_{f1}^1$  perturbada sem controle e com controle por alocação de polos

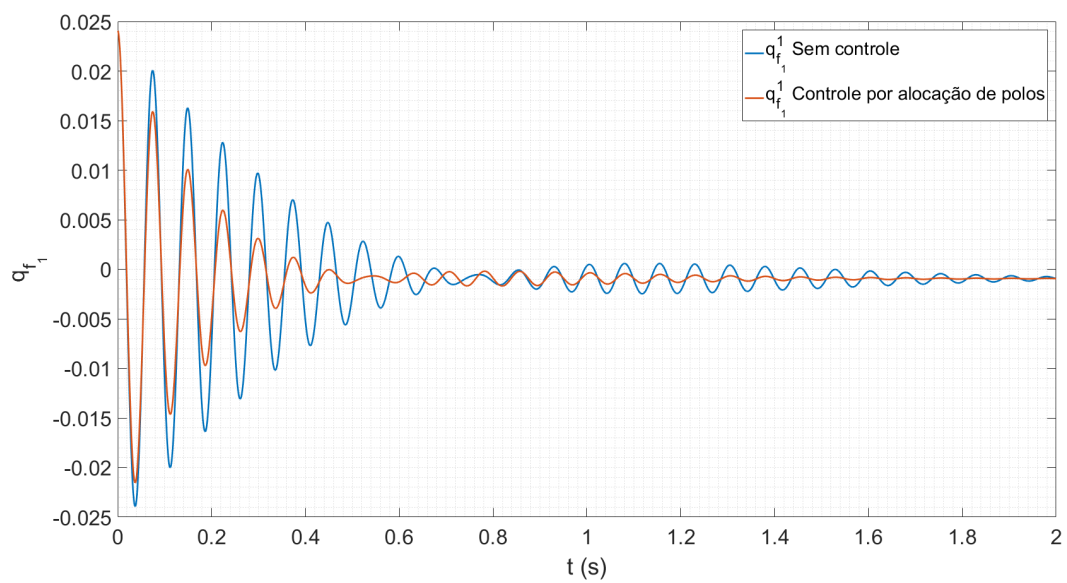


Figura 7.8 – Comparação da velocidade angular do satélite com e sem controle por alocação de polos

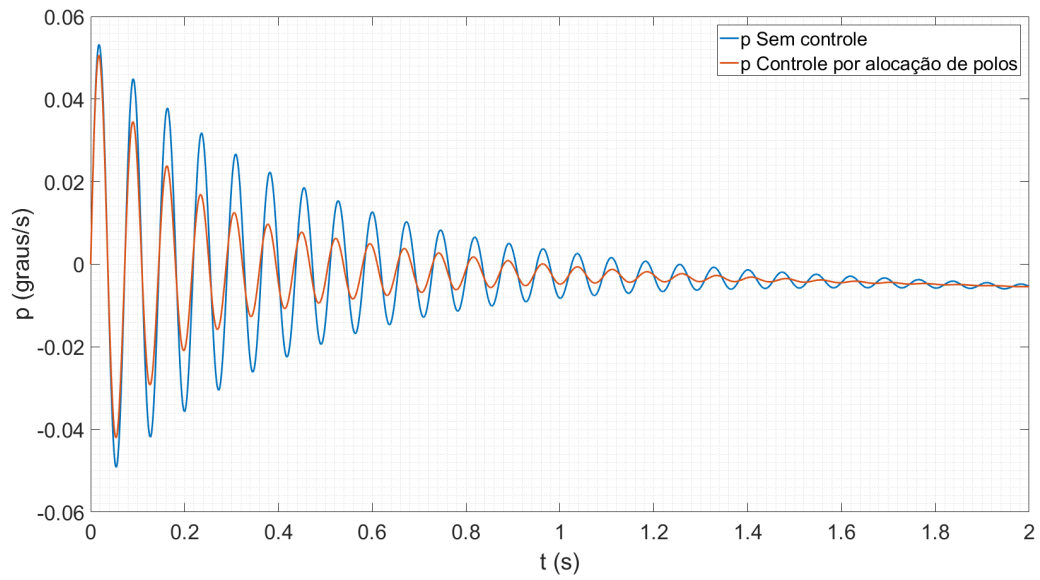
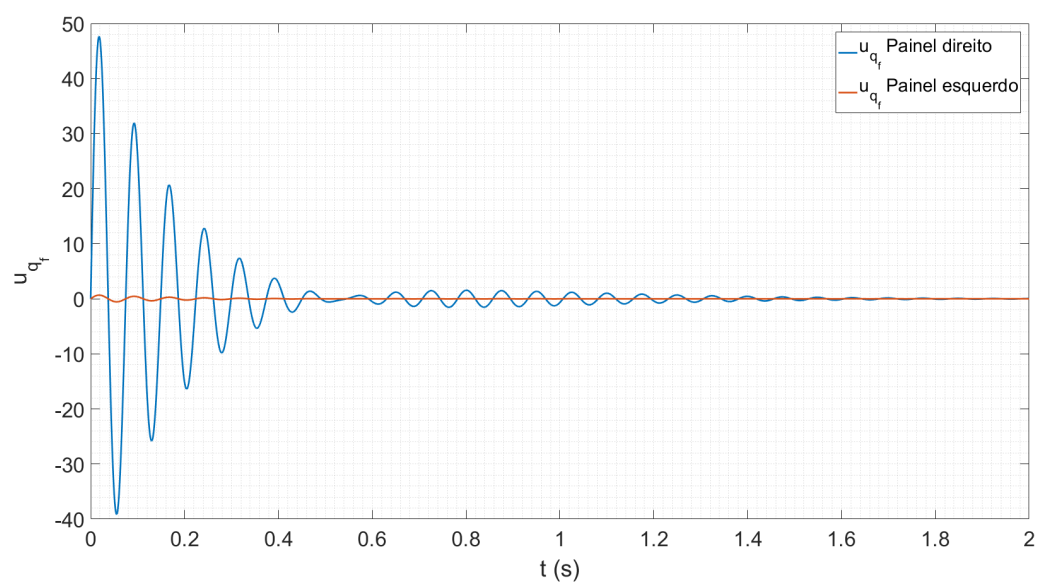


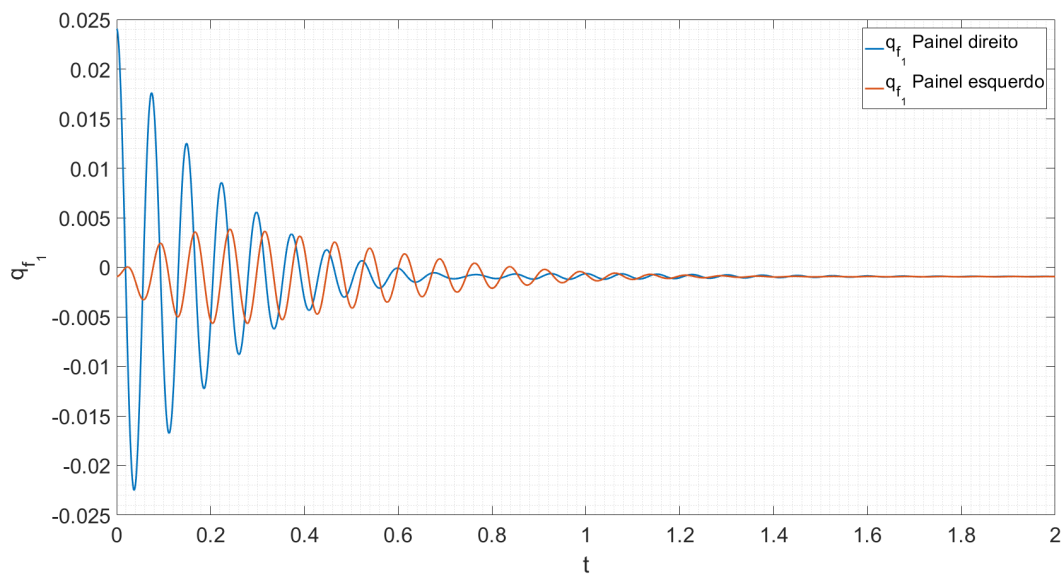
Figura 7.9 – Ações de controle geradas pela alocação de polos



### 7.3.2 Resposta de modo flexível com controle por LQT PID

De forma similar a alocação de polos, para análise do controle por LQT e compensador PID, foi utilizada uma perturbação de 0.025 na variável  $q_{f1}^1$ . A resposta do amortecimento dos painéis pode ser vista na Figura 7.10, enquanto que a Figura 7.11 apresenta a comparação entre o caso sem controle e com o controle PID ativo.

Figura 7.10 – Primeiro modos dos painéis com perturbação e controle LQT com compensador PID



A ação de controle obtida para o LQT com compensador PID está na Figura 7.12.

Figura 7.11 – Comparação de  $q_{f_1}^1$  perturbada sem controle e com controle LQT com compensador PID

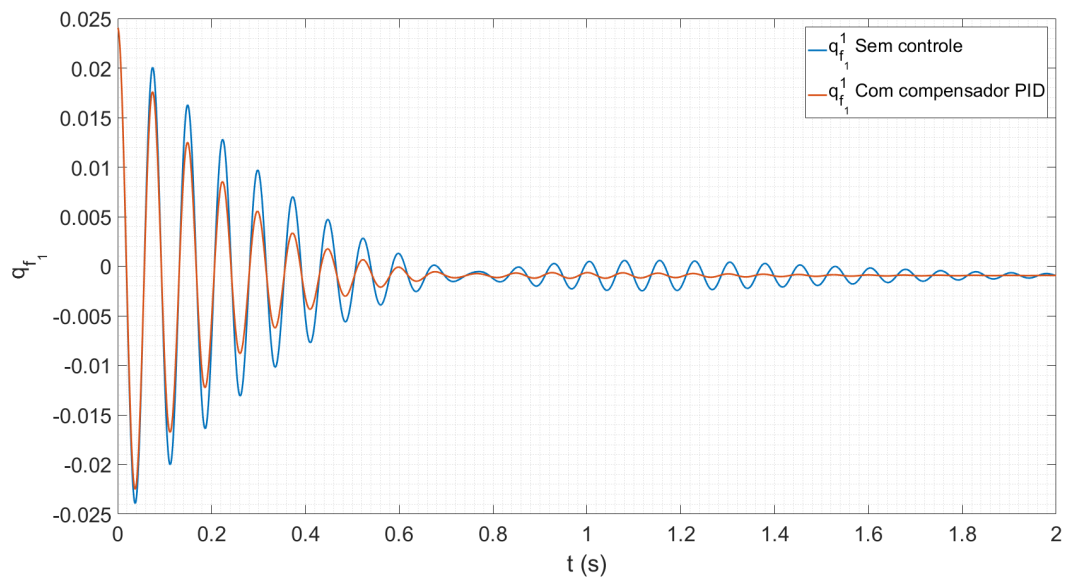
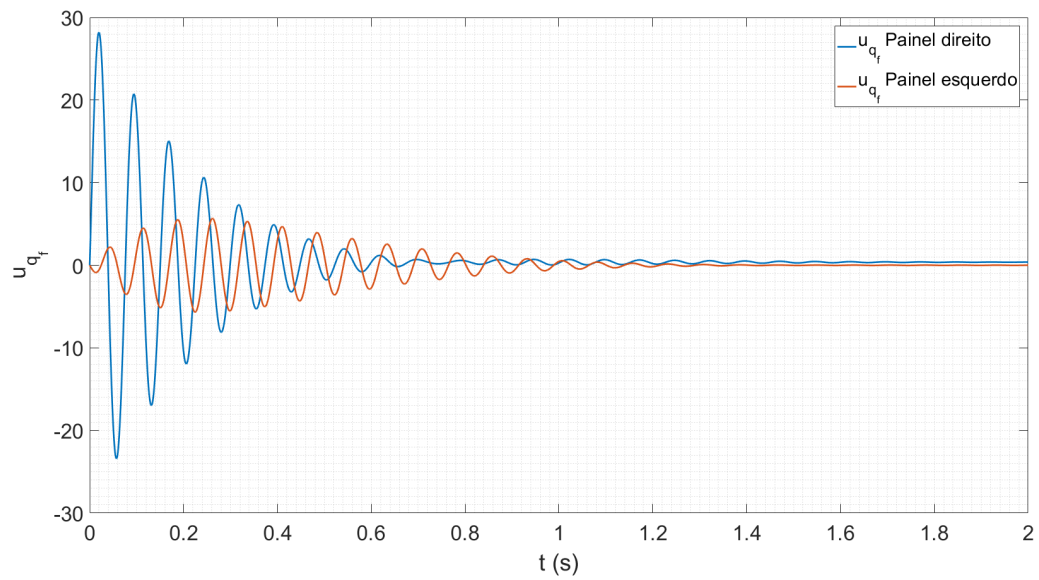


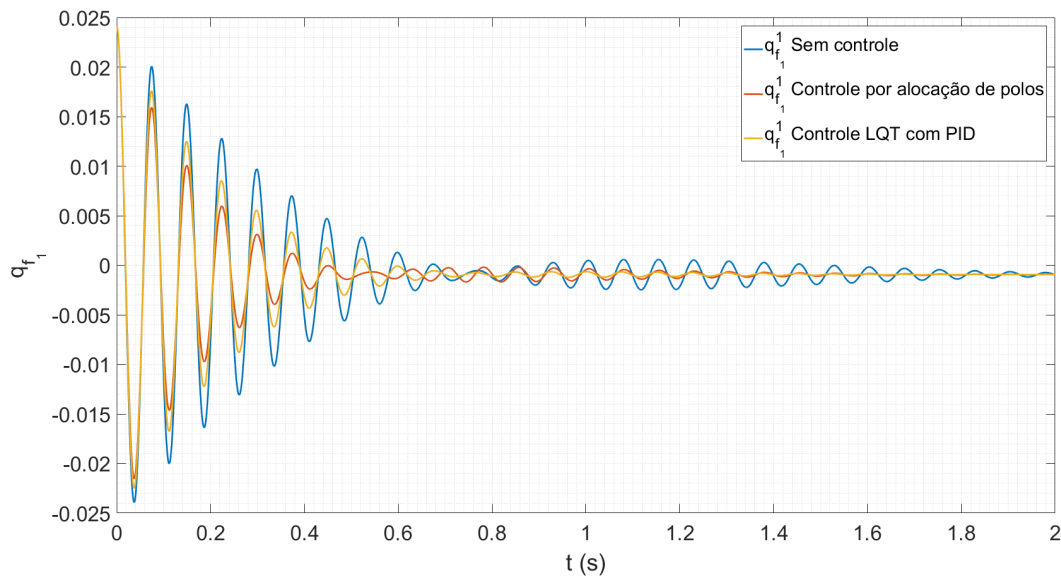
Figura 7.12 – Ações de controle geradas pelo compensador PID



### 7.3.3 Comparação dos resultados dos controles de supressão de vibração

A Figura 7.13 apresenta a resposta da coordenada  $q_{f1}^1$  comparando o caso em que nenhum controle foi empregado com as duas técnicas utilizadas. Alguns detalhes podem ser analisados, como a maior redução da amplitude da vibração utilizando alocação de polos, apesar da resposta com compensador PID passar a apresentar menor amplitude após 0.7 segundos. Entretanto, nenhuma análise comparativa superior pode ser realizada devido a forma diferente como os ganhos foram alocados, além de não ter sido utilizado nenhum objetivo quantitativo para avaliar o desempenho dos controladores. O que pode ser concluído é que ambas as técnicas podem ser empregadas para o controle de supressão de vibração, tendo elas reduzido a amplitude das oscilações em comparação as simulações de malha aberta. De forma indireta, as técnicas também foram capazes de influenciar a velocidade angular dos corpos atuando no modo flexível. Além disso, o controle por LQT tende a apresentar uma menor utilização do controle, entretanto isso está inerentemente associado a sua estrutura e formulação matemática.

Figura 7.13 – Ações de controle geradas pelo compensador PID

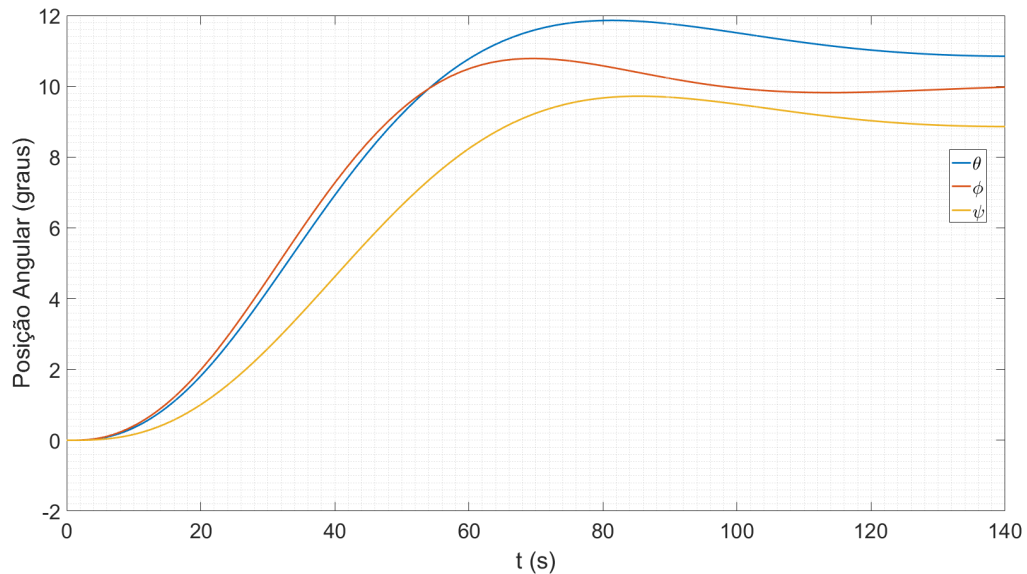


### 7.3.4 Sistema de Controle de Atitude

O sistema de controle de atitude foi empregado para alterar o apontamento do satélite no espaço em relação ao sistema LVLH e analisar a influência desse comportamento na dinâmica flexível dos painéis. A Figura 7.14 apresenta o caso onde o satélite parte do equilíbrio e rastreia uma referência de  $\phi = 10^\circ$ ,  $\phi = 11^\circ$  e  $\phi = 9^\circ$  - valores escolhidos de



Figura 7.14 – Rastreo de posição angular



forma arbitrária. Com os resultados é possível ver que as ações de controle são limitadas pelos batentes (Figura 7.15). A Figura 7.16 apresenta as velocidades angulares das rodas de reação durante a manobra realizada. Para esse caso, o filtro Anti Wind-Up foi utilizado, devido a saturação existente nos atuadores, sendo que no Apêndice C.3 são apresentadas as comparações de resposta com e sem o filtro Anti Wind-Up. Além disso, o Apêndice C.3 também apresenta a importância do Anti Wind-Up para o controle de atitude durante as perturbações, para que o satélite volte mais facilmente para a posição de equilíbrio.

Durante manobras realizadas pelo controle de atitude, pode-se gerar vibrações nos modos de corpo flexível, entretanto, durante as simulações, as alterações foram muito pequenas, sendo que o segundo modo de flexão encontra-se uma ordem de grandeza abaixo do primeiro. Isso ocorre devido a tanto os parâmetros estruturais adotados para os painéis, como também para uma baixa ação de controle devido aos batentes. O uso de condições mais próximas da realidade podem levar a uma melhor representação da influência do sistema de controle na deflexão e torção dos painéis. Porém, apesar de pequena, os painéis sofrem variação da deflexão durante o movimento do satélite e isso ocorre devido a alteração da componente da força gravitacional agindo de forma perpendicular ao painel, como é possível ver na Figura 7.17.

Figura 7.15 – Ações de controle durante o rastreo de posição angular

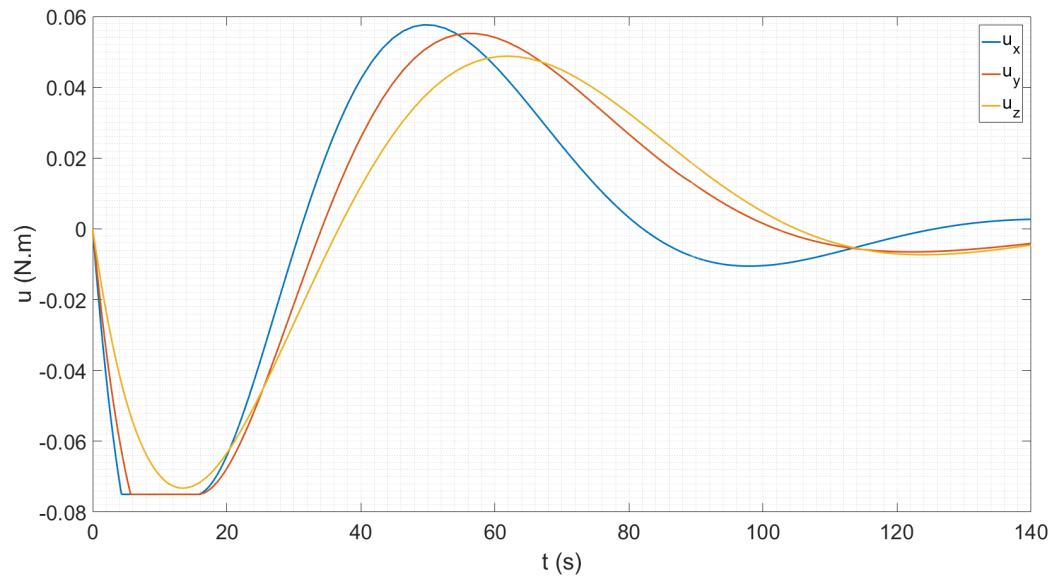


Figura 7.16 – Velocidade angular das rodas de reação durante o rastreo de posição angular

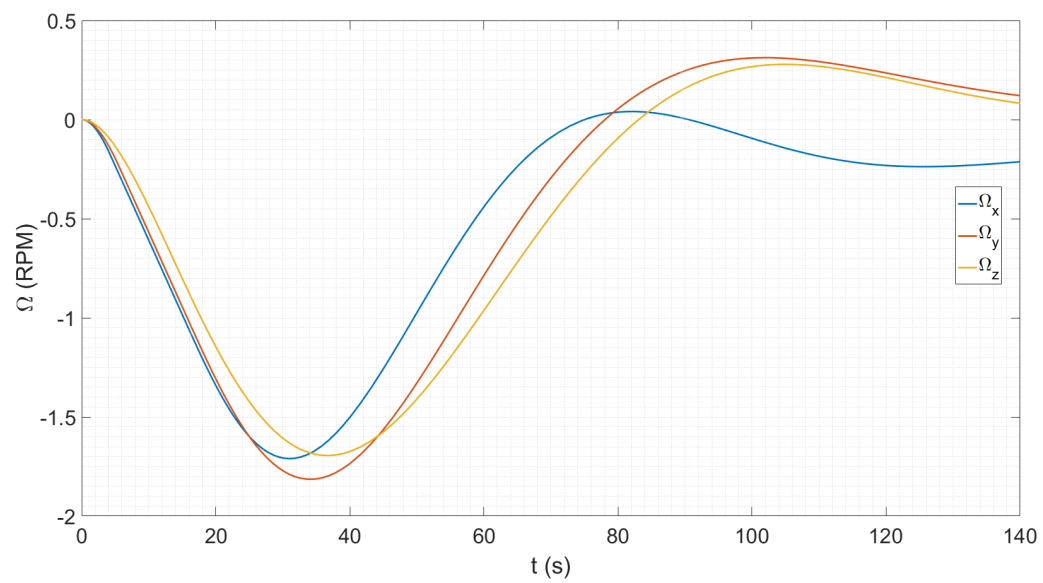
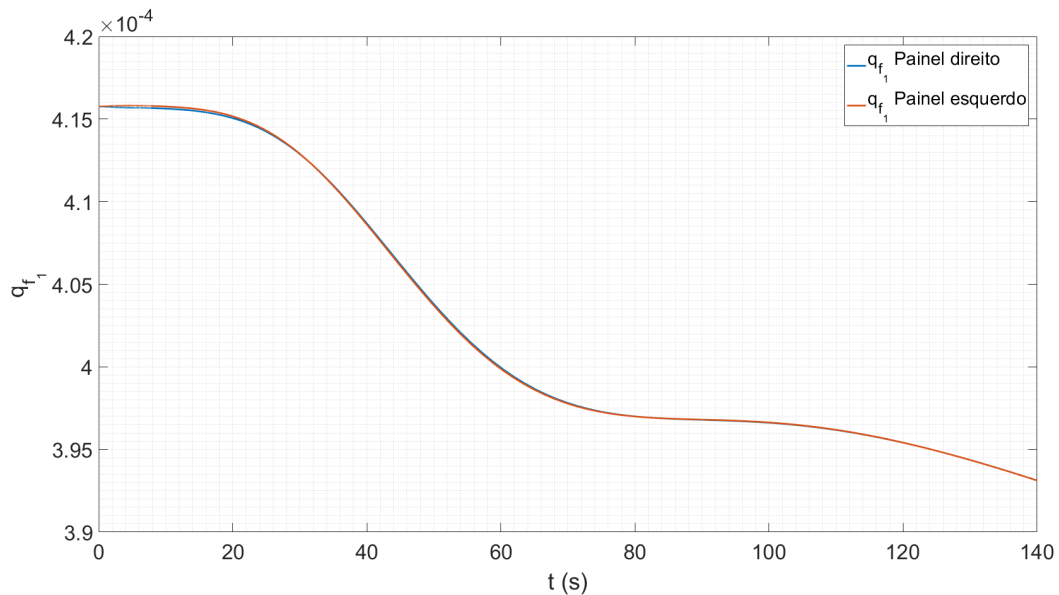


Figura 7.17 – Deflexão dos painéis devido o rastreo de posição angular



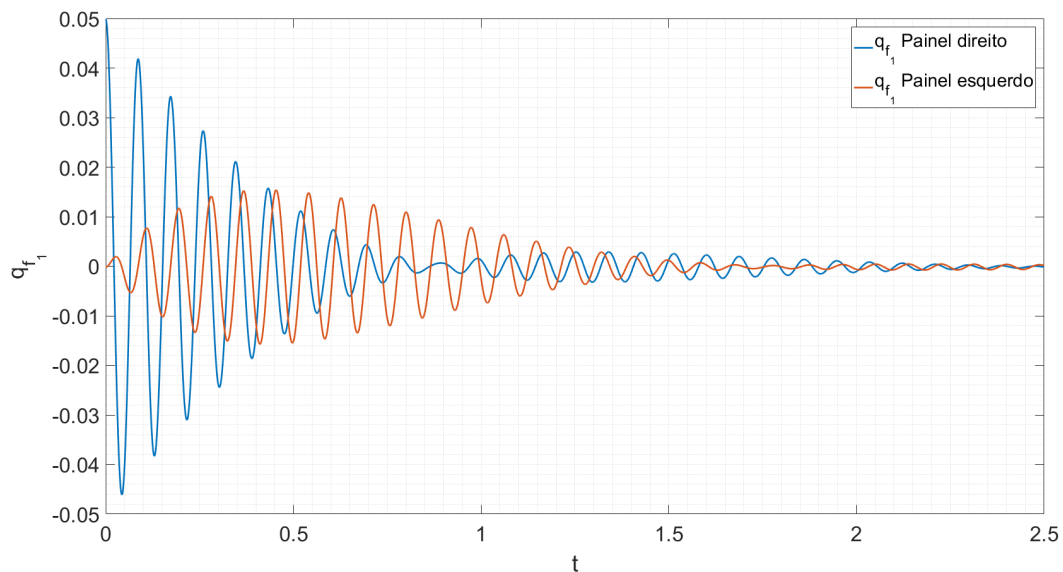
#### 7.4 RESULTADOS PARA MODELOS ESTRUTURAL POR PLACAS

De forma similar ao que foi feito para o caso de modelagem por vigas, uma condição de equilíbrio é determinada para esse caso. Como os painéis são os mesmos, e consequentemente as matrizes de inércia referentes ao corpos se mantém - independente da modelagem assumida -, as condições de equilíbrio se mantêm as mesmas do caso mostrado anteriormente. Comparando novamente a frequência de primeiro modo obtida analiticamente, o resultado da simulação apresenta um período de 0.08658 s, resultando em um erro de também 3%. A Figura 7.18 apresenta a primeira coordenada flexível do painel direito e do painel esquerdo, para uma perturbação de 0.05.

Como esperado, a resposta do painel pela modelagem de placas apresenta o mesmo comportamento que pela modelagem de vigas. Isso fica evidente na Figura 7.19, onde a resposta por viga e por placa da coordenada  $q_{f1}^1$  foi sobreposta:

Os outros modos flexíveis de vigas estão na Figura 7.20 e estão próximos de zero. O mesmo é válido para as coordenadas análogas do painel esquerdo. As demais condições empregadas no caso da modelagem para vigas resultam em respostas muito similares para vigas. Dessa forma, para as condições adotadas, os dois modelos podem ser empregados sem grandes perdas de informação. Entretanto, a modelagem adotada trata-se de sobrepor dois modos de viga a fim de aproximar o comportamento de placa e, portanto, esperava-se uma grande similaridade. Outras formas de lidar com o problema resultam em outras aproximações, tais como frequência natural e formas modais. Sukhoterin, Baryshnikov e Aksenov (2016) apresenta um estudo de formas modais por funções hiperbólicas, além de realizar um estudo comparativo das frequências naturais obtidas por

Figura 7.18 – Primeiro modos dos painéis (placa) com perturbação e sem sistema de controle



diversos autores e seus respectivos métodos.

Outros resultados de simulações com perturbações estão no Apêndice C.2.

#### 7.4.1 Perturbação de Translação

Além da excitação dos modos flexíveis devido ao controle de atitude, sistemas de posicionamento tais como o posicionamento dinâmico (conhecido em inglês como *Stationkeeping*) podem ser responsáveis por vibrações nas estruturas. Como apresentado por Wie (2008), algumas vezes as frequências de modo flexível não geram interferências nos sistemas de controle, enquanto que em algumas ocasiões podem interferir severamente. Isso também está associado ao modo de operação dos atuadores utilizados para realizar o posicionamento, os quais empregam sistemas *on-off* em conjunto com técnicas de modulação de largura e frequência de pulso (PWPF). Com o PWPF, diversos pulsos de curta duração e grande amplitude são utilizados, levando a perturbações dos corpos conectados aos corpo central.

Apesar dos atuadores com PWPF não terem sido modulados, foi utilizada uma força de 500 N atuando no eixo  $Z^3$ , para apresentar o comportamento associado a propulsores. A Figura 7.21 apresenta o resultado obtido considerando que a força permanece atuando sobre o corpo e, então, após 1 segundo ela cessa. A resposta tem magnitude da ordem de  $10^{-3}$  mesmo com uma força de grande magnitude atuando, contudo, é possível avaliar

Figura 7.19 – Comparação da resposta  $q_{f_1}^1$  pela modelagem de viga e placa

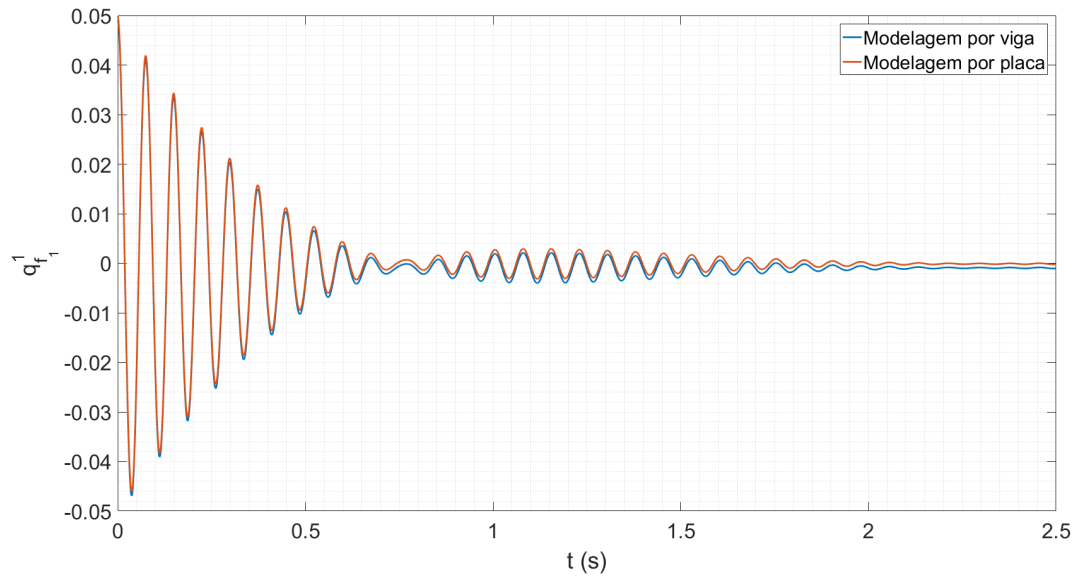


Figura 7.20 – Coordenadas flexíveis do painel direito pela modelagem de placas

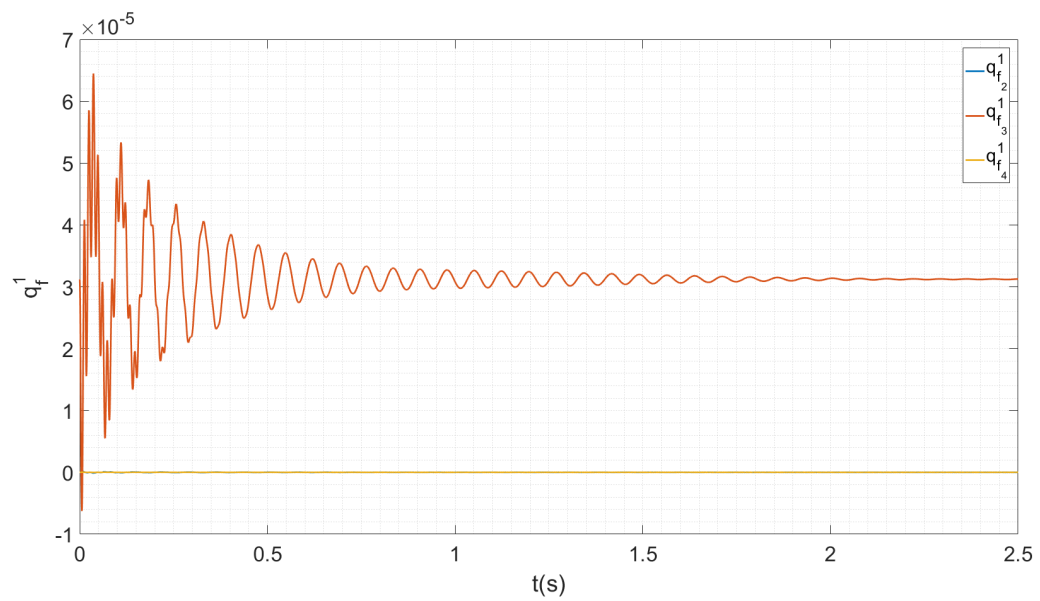
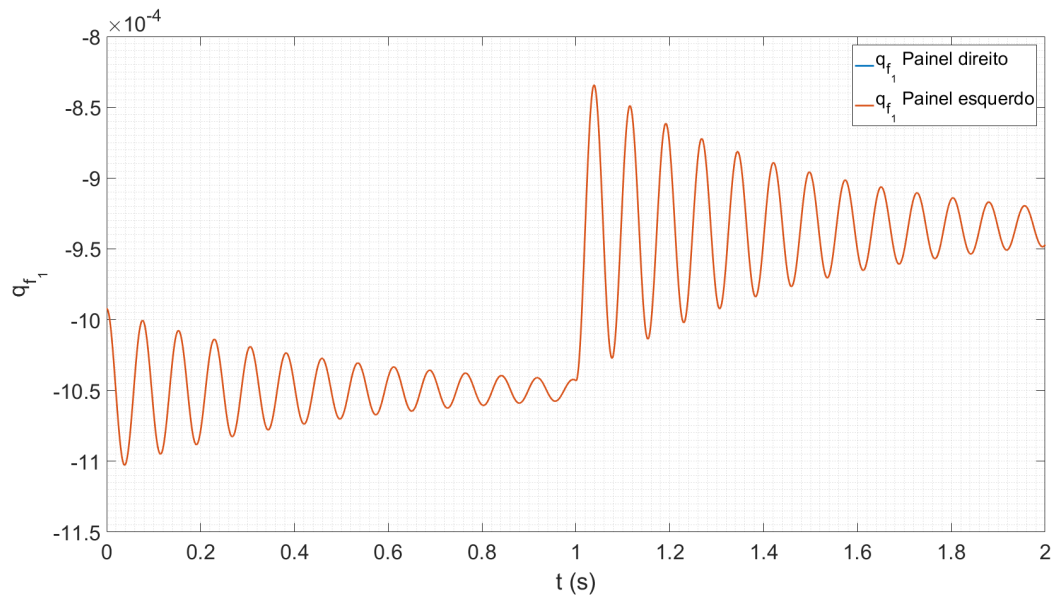


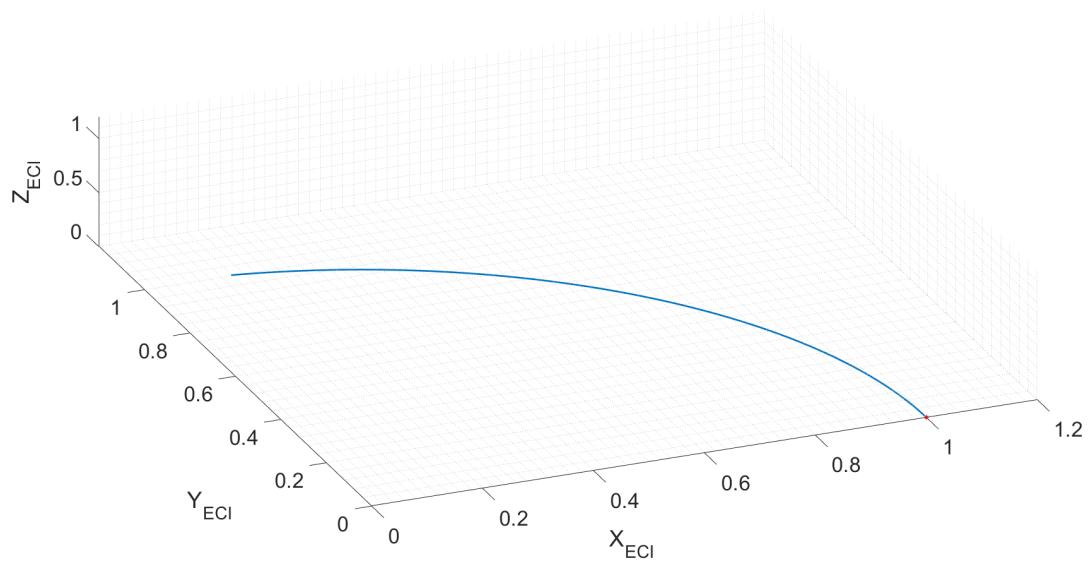
Figura 7.21 – Força perturbativa no eixo  $Z^3$



o formato da resposta que surge.

De forma geral, a trajetória de translação do satélite pode ser visto na Figura 7.22, onde a órbita foi propagada por 22 minutos. Como condição inicial o satélite foi posicionado sobre o eixo  $X_{ECI}$  a uma altitude de  $600 \text{ km}$  e com velocidade de  $7558.47 \text{ m/s}$  de forma manter uma órbita circular. A Figura 7.22 apresenta as distâncias normalizadas, da forma  $X_{ECI} = x_{ECI}/\mathcal{R}$ ,  $Y_{ECI} = y_{ECI}/\mathcal{R}$ ,  $Z_{ECI} = z_{ECI}/\mathcal{R}$ , sendo  $\mathcal{R}$  o raio da orbita.

Figura 7.22 – Trajetória no sistema ECI



## 8 CONCLUSÃO

O estudo da dinâmica de corpos flexíveis se mostra extremamente importante em certas situações e, com isso, técnicas para analisar esse comportamento são essenciais. A abordagem utilizada apresentou a teoria de multicorpos como base para estudar não somente o comportamento de estruturas flexíveis, como também de diversos corpos conectados entre si que podem apresentar as mais variadas conexões e juntas. Enquanto as matrizes de massa são obtidas utilizando a energia cinética do corpo, as forças externas podem ser encontradas aplicando o princípio do trabalho virtual. Além disso, os multiplicadores de Lagrange são utilizados para gerar as restrições existentes no sistema.

A modelagem das estruturas pode seguir diversos formatos, sendo que a abordagem por formas modais foi escolhida. Como visto, tanto a teoria de vigas como de placas pode ser empregada de forma a obter resultados aproximados para geometrias simples. Nesse processo, algumas características importantes do modelo precisam ser ignoradas, tais como as formas mais complexas de engastes que podem surgir. Dessa forma, apesar das formas modais serem suficientes para descrever situações mais simples, é necessário investir em um método mais requintado de forma a obter resultados realistas e precisos desses modelos complexos. Para isso, comumente emprega-se o método de elementos finitos e que também pode ser utilizado em conjunto com a teoria de multicorpos.

Além da modelagem, em situações que os modos flexíveis de uma estrutura podem comprometer ou degradar a eficiência de uma missão, é necessário aplicar métodos de controle. Para tanto, foi tratado o caso de forças atuando no corpo flexível onde duas técnicas de controle foram utilizadas, sendo elas alocação de polos e um regulador linear quadrático com compensadores PID. A técnica de alocação de polos apresenta maior facilidade de implementação, servindo como um sistema regulador e de realimentação interna. Esse método pode ser entendido como um sistema de aumento de estabilidade, aumentando a rigidez dos painéis de forma artificial. Já os compensadores PID apresentam uma estrutura relativamente mais complexa, mas geralmente apresentam uma utilização menor de controle. Entretanto, é essencial notar que a resposta do controle depende em grande parte dos ganhos escolhidos pelo projetista e, portanto, uma conclusão acerca de qual dos métodos é superior não pode ser tomada. Para isso, seria necessário utilizar uma metodologia mais rigorosa tanto de comparação como de projeto.

Em relação aos atuadores, foram assumidos batentes para a ação de controle das rodas de reação. Embora isso aproxime a simulação do caso real, é necessário uma maior investigação acerca das reais características desses atuadores e seus limites.

Em suma, um método para tratar um satélite em ambiente espacial com dois painéis solares engastados foi apresentado, além de duas técnicas de controle para realizar a supressão das vibrações. Com isso, é possível partir para estudos mais avançados sobre



o tema em trabalhos futuros, empregando o método de elementos finitos, além de utilizar situações mais próximas da realidade para os sistemas de controle.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BAUCHAU, O. **Flexible Multibody Dynamics**. [S.l.]: Springer Science+ Business Media BV, 2011.
- BLEVINS, R. Formulas for natural frequency and mode shape. **Kreiger Publ. Comp., New York**, 1979.
- BLOISE, N. et al. Obstacle avoidance with potential field applied to a rendezvous maneuver. **Applied Sciences**, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 7, n. 10, p. 1042, 2017.
- HU, Q.; MA, G. Vibration suppression of flexible spacecraft during attitude maneuvers. **Journal of guidance, control, and dynamics**, v. 28, n. 2, p. 377–380, 2005.
- HU, Q.; ZHANG, J. Attitude control and vibration suppression for flexible spacecraft using control moment gyroscopes. **Journal of Aerospace Engineering**, v. 29, p. 04015027, 06 2015.
- LEISSA, A. W.; QATU, M. S. **Vibrations of Continuous Systems**. [S.l.]: McGraw-Hill, 2011.
- MANTOVANI, L. et al. Modelagem e simulação de um sistema de controle para satélites com atuação de rodas de reação e bobinas magnéticas. In: CONGRESSO AEROESPACIAL BRASILEIRO, 1., 2018, Foz do Iguaçu. [S.l.], 2018.
- MARTÍNEZ, J. T. **Implementation of a femto-satellite and a mini-launcher for the N Prize**. 2010. Dissertação (Mestrado) — Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.
- MAZZINI, L. **Flexible Spacecraft Dynamics, Control and Guidance**. [S.l.]: Springer, 2015.
- MEGSON, T. H. G. **Aircraft structures for engineering students**. [S.l.]: Butterworth-Heinemann, 2016.
- OGATA, K. **Modern Control Engineering**. Prentice Hall, 2010. (Instrumentation and controls series). ISBN 9780136156734. Disponível em: <<https://books.google.com.br/books?id=Wu5GpNAelzkc>>.
- RAO, S. S. **Mechanical vibrations**. [S.l.]: Prentice hall Upper Saddle River, 2011. v. 4.
- SHABANA, A. A. **Dynamics of multibody systems**. [S.l.]: Cambridge university press, 2013.
- SOUZA, A.; SOUZA, L. C G de. H infinity controller design to a rigid-flexible satellite with two vibration modes. **Journal of Physics: Conference Series**, v. 641, p. 012030, 10 2015.
- STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. **Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015.
- SUKHOTERIN, M. V.; BARYSHNIKOV, S. O.; AKSENOV, D. A. Free vibration analysis of rectangular cantilever plates using the hyperbolic-trigonometric series. **American Journal of Applied Sciences**, v. 13, p. 1442–1451, 12 2016.

TAYYEBTAHER, M.; ESMAEILZADEH, S. M. Model predictive control of attitude maneuver of a geostationary flexible satellite based on genetic algorithm. **Advances in Space Research**, v. 60, 03 2017.

TEWARI, A. **Atmospheric and space flight dynamics**. [S.l.]: Springer, 2007.

WANG, Z. et al. Vibration suppression-based attitude control for flexible spacecraft. **Aerospace Science and Technology**, v. 70, 08 2017.

WERTZ, J. R.; EVERETT, D. F.; PUSCHELL, J. J. **Space mission engineering: the new SMAD**. [S.l.]: Microcosm Press Hawthorne, CA, 2011. v. 1.

WIE, B. **Space vehicle dynamics and control**. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 2008.

## APÊNDICE A – FORMAS MODAIS

### A.1 – FORMAS MODAIS PARA VIGAS

Foram utilizadas duas formas modais de flexão e duas formas modais de torção para representar a viga engastada. A Figura A.1 apresenta as duas primeiras formas modais de flexão, enquanto que a Figura A.2 apresenta as duas primeiras formas modais de torção utilizadas. As formas modais estão em função do coeficiente adimensional  $\xi$ , sendo  $\xi = y/L$  e  $L$  o comprimento da viga.

Figura A.1 – Formas modais de Flexão

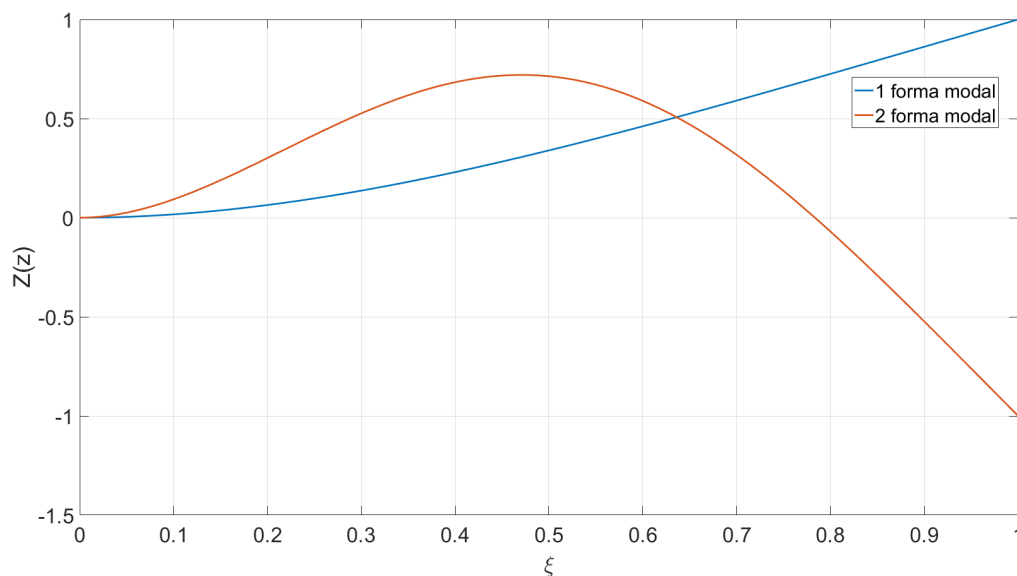
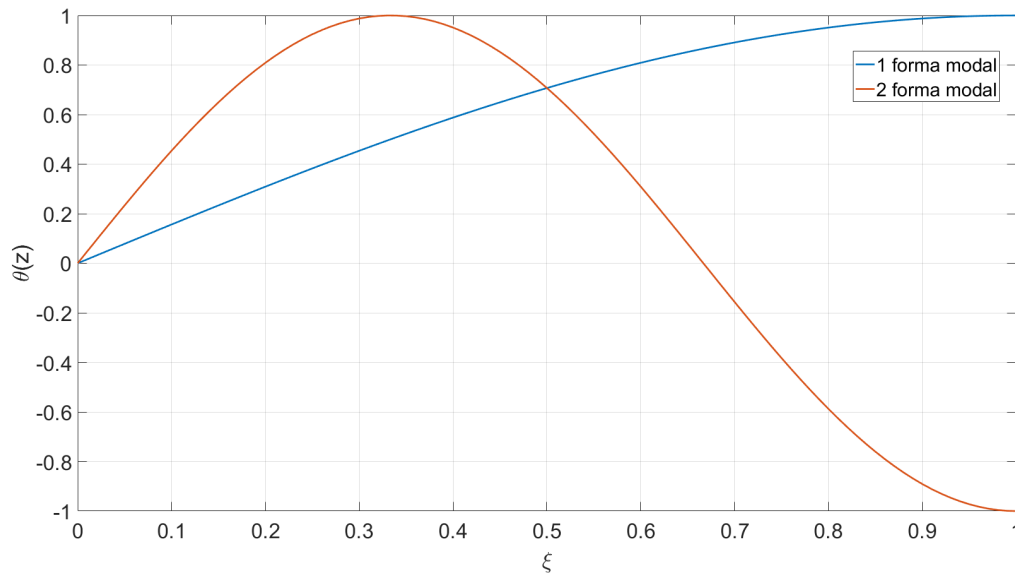


Figura A.2 – Formas modais de Torção



## A.2 – FORMAS MODAIS PARA PLACAS

Para as placas, foram consideradas 4 formas modais, sendo a primeira obtida pelo primeiro modo de viga engastada e primeiro modo de viga livre, conforme mostra a Figura A.3. As funções estão em relação a dois coeficientes adimensionais  $\xi$  e  $\Lambda$ , tal que  $\xi = y/L$  e  $\Lambda = x/b$  onde  $L$  é o comprimento da placa e  $b$  a largura.

Para o segundo modo, foi considerado o primeiro modo de viga engastada e o segundo modo de viga livre, apresentado na Figura A.4.

Para o terceiro modo, foi considerado o segundo modo de viga engastada e o primeiro de viga livre (Figura A.5).

A última forma modal é dada pela 2ª forma modal de viga engastada e a segunda forma modal de viga livre, conforme mostra a Figura A.6.

Figura A.3 – Primeira forma modal de placa

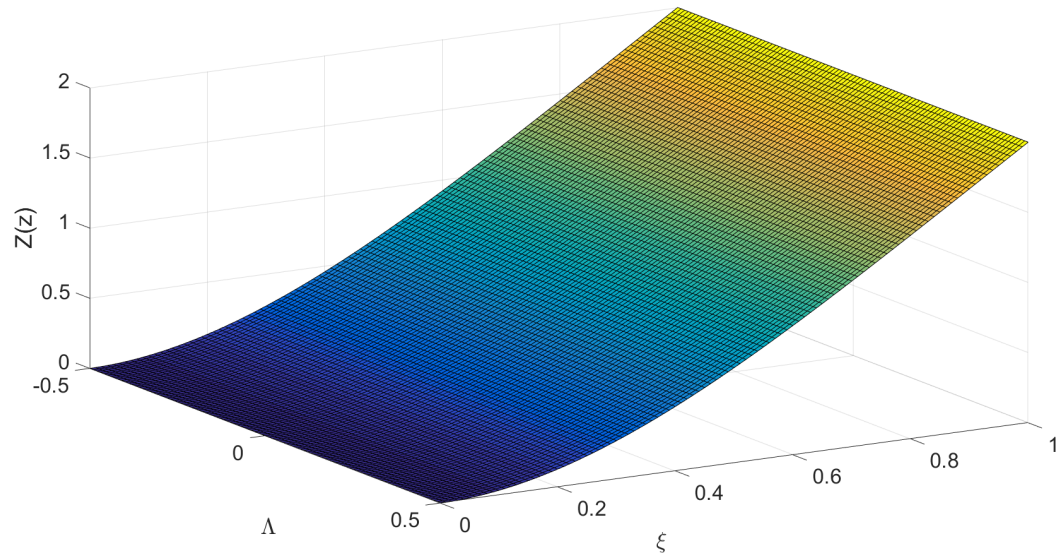


Figura A.4 – Segunda forma modal de placa

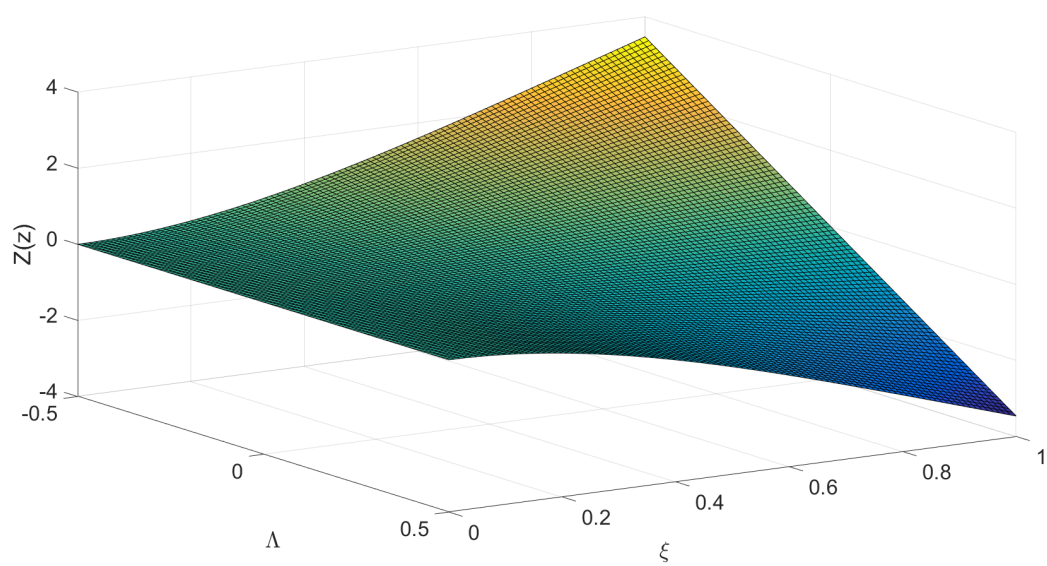


Figura A.5 – Terceira forma modal de placa

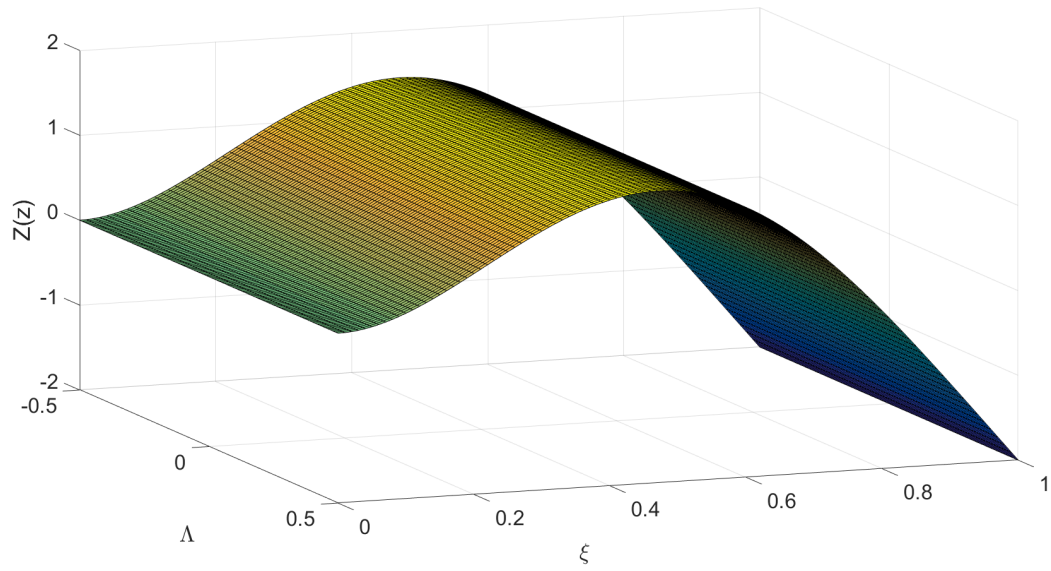
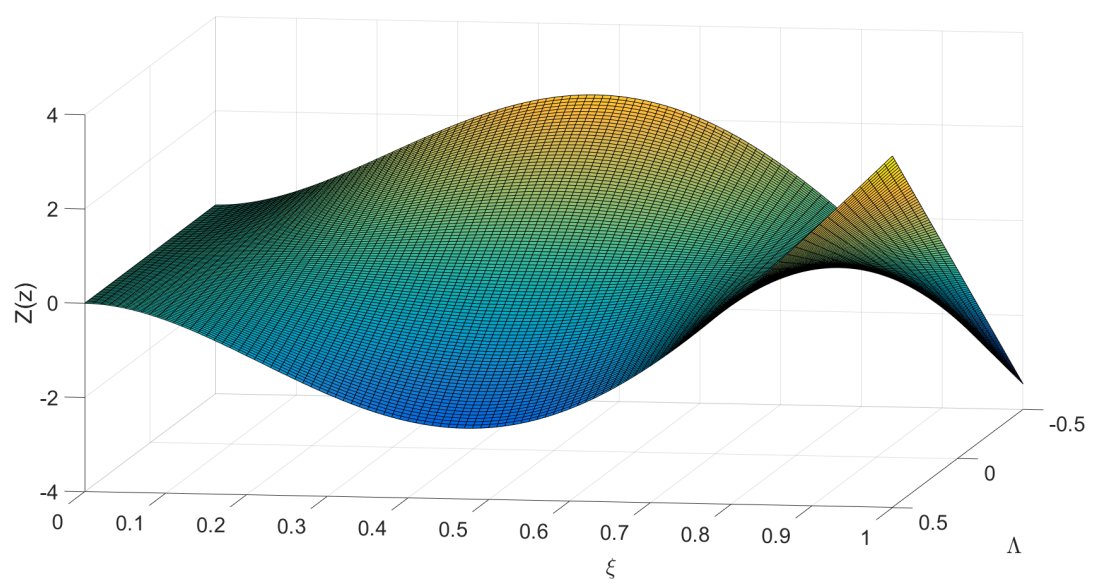


Figura A.6 – Quarta forma modal de placa



## APÊNDICE B – MATRIZES DE CONTROLE

### B.1 – MATRIZES DE CONTROLE DE ATITUDE

O controle de atitude utiliza um Rastreador Linear Quadrático com integradores puros e realimentação interna de todos os estados. Dessa forma, as matrizes da dinâmica dos compensadores, definidas pela equação 6.5, são:

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.3})$$

$$\mathbf{F}_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.4})$$

As ponderações utilizadas para as matrizes  $\mathbf{U}_k$  e  $\mathbf{U}_x$  são, respectivamente, 2.5 e 0.01. A matriz  $\mathbf{R}$  torna-se:

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0.01 & 0 \\ 0 & 0 & 0.01 \end{bmatrix} \quad (\text{B.5})$$

A matriz  $\mathbf{Q}$  é uma matriz de zeros de 9 linhas e 9 colunas, onde os termos não nulos são:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_x(4, 4) &= 1; \mathbf{U}_x(5, 5) = 2.5 \\ \mathbf{U}_x(8, 8) &= 1; \mathbf{U}_x(6, 6) = 2.5 \\ \mathbf{U}_x(9, 9) &= 1; \mathbf{U}_x(7, 7) = 2.5 \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$



Dessa maneira, as matrizes de ganho obtidas são:

$$\mathbf{U}_g = \begin{bmatrix} -15.8102356 & -0.0070501 & -0.1205382 \\ 0.0111570 & -9.9999974 & -0.0004754 \\ 0.1905870 & 0.0005604 & -9.9992734 \end{bmatrix} \quad (\text{B.7})$$

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} -2582.25091 & -5.92337 & 1.68048 & -404.31518 & -0.51279 & 1.62218 \\ -4.69685 & -2443.99780 & 1.44634 & -0.17495 & -313.14509 & 0.07776 \\ -0.33156 & 1.45880 & -3293.96845 & -1.61806 & 0.10604 & -363.30547 \end{bmatrix} \quad (\text{B.8})$$

Para o filtro Anti Wind-Up do sistema de controle de atitude, o polo foi colocado em  $-2i$ , sendo  $i$  a unidade imaginária.

## B.2 – MATRIZES DE CONTROLE DE MODO FLEXÍVEL

### B.2.1 – Matriz de Alocação de Polos

Para o projeto dos modos flexíveis, foi considerada a dinâmica linearizada do primeiro modo de cada painel. Dessa forma, os polos foram alocados, resultando na seguinte matriz de ganhos:

$$\mathbf{U}_y = \begin{bmatrix} -24.8036319 & -0.3481140 \\ -0.3481140 & -24.8036319 \end{bmatrix} \quad (\text{B.9})$$

### B.2.2 – Matriz de LQT com compensador PID

Para o compensador PID, as matrizes 6.5 mudam em relação as de controle de atitude, pelo compensador sem um PID e não um integrador puro. Assim, as matrizes tornam-se:

$$\mathbf{F}_w = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -150 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -150 \end{bmatrix} \quad (\text{B.10})$$

$$\mathbf{F}_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$\mathbf{F}_d = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -22500 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -22500 \end{bmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$\mathbf{f}_j = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 150 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 150 \end{bmatrix} \quad (\text{B.13})$$

As ponderações utilizadas para as matrizes  $\mathbf{U}_x$  e  $\mathbf{U}_k$  são, respectivamente, 2.5 e 0.01. A matriz  $\mathbf{U}_k$  torna-se

$$\mathbf{U}_k = \begin{bmatrix} 0.2 & 0 \\ 0 & 0.2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

enquanto que a matriz  $\mathbf{U}_x$  possui 6 linhas e 6 colunas, onde os elementos não nulos são:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_x(1, 1) &= 1 \\ \mathbf{U}_x(2, 2) &= 2.5 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Como o controle para modo flexível não utiliza realimentação interna, a única matriz de ganhos se torna a matriz de saída do compensador. Assim:

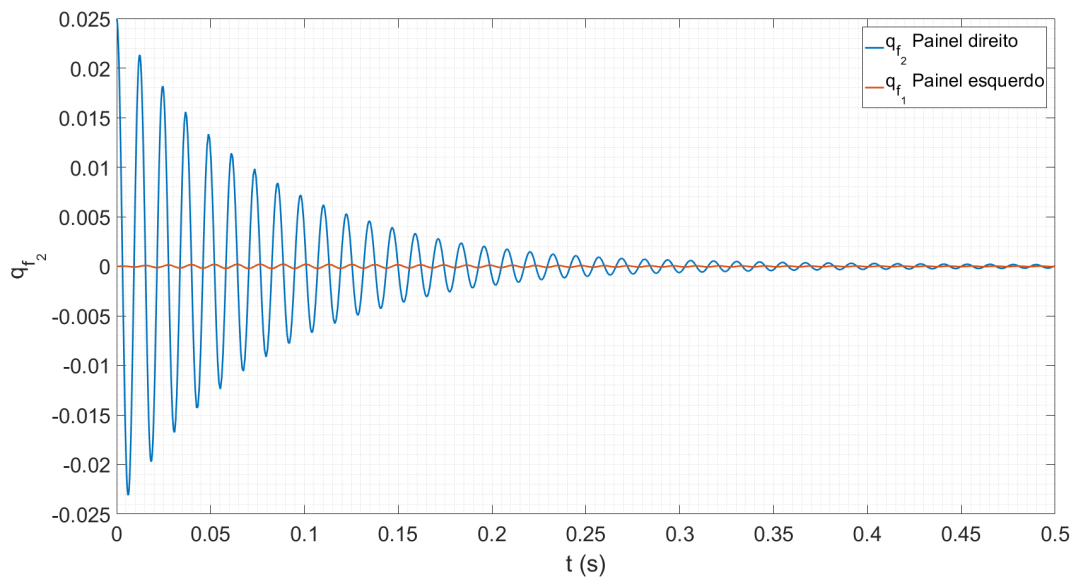
$$\mathbf{U}_g = \begin{bmatrix} 14.9999 & 14.9999 & -0.0293 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 15 & 14.9999 & -0.0293 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

## APÊNDICE C – OUTROS RESULTADOS DA SIMULAÇÃO

### C.1 – PERTURBAÇÃO DAS COORDENADAS DE MODO FLEXÍVEL PELO MODELO DE VIGA

Para o caso de perturbação do segundo modo de flexão, também para uma perturbação de amplitude 0.025 - mas na coordenada  $q_{f_2}$ , o resultado é apresentado na Figura C.1. Comparando com os resultados de perturbação do primeiro modo, a frequência é superior, assim como a velocidade para que a vibração seja amortecida. Além disso, é interessante avaliar a baixa influência no painel não perturbado.

Figura C.1 – Coordenadas  $q_{f_2}$  modo flexível



Para o caso de perturbar o primeiro modo de torção com amplitude de 0.025, o resultado é apresentado na Figura C.2, enquanto que do segundo modo de torção na Figura C.3. Para o caso da perturbação do primeiro modo de flexão, é interessante avaliar a excitação que surge no segundo modo, com amplitude considerável em relação ao primeiro. Além disso, para esses casos, a componente  $q$  da velocidade angular do satélite é que acaba sendo perturbada, o que é esperado por ser induzida uma torção nesse eixo (Figura C.4).

Figura C.2 – Coordenadas  $q_{f3}$  modo flexível

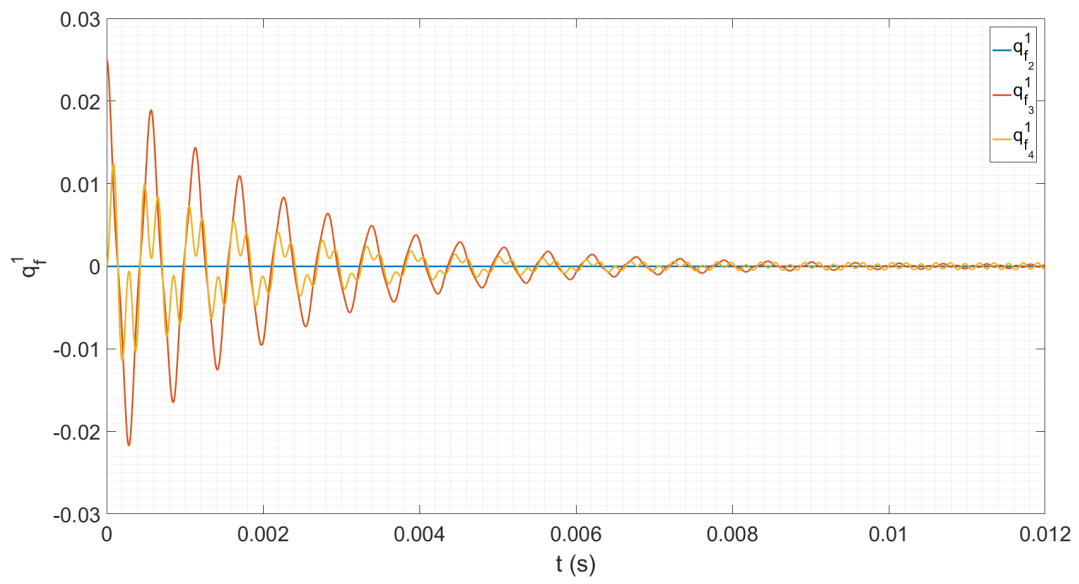


Figura C.4 – Velocidade angular com perturbação em  $q_{f3}$

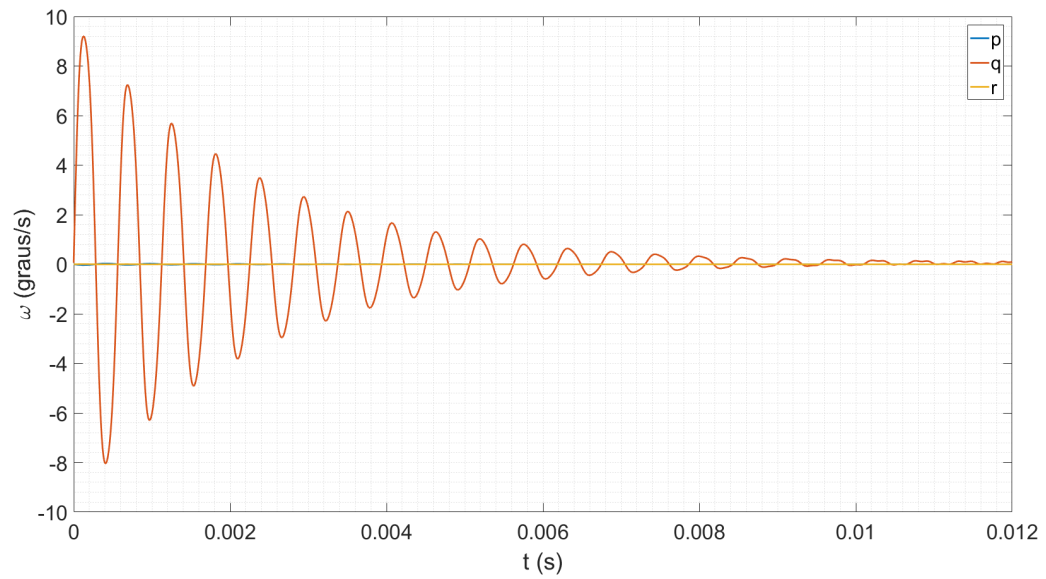
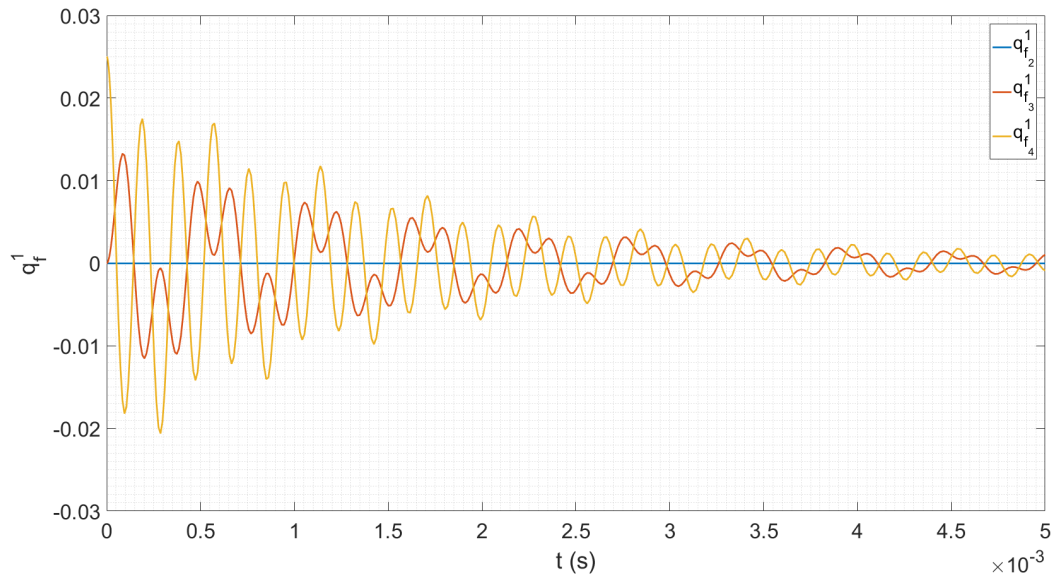


Figura C.3 – Coordenadas  $q_{f4}$  modo flexível



## C.2 – PERTURBAÇÃO DAS COORDENADAS DE MODO FLEXÍVEL PELO MODELO DE PLACAS

Para o modelo de placas, as variáveis  $q_{f2}$  e  $q_{f4}$  foram perturbadas, sendo que as Figuras C.5 e C.6 apresentam os resultados, respectivamente.

Figura C.5 – Coordenadas  $q_{f2}$  modo flexível para placas

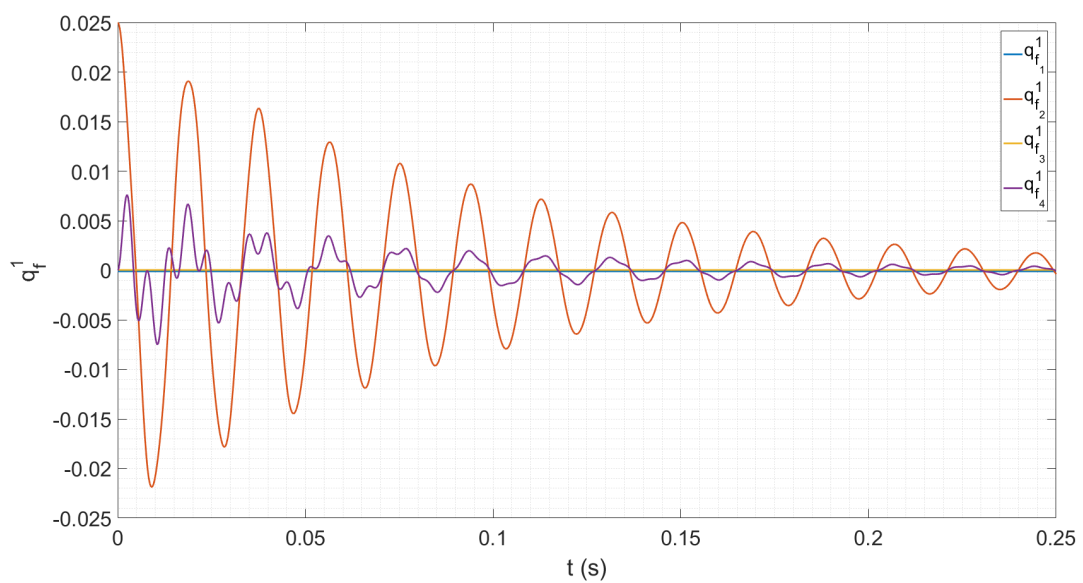
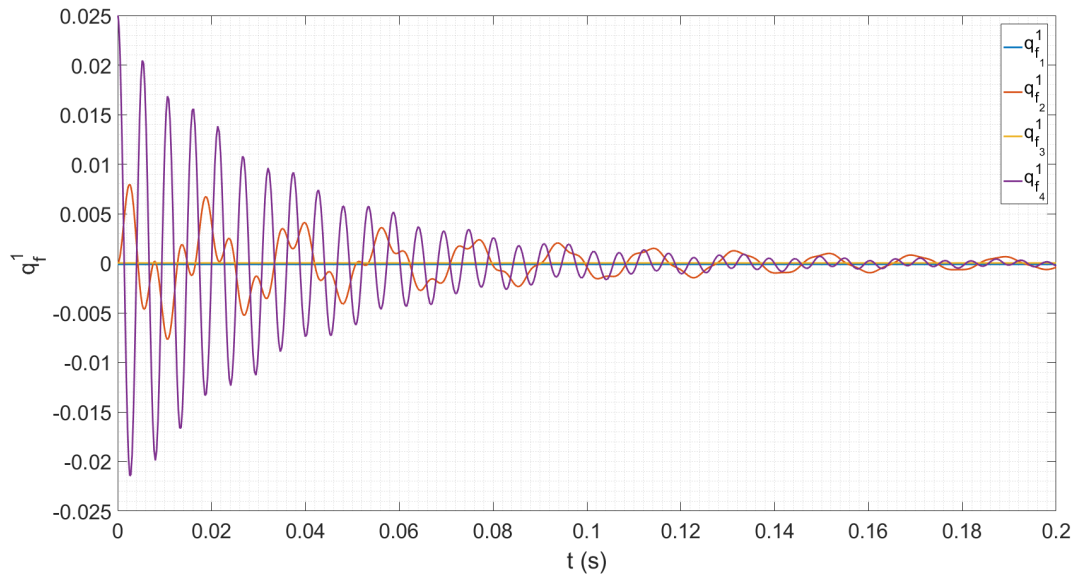


Figura C.6 – Coordenadas  $q_{f4}$  modo flexível para placas



### C.3 – COMPARAÇÃO ENTRE A UTILIZAÇÃO OU NÃO DO FILTRO ANTI WIND-UP

Durante as simulações, o filtro Anti Wind-Up foi empregado no controle da atitude já que esses atuadores estavam limitados pelos batentes. O uso do filtro foi capaz de melhorar a resposta obtida, como é possível ver na Figura C.7, onde é mostrada a comparação do ângulo  $\phi$  rastreando  $10^\circ$  e partindo de  $0^\circ$ . A Figura C.8 apresenta a ação de controle no eixo  $X^3$  que induziu a rotação em  $\phi$ .

Além do caso da saturação durante a manobra de apontamento, no caso de perturbações o Anti Wind-Up se mostra importante. Para o caso de uma perturbação de 0.025 na coordenada  $q_{fq}^1$ , tanto a velocidade angular como a posição angular do corpo sofrem oscilações e com isso o sistema de controle de atitude gera torques de controle. Como estas oscilações são de alta frequência e grande amplitude, os atuadores atingem os limites dos batentes e, sem o filtro Anti Wind-Up acabam demorando mais tempo para retornar ao equilíbrio, como é possível ver na comparação feita na Figura C.9.

Figura C.7 – Comparação da resposta de  $\phi$  com e sem o Anti Wind-Up

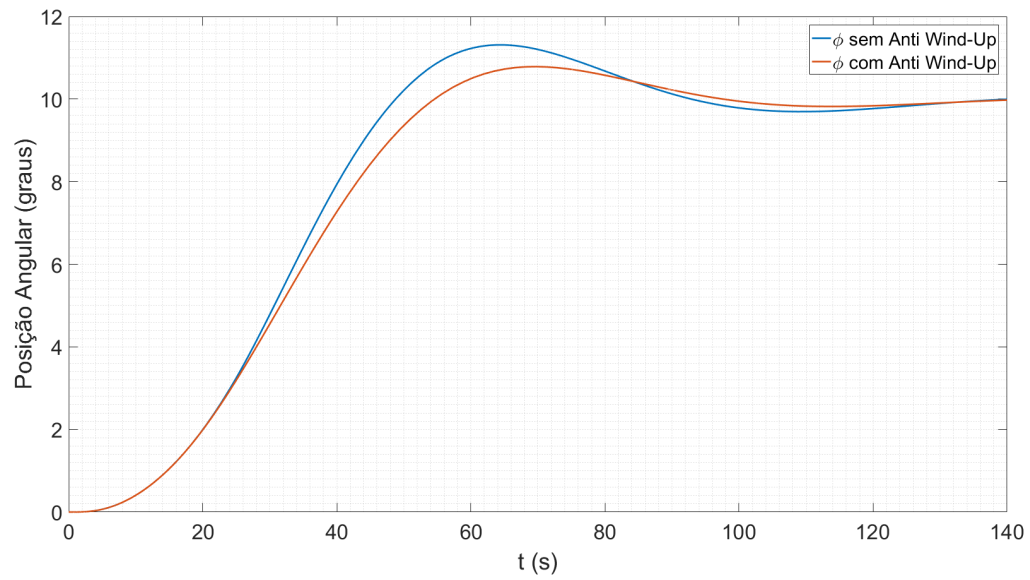


Figura C.8 – Comparação da ação de controle  $u_x$  com e sem o Anti Wind-Up

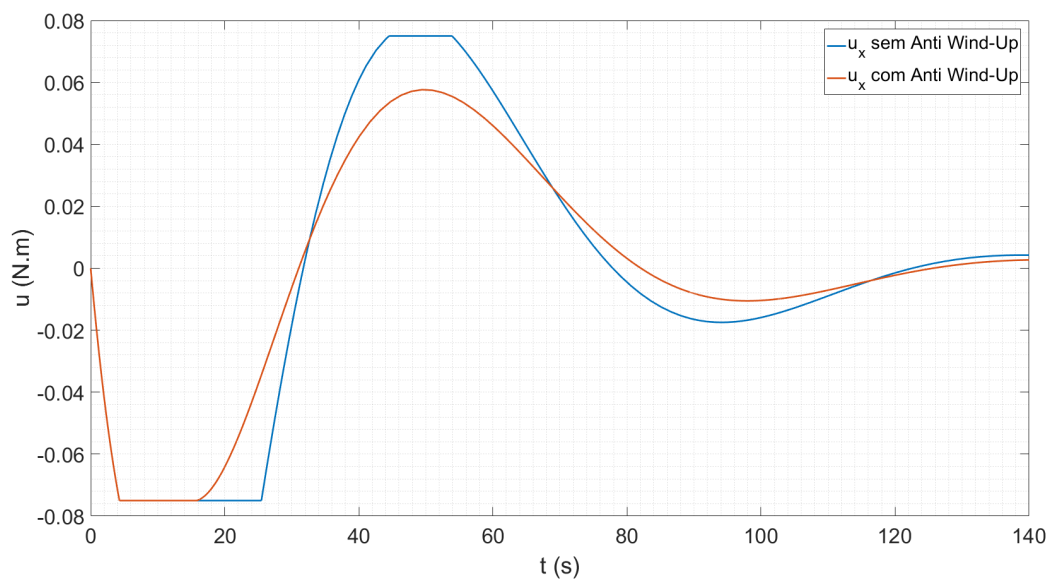


Figura C.9 – Comparação da ação de controle  $u_x$  com e sem o Anti Wind-Up com perturbação em  $q_{f_q}^1$

