

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA  
CENTRO DE TECNOLOGIA  
CURSO DE GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA AEROESPACIAL

Wilcker Neuwald Schinestzki

**MODELAGEM DE AERONAVES FLEXÍVEIS UTILIZANDO  
DINÂMICA DE MULTICORPOS E AERODINÂMICA NÃO  
ESTACIONÁRIA**

Santa Maria, RS  
2019

**Wilcker Neuwald Schinestzki**

**MODELAGEM DE AERONAVES FLEXÍVEIS UTILIZANDO DINÂMICA DE  
MULTICORPOS E AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Engenheiro Aeroespacial**.

ORIENTADOR: Prof. Dr. Pedro Paglione

Santa Maria, RS  
2019

**Wilcker Neuwald Schinestzki**

**MODELAGEM DE AERONAVES FLEXÍVEIS UTILIZANDO DINÂMICA DE  
MULTICORPOS E AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA**

Trabalho de Conclusão de Curso apresentado ao Curso de Graduação em Engenharia Aeroespacial da Universidade Federal de Santa Maria (UFSM, RS), como requisito parcial para obtenção do título de **Engenheiro Aeroespacial**.

**Aprovado em 10 de julho de 2019:**

---

**Pedro Paglione, Dr. (UFSM)**  
(Presidente/Orientador)

---

**Carlos Eduardo de Souza, Dr. (UFSM)**

---

**André Luís da Silva, Dr. (UFSM)**

Santa Maria, RS  
2019

## **DEDICATÓRIA**

*Aos meus pais, por sempre me apoiarem a alçar voos cada vez mais altos.*

*À minha namorada, companheira de vida para todos os momentos.*

*A todos que estiveram torcendo por mim durante o desenvolvimento deste trabalho.*

## **AGRADECIMENTOS**

*Agradeço aos meus pais, por terem me dado todas as condições necessárias para que eu pudesse focar, exclusivamente, nos estudos.*

*Agradeço à minha namorada, por ter estado ao meu lado, sempre me apoiando e me motivando a continuar em frente, não importando o quão grande fossem os obstáculos.*

*Agradeço ao meu orientador, Pedro Paglione, por todo seu empenho, dedicação, e pelos valiosos ensinamentos durante seu período como professor visitante na UFSM.*

*Agradeço ao professor Carlos Eduardo de Souza, por todo o acompanhamento, dicas e críticas construtivas realizados ao longo deste ano.*

*Agradeço a todos os demais professores que contribuíram, mesmo que indiretamente, para o desenvolvimento deste trabalho.*

## RESUMO

# MODELAGEM DE AERONAVES FLEXÍVEIS UTILIZANDO DINÂMICA DE MULTICORPOS E AERODINÂMICA NÃO ESTACIONÁRIA

AUTOR: Wilcker Neuwald Schinestzki

ORIENTADOR: Pedro Paglione

Neste trabalho, apresenta-se a modelagem da dinâmica de voo de uma aeronave flexível, considerando os efeitos de acoplamento inercial, por meio da teoria de multicorpos. A aeronave é desmembrada em seis corpos vinculados entre si, sendo a fuselagem considerada como corpo rígido, e, as superfícies sustentadoras, como flexíveis. Em seguida, desenvolve-se um modelo estrutural de viga contínua, reduzido a quatro graus de liberdade. Para tal, utiliza-se o método de Rayleigh-Ritz, empregando, como funções de forma, as formas modais analíticas de flexão e torção para uma viga engastada. Na sequência, utiliza-se a Teoria das Faixas Modificada para obter um modelo de aerodinâmica não estacionária. Nesse método, as superfícies são discretizadas em faixas, e cada faixa é associada a uma seção típica de dois ou três graus de liberdade, dependendo das superfícies de controle. Algumas correções adicionais são utilizadas, de modo a incluir os efeitos dos movimentos de corpo rígido e flexível da aeronave. Ainda, a fim de generalizar o modelo aerodinâmico para movimentos arbitrários, e realizar simulações no domínio do tempo, a Matriz de Coeficientes de Influência Aerodinâmica é aproximada por polinômios de Padé, utilizando o Método dos Mínimos Quadrados. Por fim, são realizadas algumas simulações de voo, aplicando perturbações por rajada de vento e discutindo os principais efeitos da modelagem sobre a resposta da aeronave.

**Palavras-chave:** Aeronaves. Dinâmica. Flexíveis. Rajadas. Simulação.

## ABSTRACT

# FLEXIBLE AIRCRAFT MODELING USING MULTIBODY DYNAMICS AND UNSTEADY AERODYNAMICS

AUTHOR: Wilcker Neuwald Schinestzki  
ADVISOR: Pedro Paglione

In this work, the flight dynamics of a flexible aircraft is modeled considering inertial coupling by means of multibody theory. The aircraft is dismembered into six interconnected bodies, being the fuselage considered as a rigid body, and the lifting surfaces, as flexible ones. Then, a continuous beam structural model is developed, reduced to four degrees of freedom. For this, the Rayleigh-Ritz method is applied, using, as shape functions, the analytical solutions for the bending and torsion modal shapes of a cantilever beam. In the sequence, the Modified Strip Theory is used to obtain an unsteady aerodynamic model. In this method, the surfaces are discretized in strips, and each strip is associated with a typical section of two or three degrees of freedom, depending on the control surfaces. Some additional corrections are used to include the effects of the aircraft rigid and flexible body motion. In order to generalize the aerodynamic model for arbitrary motion, and to perform simulations in time domain, the Aerodynamic Influence Coefficients Matrix (AIC) is approximated by Padé polynomials using the Least Square Method. Finally, some flight simulations are performed, applying wind gust perturbations, and discussing the main effects of modeling on the aircraft response.

**Keywords:** Aircraft. Dynamics. Flexible. Gusts. Simulation.

## LISTA DE FIGURAS

|                                                                                                                                                                                                          |    |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Figura 2.1 – Forças atuantes na aeronave modelada por multicorpos. ....                                                                                                                                  | 16 |
| Figura 2.2 – Posição de um ponto $P$ . ....                                                                                                                                                              | 18 |
| Figura 2.3 – Transformação de $SR_I$ para $SR_B$ por meio dos ângulos de Euler. ....                                                                                                                     | 19 |
| Figura 2.4 – Transformação de $SR_B$ para $SR_S$ por meio dos ângulos de orientação de cada corpo. ....                                                                                                  | 20 |
| Figura 2.5 – Posicionamento do sistema de referência, $SR_B$ , e ilustração da velocidade angular de uma aeronave. ....                                                                                  | 21 |
| Figura 3.1 – Idealização estrutural dos corpos flexíveis. ....                                                                                                                                           | 39 |
| Figura 3.2 – Formas modais utilizadas para o modelo de viga. ....                                                                                                                                        | 41 |
| Figura 3.3 – Hipótese cinemática da viga de Euler-Bernoulli sob flexão. ....                                                                                                                             | 42 |
| Figura 3.4 – Hipótese cinemática da viga de Saint-Venant sob torção. ....                                                                                                                                | 42 |
| Figura 4.1 – Função de deficiência de sustentação de Theodorsen no plano complexo. ....                                                                                                                  | 45 |
| Figura 4.2 – Esquema de asa enflechada com raiz equivalente. ....                                                                                                                                        | 46 |
| Figura 4.3 – Seção de corte A-A. ....                                                                                                                                                                    | 46 |
| Figura 4.4 – Seção de corte B-B: seção típica com três graus de liberdade. ....                                                                                                                          | 46 |
| Figura 4.5 – Sistema aerodinâmico da faixa, $SR_W$ . ....                                                                                                                                                | 49 |
| Figura 4.6 – Contribuição dos movimentos de corpo rígido por meio dos ângulos $\Lambda_{EF}$ e $\alpha_{FR}$ . ....                                                                                      | 50 |
| Figura 4.7 – Modelo de rajada 1-cos. ....                                                                                                                                                                | 60 |
| Figura 5.1 – Vista superior da aeronave P1 adaptada. ....                                                                                                                                                | 61 |
| Figura 5.2 – Estrutura básica do ambiente de simulação. ....                                                                                                                                             | 62 |
| Figura 5.3 – Resposta temporal das coordenadas elásticas, $q_f$ , para uma perturbação na semi-asa direita de $q_1^f = -0.02\text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio. ....                        | 64 |
| Figura 5.4 – Transformada Rápida de Fourier da resposta temporal dos primeiros modos de flexão das semi-ásas. ....                                                                                       | 65 |
| Figura 5.5 – Resposta temporal das derivadas das coordenadas elásticas, $\dot{q}_f$ , para uma perturbação na semi-asa direita de $q_1^f = -0.02\text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio. ....    | 66 |
| Figura 5.6 – Resposta temporal das variáveis, $\theta$ , $q$ , $\phi$ e $p$ , para uma perturbação na semi-asa direita de $q_1^f = -0.02\text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio. ....            | 67 |
| Figura 5.7 – Resposta temporal da altitude, $H$ , para uma perturbação na semi-asa direita de $q_1^f = -0.02\text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio. ....                                        | 68 |
| Figura 5.8 – Discretização das superfícies sustentadoras em faixas. ....                                                                                                                                 | 69 |
| Figura 5.9 – Aproximação da matriz AIC pelo Método dos Mínimos Quadrados. ....                                                                                                                           | 70 |
| Figura 5.10 – Resposta temporal do ângulo de rolamento, $\phi$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave. ....                                                            | 73 |
| Figura 5.11 – Resposta temporal da velocidade angular, $p$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave. ....                                                                | 73 |
| Figura 5.12 – Resposta temporal dos ângulos de ataque e derrapagem aerodinâmicos, $\alpha_a$ e $\beta_a$ , respectivamente, para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave. .... | 74 |
| Figura 5.13 – Resposta temporal das coordenadas elásticas, $q_f$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave flexível,                                                      |    |

|                                                                                                                                                                                                                          |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| com modelo de aerodinâmica não estacionária. ....                                                                                                                                                                        | 75 |
| Figura 5.14 – Resposta temporal das derivadas das coordenadas elásticas, $\dot{q}_f$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave flexível, com modelo de aerodinâmica não estacionária. . . | 76 |
| Figura 5.15 – Resposta temporal do ângulo de arfagem, $\theta$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave. ....                                                                            | 76 |
| Figura 5.16 – Resposta temporal da velocidade angular, $q$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave. ....                                                                                | 77 |
| Figura 5.17 – Resposta temporal do esforço cortante, $Q_3^c$ , e do momento fletor, $Q_4^c$ , na raiz da semi-asa esquerda, para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave. ....                 | 78 |

## **LISTA DE TABELAS**

|                                                                                                                                                                               |    |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| Tabela 5.1 – Comparaçao entre as frequências obtidas para o movimento combinado e as frequências naturais apresentadas em Pogorzelski (2010). 66                              |    |
| Tabela 5.2 – Comparaçao entre as condições de equilíbrio das aeronaves rígida e flexível, considerando uma condição de planeio à velocidade constante de 80 <i>km/h</i> ..... | 71 |
| Tabela A.1 – Principais parâmetros geométricos da aeronave.....                                                                                                               | 83 |
| Tabela A.2 – Principais parâmetros da fuselagem.....                                                                                                                          | 83 |
| Tabela A.3 – Principais parâmetros geométricos das semi-asas.....                                                                                                             | 84 |
| Tabela A.4 – Principais parâmetros geométricos das semi-empenagens horizontais.....                                                                                           | 85 |
| Tabela A.5 – Principais parâmetros geométricos da empenagem vertical.....                                                                                                     | 86 |

## SUMÁRIO

|          |                                                                    |           |
|----------|--------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUÇÃO</b>                                                  | <b>11</b> |
| 1.1      | MOTIVAÇÃO                                                          | 11        |
| 1.2      | REVISÃO BIBLIOGRÁFICA                                              | 12        |
| 1.2.1    | Modelagem Dinâmica                                                 | 12        |
| 1.2.2    | Modelagem Estrutural                                               | 13        |
| 1.2.3    | Modelagem Aerodinâmica                                             | 14        |
| 1.3      | OBJETIVOS                                                          | 15        |
| <b>2</b> | <b>MODELAGEM DINÂMICA</b>                                          | <b>16</b> |
| 2.1      | SISTEMAS DE REFERÊNCIA                                             | 17        |
| 2.2      | CINEMÁTICA                                                         | 21        |
| 2.2.1    | Cinemática de Translação                                           | 21        |
| 2.2.2    | Cinemática de Rotação                                              | 22        |
| 2.2.3    | Cinemática de um Ponto P                                           | 23        |
| 2.3      | EQUAÇÕES DE NEWTON-EULER GENERALIZADAS                             | 24        |
| 2.3.1    | Forças Iniciais Generalizadas                                      | 26        |
| 2.3.2    | Forças Externas Generalizadas                                      | 29        |
| 2.3.3    | Forças Elásticas Generalizadas                                     | 29        |
| 2.3.4    | Sistema de Equações na Forma Matricial                             | 33        |
| 2.4      | DINÂMICA DE MULTICORPOS                                            | 35        |
| <b>3</b> | <b>MODELAGEM ESTRUTURAL</b>                                        | <b>39</b> |
| <b>4</b> | <b>MODELAGEM AERODINÂMICA</b>                                      | <b>44</b> |
| 4.1      | TEORIA DAS FAIXAS MODIFICADA                                       | 44        |
| 4.2      | INFLUÊNCIA DOS MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO E FLEXÍVEL               | 49        |
| 4.3      | GENERALIZAÇÃO PARA MOVIMENTOS ARBITRÁRIOS                          | 52        |
| 4.3.1    | Matriz de Coeficientes de Influência Aerodinâmica                  | 52        |
| 4.3.2    | Aproximação por Funções Racionais                                  | 55        |
| 4.3.3    | Dinâmica dos Estados de Atraso Aerodinâmico                        | 57        |
| 4.3.4    | Derivadas de Estabilidade e Controle                               | 58        |
| 4.4      | MODELO DE RAJADA                                                   | 59        |
| <b>5</b> | <b>ESTUDOS NUMÉRICOS</b>                                           | <b>61</b> |
| 5.1      | RESPOSTA À PERTURBAÇÃO ESTRUTURAL SEM FORÇAS EXTERNAS              | 63        |
| 5.2      | AVALIAÇÃO DA TEORIA DAS FAIXAS E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES RACIONAIS | 68        |
| 5.3      | OBTENÇÃO DA CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA AERONAVE FLEXÍVEL            | 70        |
| 5.4      | RESPOSTA À PERTURBAÇÃO POR UMA SEMI-RAJADA                         | 72        |
| <b>6</b> | <b>CONCLUSÃO</b>                                                   | <b>79</b> |
| 6.1      | SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS                                   | 80        |
|          | <b>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>                                  | <b>81</b> |
|          | <b>APÊNDICE A – DADOS DA AERONAVE</b>                              | <b>83</b> |

# 1 INTRODUÇÃO

Neste capítulo, apresenta-se, inicialmente, a motivação para a escolha do tema do trabalho. Na sequência, uma revisão bibliográfica é realizada, com o objetivo de buscar alternativas para o problema de modelagem, no que diz respeito aos três grandes grupos: formulação dinâmica, estrutural e aerodinâmica. Por fim, são traçados os objetivos geral e específicos, os quais são utilizados como guia ao longo de todo trabalho.

## 1.1 MOTIVAÇÃO

Nas etapas iniciais do projeto de uma aeronave, é muito comum o uso de modelos simplificados, considerando a aeronave como um corpo rígido. Dessa forma, consegue-se realizar os primeiros estudos de desempenho, estabilidade e controle, bem como de qualidade de voo de uma aeronave. No entanto, quanto mais flexível uma aeronave, em geral, maior o acoplamento entre suas dinâmicas de corpos rígido e flexível, o que torna, mais cedo ou mais tarde, as análises aeroelásticas indispensáveis (WASZAK; SCHMIDT, 1988). Dado o elevado custo de se realizar modificações nas fases avançadas de projeto, Hofstee et al. (2003) comentam das perspectivas de aplicação de ferramentas para simulação de aeronaves flexíveis já em fases preliminares de projeto.

Conforme ressaltado por Kalthof (2014), os efeitos da flexibilidade de uma aeronave na sua dinâmica de voo estão sendo estudados até os dias de hoje, incluindo a exploração de alguns efeitos benéficos, como o controle ativo de cargas, o que pode contribuir reduzindo a fadiga na estrutura e aumentando o conforto dos passageiros. Vepa (2014), por sua vez, comenta que as aeronaves modernas já estão sendo projetadas para ser bastante flexíveis, podendo, inclusive, deformar sua geometria de formaativa, a fim de reduzir arrasto e melhorar outros índices de desempenho.

Nesse contexto, tem-se como motivação o estudo da modelagem dinâmica de aeronaves flexíveis de uma maneira simplificada e concisa, visando a possibilidade de simulações rápidas, como estudos de perturbação por rajadas de vento, para aplicações em etapas preliminares de projeto.

## 1.2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A fim de investigar eventuais alternativas, e buscar fontes de conhecimento para as modelagens dinâmica, estrutural e aerodinâmica, fez-se uma breve revisão bibliográfica, dividindo, em tópicos, cada uma dessas grandes áreas.

### 1.2.1 Modelagem Dinâmica

Waszak e Schmidt (1988) derivam as expressões para a dinâmica de voo de aeronaves flexíveis fazendo uma extensão da dinâmica de corpo rígido. Por meio de uma escolha adequada do posicionamento do sistema de referência, tenta-se reduzir os efeitos do acoplamento inercial. As equações do movimento são obtidas por meio da equação de Lagrange e do princípio do Trabalho Virtual. De forma semelhante, Vepa (2014) deriva as expressões para a dinâmica de aeronaves flexíveis, ressaltando a importância de se desenvolver modelos de ordem reduzida que permitam preservar o comportamento não-linear das equações do movimento.

Por outro lado, Kruger (2007) ressalta que a dinâmica de multicorpos tem se tornado uma ferramenta valiosa para aplicações aeroespaciais, principalmente quando as simulações envolvem grandes deslocamentos de corpo rígido. Sua fácil implementação e integração com a mecânica de voo a torna uma ferramenta bastante adequada para a aplicação em fases de projeto preliminar de aeronaves.

Nesse contexto, Shabana (2013) define sistemas de multicorpos como conjuntos de subsistemas rígidos ou flexíveis, cujo movimento pode apresentar restrições cinemáticas devido à presença de juntas. Tais subsistemas podem sofrer grandes deslocamentos de translação e rotação, como ocorre nas aeronaves. No trabalho, são desenvolvidas as equações gerais do movimento de multicorpos flexíveis, voltadas para a aplicação conjunta com o método dos elementos finitos.

Ainda nessa linha, Kalthof (2014) aplica a abordagem da dinâmica de multicorpos no desenvolvimento de uma ferramenta para a predição de cargas em fase de projeto preliminar de aeronaves flexíveis. São negligenciadas variações de massa e inércia devido às deformações, mas, mesmo assim, diversos aspectos da mecânica de voo são afetados pela consideração de asas flexíveis.

Aplicando a metodologia apresentada por Shabana (2013), Cavagna, Maserati e Quaranta (2009) acoplam a dinâmica de multicorpos de uma aeronave flexível com um modelo de aerodinâmica por Dinâmica dos Fluidos Computacional, ou *Computational Fluid Dynamics* (CFD). As simulações são realizadas com a finalidade de analisar manobras em regime transsonico, reforçando a versatilidade da dinâmica de multicorpos. Seguindo uma metodologia semelhante, Speck (2004) utiliza a dinâmica

de multicorpos para desenvolver estudos de uma aeronave em solo, considerando, inclusive, casos de pouso e decolagem.

### 1.2.2 Modelagem Estrutural

Dunn e Dugundji (1992) apresentam um modelo estrutural de asa engastada utilizando o método de Rayleigh-Ritz, no qual se escreve as deflexões em termos das amplitudes modais. Algumas asas de material compósito foram fabricadas e investigadas em túnel de vento. Os resultados obtidos para as análises de divergência e de *flutter* com estol não-linear mostraram coerência razoável com os preditos pelas análises desenvolvidas.

Para o caso de um modelo estrutural mais refinado, onde um grande número de detalhes da estrutura são conhecidos, pode-se desenvolver um modelo completo pelo Método dos Elementos Finitos (MEF). Pogorzelski (2010) faz uso do MEF para realizar a análise modal de uma aeronave construída de material compósito. As frequências naturais e modos de vibração da estrutura são obtidos e interpolados. Em seguida, faz uso da superposição modal para reduzir os graus de liberdade da estrutura e obter as equações modais generalizadas. A desvantagem desse método é o tempo despendido na construção do modelo detalhado, o que o torna inviável, por exemplo, para análises de projeto preliminar, onde alterações são necessárias a todo momento.

Quando se trata de aeronaves bastante flexíveis, é comum o uso da dinâmica de multicorpos. Castellani, Cooper e Lemmens (2017) apresentam a comparação entre as abordagens pelo MEF e pela dinâmica de multicorpos para análises estáticas de aeronaves altamente flexíveis. Ambos os métodos apresentaram excelente concordância para problemas puramente estáticos. Entretanto, notou-se diferenças consideráveis nos resultados do cálculo de equilíbrio. Ao final do trabalho, concluiu-se que a abordagem pela dinâmica de multicorpos apresenta vantagens em termos de tempo computacional para as análises de equilíbrio não-linear e que isso pode se estender para as análises de resposta dinâmica não-linear.

Visando um modelo estrutural simplificado e facilmente acoplável à dinâmica de multicorpos, Castrichini et al. (2018) utilizam uma superposição das formas modais para construir a matriz de forma de cada corpo flexível, pelo método de Rayleigh-Ritz. Após validar os resultados, conclui-se que a simulação por multicorpos pode ser utilizada para prever cargas aeroelásticas com precisão equivalente aos métodos tradicionais baseados no MEF.

### 1.2.3 Modelagem Aerodinâmica

Segundo Castellani, Cooper e Lemmens (2017), diversas abordagens aerodinâmicas têm sido utilizadas para aeronaves flexíveis, desde modelos simples de teoria das faixas, até métodos de solução das equações de Navier-Stokes. Nesse contexto, diversos modelos aerodinâmicos são comparados por Kier (2005) quando aplicados a uma mesma aeronave flexível. Dentre eles, destacam-se o *Vortex-Lattice Method* (VLM) quasi-estacionário, a teoria das faixas estendida, modelando efeitos não estacionários por funções indiciais, como funções de Wagner e de Küssner e, por último, o *Doublet-Lattice Method* (DLM), utilizando aproximação por funções racionais pelo método de Roger. Ao final, mostra que a teoria das faixas responde da mesma forma que o DLM para diferentes rajadas, entretanto, subestima um pouco a magnitude das cargas. Dessa forma, conclui-se que a teoria das faixas se mostra a mais adequada para fases preliminares de projeto, pois sua fácil modelagem e baixo custo computacional acabam compensando essa pequena falta de fidelidade dos resultados.

Theodorsen (1935) apresenta uma teoria geral de aerodinâmica não estacionária de uma seção típica oscilante e com três graus de liberdade. Nesse trabalho, é utilizada a teoria de escoamentos potenciais para obter expressões analíticas para o cálculo de sustentação e momento de arfagem, considerando os efeitos da esteira de vórtices. Esses efeitos inserem um atraso aerodinâmico, dado pela função de deficiência de sustentação de Theodorsen. As contribuições de Theodorsen (1935) deram origem à Teoria das Faixas, na qual a asa é discretizada em faixas e, para cada uma, aplica-se as soluções analíticas obtidas para a seção típica associada. Devido ao caráter bidimensional do escoamento, não são considerados efeitos de ponta de asa, nem efeitos de interferência entre as faixas. Por esse motivo, a teoria é bastante aceita para asas bastante alongadas.

Barmby, Cunningham e Garrick (1951) vão um pouco além e generalizam a teoria de Theodorsen (1935) para asas enflechadas e com diedro. Assume-se que a asa é suficientemente rígida próxima da raiz e que é possível assumir uma raiz da asa equivalente, dada perpendicular ao eixo elástico. Alguns anos depois, Yates (1958) adiciona mais algumas contribuições à teoria, a qual passa a se chamar Teoria das Faixas Modificada, ou, em inglês, *Modified Strip Theory* (MST). Nela, são consideradas posições arbitrárias para o centro aerodinâmico da seção típica e, também, a possibilidade de representação de aerofólios arqueados.

Visando estudos da dinâmica de voo de um planador flexível, Pogorzelski (2010) utiliza a MST e adiciona as influências dos movimentos de corpo rígido e flexível. Na sequência, utiliza a aproximação de Roger para obter um modelo aerodinâmico válido para movimentos arbitrários, bem como, para obter um modelo de derivadas de estabilidade e controle da aeronave.

### 1.3 OBJETIVOS

Como objetivo geral do trabalho, tem-se: realizar a modelagem de uma aeronave flexível e implementá-la, na forma de um algoritmo de simulação, de tal forma que seja possível realizar simulações com perturbações por rajadas de vento.

A fim de alcançar o objetivo geral, estabeleceu-se os seguintes objetivos específicos:

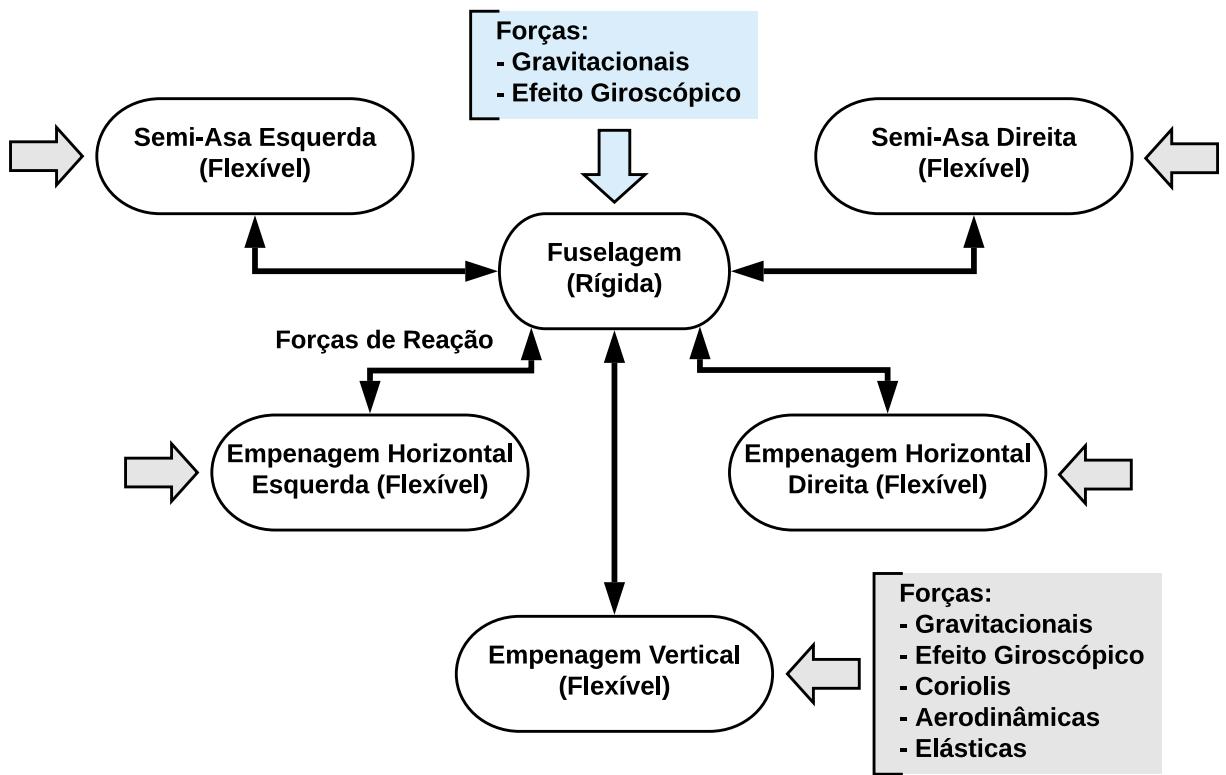
1. Aplicar a teoria de multicorpos para modelar a dinâmica de uma aeronave flexível;
2. Desenvolver um modelo estrutural que seja capaz de representar as superfícies aerodinâmicas de uma aeronave;
3. Extrair um modelo aerodinâmico capaz de prever os efeitos não estacionários, bem como as cargas individuais em cada superfície aerodinâmica da aeronave;
4. Unificar todas as formulações em um algoritmo de simulação que permita a realização de diferentes estudos de caso, como simulações de perturbações com rajadas de vento;
5. Realizar alguns estudos numéricos, discutindo os efeitos da flexibilidade quando comparada à uma aeronave idealmente rígida.

## 2 MODELAGEM DINÂMICA

Neste capítulo, desenvolve-se as equações do movimento para um sistema de multicorpos flexíveis, focando no caso particular de uma aeronave flexível. Por se tratar da dinâmica de voo de uma aeronave, a formulação é uma adaptação da apresentada por Shabana (2013), a fim de integrá-la às formulações aerodinâmica e estrutural adotadas. Estas, por sua vez, são tratadas em capítulos individuais, na sequência do trabalho.

Para tratar uma aeronave como um sistema de multicorpos, é preciso desmembrá-la em corpos menores. Visando um primeiro estudo simplificado, e a facilidade de interação com as formulações aerodinâmica e estrutural, decidiu-se por desmembrar a aeronave conforme o esquema de interação entre os corpos da Figura 2.1, que inclui as forças modeladas para cada corpo.

Figura 2.1 – Forças atuantes na aeronave modelada por multicorpos.



Fonte: Autor.

## 2.1 SISTEMAS DE REFERÊNCIA

Como todo movimento é relativo, é usual iniciar a modelagem definindo alguns sistemas de referência. Para a dinâmica de multicorpos flexíveis, uma opção conveniente consiste em adotar: (a) um sistema inercial,  $SR_I$ ,  $(O^I \mathbf{e}_1^I \mathbf{e}_2^I \mathbf{e}_3^I)$ , que, para períodos curtos de simulação, é adotado fixo na superfície da Terra; um sistema do corpo,  $SR_B$ ,  $(O^B \mathbf{e}_1^B \mathbf{e}_2^B \mathbf{e}_3^B)$ , móvel, posicionado, neste caso, no centro de massa da aeronave na condição indeformada; e, um sistema solidário a cada corpo do sistema,  $SR_S$ ,  $(O^S \mathbf{e}_1^S \mathbf{e}_2^S \mathbf{e}_3^S)$ , posicionado de forma conveniente para descrever seu campo de deslocamentos. Os sistemas de referência, aqui adotados, são compostos por três eixos cartesianos e ortogonais entre si, sendo a origem, por definição, posicionada no ponto de intersecção.

Uma vez definidos os sistemas de referência, convém padronizar a notação utilizada para se referir às variáveis escritas em cada sistema. Dessa forma, define-se:

- Todo vetor com uma única barra sobrescrita, como, por exemplo,  $\bar{\mathbf{u}}$ , está escrito no sistema  $SR_B$ ;
- Todo vetor com duas barras sobrescritas, como, por exemplo,  $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_o$ , está escrito no sistema  $SR_S$ ;
- Os demais vetores, como, por exemplo,  $\mathbf{R}$ , estão escritos no sistema  $SR_I$ .

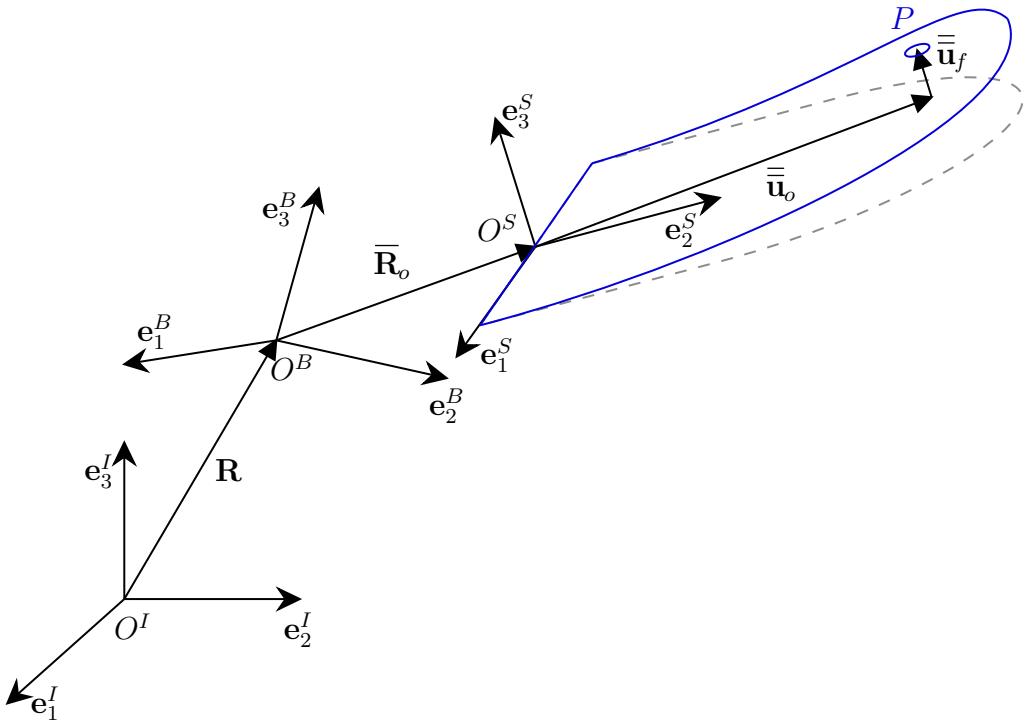
Dessa forma, seja  $P$  um ponto do corpo flexível,  $S$ , conforme ilustrado na Figura 2.2, pode-se definir seu vetor posição  $\mathbf{r}$  com respeito ao referencial inercial da seguinte forma

$$\mathbf{r} = \mathbf{R} + \mathbf{A}_{BI}\bar{\mathbf{u}}, \quad (2.1)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a posição relativa entre as origens de  $SR_B$  e  $SR_I$ ,  $\mathbf{A}_{BI}$  é a matriz de transformação de  $SR_B$  para  $SR_I$  e  $\bar{\mathbf{u}}$  representa a posição do ponto  $P$ . Esta, por sua vez, pode ser escrita da forma

$$\bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{R}}_o + \mathbf{A}_{SB}(\bar{\bar{\mathbf{u}}}_o + \bar{\bar{\mathbf{u}}}_f), \quad (2.2)$$

em que:  $\bar{\mathbf{R}}_o$  é a posição relativa entre as origens de  $SR_S$  e  $SR_B$ ;  $\mathbf{A}_{SB}$  é a matriz de transformação de  $SR_S$  para  $SR_B$ ;  $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_o$  é a posição do ponto  $P$  na configuração indeformada; e,  $\bar{\bar{\mathbf{u}}}_f$  é a posição relativa entre o ponto  $P$ , após a deformação, e sua posição original.

Figura 2.2 – Posição de um ponto  $P$ .

Fonte: Autor.

Antes de derivar a velocidade inercial do ponto  $P$ , é preciso estabelecer as derivadas das matrizes de transformação. As matrizes  $A_{BI}$  e  $A_{SB}$  consistem em três rotações elementares sucessivas e não comutativas, sendo que a cada rotação, um novo sistema de referência intermediário é gerado, em torno do qual a próxima rotação ocorre. Dentre suas principais propriedades, tem-se a ortogonalidade, o que garante que  $A^{-1} = A^T$ . Sendo assim, a matriz de transformação do sistema  $SR_I$  para o  $SR_B$ ,  $A_{IB}$ , pode ser obtida fazendo  $A_{IB} = A_{BI}^T$ . O mesmo é válido para as demais matrizes de transformação.

Adotando como parametrização de atitude os ângulos de Euler, em que  $\psi$ ,  $\theta$  e  $\phi$  representam os ângulos de guinada, arfagem e rolamento da aeronave, respectivamente, pode-se obter as seguintes matrizes de rotação elementares

$$C_1(\phi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ 0 & -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{bmatrix}, \quad (2.3)$$

$$C_2(\theta) = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & 0 & -\sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{bmatrix}, \quad (2.4)$$

e,

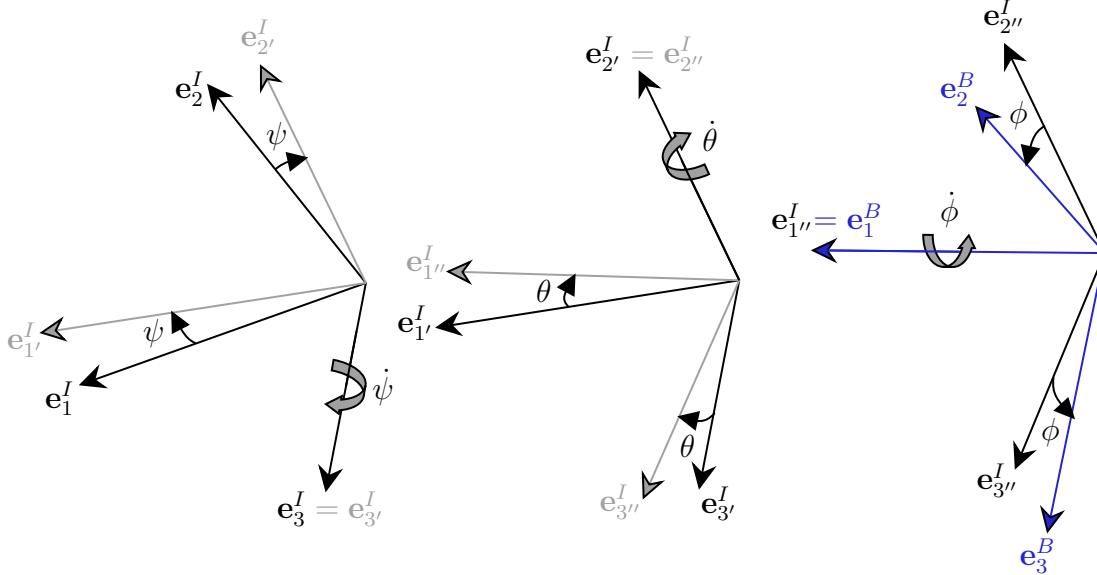
$$\mathbf{C}_3(\psi) = \begin{bmatrix} \cos(\psi) & \sin(\psi) & 0 \\ -\sin(\psi) & \cos(\psi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Adotando a sequência de rotações padrão do setor aeroespacial, 321, conforme ilustrado na Figura 2.3, tem-se,  $\mathbf{A}_{IB} = \mathbf{C}_1(\phi)\mathbf{C}_2(\theta)\mathbf{C}_3(\psi)$ , o que resulta em

$$\mathbf{A}_{IB} = \begin{bmatrix} c(\theta)c(\psi) & c(\theta)s(\psi) & -s(\theta) \\ c(\psi)s(\theta)s(\phi) - c(\phi)s(\psi) & c(\phi)c(\psi) + s(\theta)s(\phi)s(\psi) & c(\theta)s(\phi) \\ c(\phi)c(\psi)s(\theta) + s(\phi)s(\psi) & c(\phi)s(\theta)s(\psi) - c(\psi)s(\phi) & c(\theta)c(\phi) \end{bmatrix}, \quad (2.6)$$

sendo  $s$  e  $c$  contrações para as funções seno e cosseno, respectivamente. Vale ressaltar que o vetor de parâmetros de atitude,  $\Theta = [\phi, \theta, \psi]^T$ , também é função do tempo.

Figura 2.3 – Transformação de  $SR_I$  para  $SR_B$  por meio dos ângulos de Euler.

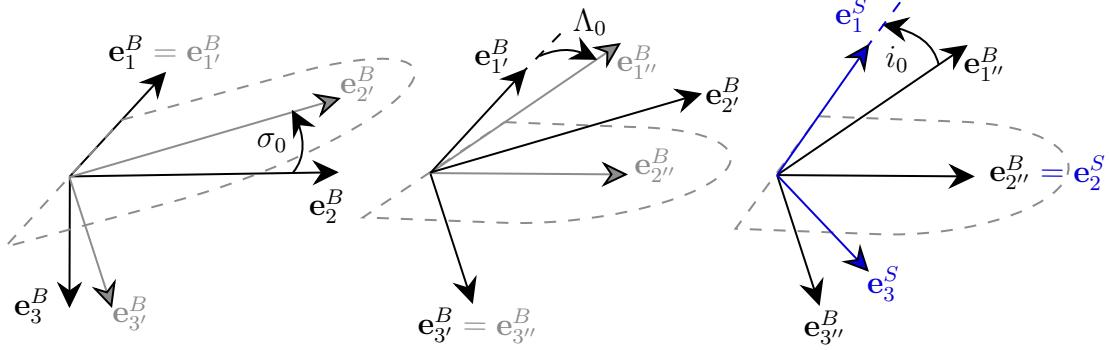


Fonte: Autor.

A matriz  $\mathbf{A}_{BS}$ , por sua vez, é função dos ângulos  $\sigma_0$ ,  $\Lambda_0$  e  $i_0$ , os quais determinam a orientação de cada corpo com respeito a  $SR_B$ , e se mantêm constantes ao longo do tempo. Tomando como exemplo uma semi-asa direita de uma aeronave, os ângulos  $\sigma_0$ ,  $\Lambda_0$  e  $i_0$  são análogos, respectivamente, aos ângulos de diedro, enflechamento e incidência. A Figura 2.4 ilustra essas rotações utilizando a sequência 132.

Sendo assim, a matriz  $\mathbf{A}_{BS}$  também pode ser escrita em função de três rotações

Figura 2.4 – Transformação de  $SR_B$  para  $SR_S$  por meio dos ângulos de orientação de cada corpo.



Fonte: Autor.

elementares,  $\mathbf{A}_{BS} = \mathbf{C}_2(i_0)\mathbf{C}_3(\Lambda_0)\mathbf{C}_1(-\sigma_0)$ , em que obtém-se

$$\mathbf{A}_{BS} = \begin{bmatrix} c(i_0)c(\Lambda_0) & c(i_0)c(\sigma_0)s(\Lambda_0) - s(i_0)s(\sigma_0) & -c(i_0)s(\Lambda_0)s(\sigma_0) - c(\sigma_0)s(i_0) \\ -s(\Lambda_0) & c(\Lambda_0)c(\sigma_0) & -c(\Lambda_0)s(\sigma_0) \\ c(\Lambda_0)s(i_0) & c(\sigma_0)s(i_0)s(\Lambda_0) + c(i_0)s(\sigma_0) & c(i_0)c(\sigma_0) - s(i_0)s(\Lambda_0)s(\sigma_0) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Explorando a propriedade de ortogonalidade das matrizes de rotação, tem-se que  $\mathbf{A}_{BI}^T \mathbf{A}_{BI} = \mathbf{I}$ . Derivando essa expressão em relação ao tempo, obtém-se

$$\mathbf{A}_{BI}^T \dot{\mathbf{A}}_{BI} + \dot{\mathbf{A}}_{BI}^T \mathbf{A}_{BI} = \mathbf{0}, \quad (2.8)$$

o que implica  $\mathbf{A}_{BI}^T \dot{\mathbf{A}}_{BI} = -\dot{\mathbf{A}}_{BI}^T \mathbf{A}_{BI} = -(\mathbf{A}_{BI}^T \dot{\mathbf{A}}_{BI})^T$ . Entretanto, sabe-se que uma matriz que é igual a sua transposta, mas com sinal oposto, é, por definição, uma matriz antissimétrica. Neste caso,  $\mathbf{A}_{BI}^T \dot{\mathbf{A}}_{BI} = \tilde{\tilde{\omega}}$ , em que  $\tilde{\tilde{\omega}}$  é a matriz antissimétrica associada a um vetor  $\tilde{\omega}$ . Neste caso,  $\tilde{\omega}$  é o vetor velocidade angular escrito no sistema  $SR_B$ , como discutido por Shabana (2013). Multiplicando por  $\mathbf{A}_{BI}$ , obtém-se a expressão para a derivada da matriz de rotação, dada por

$$\dot{\mathbf{A}}_{BI} = \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\omega}}, \quad (2.9)$$

sendo a notação  $(\tilde{\cdot})$  utilizada para definir a matriz antissimétrica associada a um vetor.

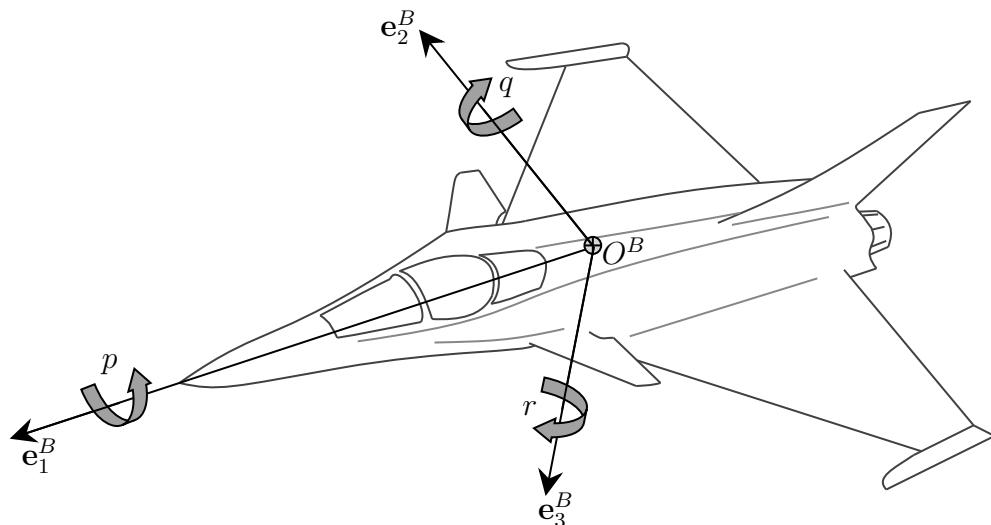
Multiplicar a matriz antissimétrica de um vetor à esquerda de outro vetor, significa efetuar o produto vetorial entre eles. Isto é,  $\tilde{\tilde{\omega}} \bar{\mathbf{u}} = \tilde{\omega} \times \bar{\mathbf{u}} = -\tilde{\bar{\mathbf{u}}} \tilde{\omega}$ . Fazendo uso dessa propriedade e abrindo o produto vetorial, pode-se montar a matriz  $\tilde{\tilde{\omega}}$ , a qual é

dada por

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -r & q \\ r & 0 & -p \\ -q & p & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $r$  são componentes do vetor  $\bar{\boldsymbol{\omega}} = [p, q, r]^T$ , e correspondem às velocidades de rolamento, arfagem e guinada, em torno dos eixos  $\mathbf{e}_1^B$ ,  $\mathbf{e}_2^B$  e  $\mathbf{e}_3^B$ , respectivamente. Na Figura 2.5, está ilustrada a definição usual de orientação dos eixos do sistema  $SR_B$  para uma aeronave, em que a origem se encontra no centro de massa da aeronave não deformada;  $\mathbf{e}_1^B$  aponta na direção do nariz;  $\mathbf{e}_3^B$  aponta para baixo, formando um plano de simetria com  $\mathbf{e}_1^B$ ; e  $\mathbf{e}_2^B$  é perpendicular ao plano de simetria e aponta no sentido da semi-asa direita.

Figura 2.5 – Posicionamento do sistema de referência,  $SR_B$ , e ilustração da velocidade angular de uma aeronave.



Fonte: Autor.

## 2.2 CINEMÁTICA

### 2.2.1 Cinemática de Translação

Como será visto posteriormente, a velocidade relativa do sistema  $SR_B$ , com respeito a  $SR_I$ , será obtida na forma  $\dot{\overline{\mathbf{R}}}$ , ou seja, derivada com relação ao sistema  $SR_I$ , mas escrita em  $SR_B$ . Portanto, para facilitar a interpretação da navegação da aero-

nave, costuma-se escrevê-la no sistema inercial, utilizando a matriz de transformação  $\mathbf{A}_{BI}$ . Essa transformação consiste na cinemática de translação e é, simplesmente, dada por

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{A}_{BI} \dot{\bar{\mathbf{R}}}. \quad (2.11)$$

### 2.2.2 Cinemática de Rotação

A cinemática de rotação, por sua vez, consiste na relação entre a derivada dos parâmetros de atitude  $\dot{\Theta}$  e o vetor velocidade angular  $\bar{\omega}$ . Essa relação é estabelecida por uma matriz  $\bar{\mathbf{G}}$  da seguinte maneira

$$\dot{\Theta} = \bar{\mathbf{G}}^{-1} \bar{\omega}. \quad (2.12)$$

Sejam  $i$  e  $j$  índices que se referem a linhas e colunas, os elementos da matriz  $\bar{\mathbf{G}}$  podem ser encontrados fazendo

$$\bar{\mathbf{G}}_{ij} = \frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{\Theta}_j}. \quad (2.13)$$

Para isso, entretanto, é necessário conhecer  $\bar{\omega}$  em função de  $\dot{\Theta}$ . Analisando a Figura 2.3, percebe-se que  $\dot{\theta}$  e  $\dot{\psi}$  são velocidades angulares em torno de eixos intermediários, portanto, deve-se efetuar as seguintes correções

$$\bar{\omega} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\phi) \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{C}_1(\phi) \mathbf{C}_2(\theta) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

Utilizando a Equação (2.13) e calculando a matriz inversa, obtém-se

$$\bar{\mathbf{G}}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & \sin(\phi) \tan(\theta) & \cos(\phi) \tan(\theta) \\ 0 & \cos(\phi) & -\sin(\phi) \\ 0 & \sec(\theta) \sin(\phi) & \cos(\phi) \sec(\theta) \end{bmatrix}. \quad (2.15)$$

É importante ressaltar que quando  $\theta = \pi/2$ , a matriz  $\bar{\mathbf{G}}^{-1}$  é indeterminada, devido à singularidade presente na parametrização por ângulos de Euler. Essa singularidade pode ser resolvida utilizando a parametrização por quatérnions, os quais consistem em um conjunto de quatro parâmetros que descrevem uma hiperesfera unitária

no espaço hipercomplexo de quatro dimensões, sendo uma real e três imaginárias. Entretanto, como não se espera que a aeronave atinja um ângulo de arfagem de  $\pi/2$  neste trabalho, serão considerados apenas ângulos de Euler.

### 2.2.3 Cinemática de um Ponto P

Agora, faz-se necessário conhecer a cinemática de um ponto  $P$  qualquer em um dos multicorpos flexíveis do sistema. O movimento de um corpo flexível possui infinitos graus de liberdade (GDL), visto que os corpos são tratados como meios contínuos. Para tornar a sua análise viável computacionalmente, é preciso reduzir o problema a um número finito de GDL. Neste trabalho, o problema será resolvido utilizando funções de forma para interpolar o campo de deslocamentos dos corpos flexíveis. Essas funções de forma, denotadas por  $\Phi$ , são invariantes no tempo, ortogonais entre si, possuem módulo unitário, formando uma base ortonormal de funções. Matematicamente, tem-se que

$$\int_0^1 \Phi_i(\xi) \Phi_j(\xi) d\xi = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}, \quad (2.16)$$

onde  $\xi$  representa o comprimento adimensional do corpo. Portanto, para descrever os deslocamentos devido à deformação do corpo, uma superposição das funções de forma é feita, onde cada função é ponderada por uma coordenada elástica generalizada, as quais formam o vetor  $\mathbf{q}_f(t)$ . Escrevendo essa superposição na forma matricial, tem-se

$$\bar{\mathbf{u}}_f = \mathbf{S} \mathbf{q}_f(t), \quad (2.17)$$

onde  $\mathbf{S}$  é a matriz de forma, constituída pelas funções de forma  $\Phi_i$ . A composição da matriz de forma é tratada em detalhes no capítulo referente à modelagem estrutural.

Voltando à Equação (2.1), pode-se, portanto, obter a expressão para a velocidade inercial do ponto  $P$ , denotada por  $\dot{\mathbf{r}}$ , fazendo

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}}_{BI} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI} \dot{\bar{\mathbf{u}}}. \quad (2.18)$$

Utilizando as relações das Equações (2.9) e (2.17), obtém-se

$$\dot{\mathbf{r}} = \dot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f. \quad (2.19)$$

Derivando a Equação (2.19), obtém-se a aceleração inercial do ponto  $P$ , dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \dot{\mathbf{A}}_{BI} \tilde{\tilde{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI} \dot{\tilde{\tilde{\omega}}} \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\omega}} \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \dot{\mathbf{A}}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}_f. \quad (2.20)$$

Definindo a aceleração angular,  $\bar{\Omega} = \dot{\tilde{\omega}}$ , e, manipulando os termos da Equação (2.20), pode-se reescrevê-la da forma

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\omega}} \tilde{\tilde{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\omega}}^T \bar{\Omega} + 2\mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\omega}} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}_f. \quad (2.21)$$

### 2.3 EQUAÇÕES DE NEWTON-EULER GENERALIZADAS

As equações da dinâmica de um corpo flexível genérico, em um sistema de multicorpos, podem ser obtidas por diferentes abordagens, entre as quais a do Princípio do Trabalho Virtual (PTV). Considerando a Segunda Lei de Newton aplicada ao ponto  $P$ , de massa constante, tem-se que

$$\mathbf{F}_e^P + \mathbf{F}_c^P + \mathbf{F}_s^P - m^P \ddot{\mathbf{r}} = 0, \quad (2.22)$$

onde:  $\mathbf{F}_c^P$  se refere às forças de reação;  $\mathbf{F}_s^P$  às forças elásticas;  $\mathbf{F}_e^P$  às forças externas;  $\mathbf{e}$ ,  $m^P \ddot{\mathbf{r}}$ , às forças iniciais. Vale ressaltar que, embora  $\mathbf{F}_c^P$  e  $\mathbf{F}_s^P$  sejam forças internas ao corpo, são vistas como externas ao ponto  $P$ . Aplicando um deslocamento virtual consistente com as restrições do sistema,  $\delta \mathbf{r}^T$ , no ponto  $P$ , tem-se

$$\delta W^P = \delta \mathbf{r}^T (\mathbf{F}_e^P + \mathbf{F}_c^P + \mathbf{F}_s^P - m^P \ddot{\mathbf{r}}) = 0, \quad (2.23)$$

em que  $\delta \mathbf{r}^T \mathbf{F}_e^P$  é o trabalho virtual exercido pelas forças externas,  $\delta W_e$ ;  $\delta \mathbf{r}^T \mathbf{F}_c^P$  é o trabalho virtual referente às forças de reação,  $\delta W_c$ ;  $\delta \mathbf{r}^T \mathbf{F}_s^P$  é o trabalho virtual relativo às forças elásticas,  $\delta W_s$ ; e  $m^P \delta \mathbf{r}^T \ddot{\mathbf{r}}$  é o trabalho virtual exercido pelas forças iniciais,  $\delta W_i$ . Uma vez que há consistência entre deslocamento virtual e vínculos, o trabalho virtual das forças de reação é nulo. Ainda, essa relação é válida, não só para o ponto  $P$ , mas para todos os pontos contidos no corpo. Dessa forma, pode-se escrever o

PTV, genericamente, da forma

$$\delta W_i = \delta W_s + \delta W_e. \quad (2.24)$$

Antes de avaliar os trabalhos virtuais, é preciso definir o deslocamento virtual  $\delta \mathbf{r}^T$ . Para tal, neste trabalho, será adotada a *Floating Frame of Reference Formulation* (FFRF), na qual define-se  $\mathbf{q}$  como o conjunto de coordenadas generalizadas de interesse, composto por

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \boldsymbol{\Theta} \\ \mathbf{q}_f \end{bmatrix}, \quad (2.25)$$

em que  $\mathbf{R}$  e  $\boldsymbol{\Theta}$  descrevem o movimento de corpo rígido, e  $\mathbf{q}_f$ , os de corpo flexível. Uma vez feita essa definição, pode-se escrever  $\delta \mathbf{r}$  da forma

$$\delta \mathbf{r} = \sum_i \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}_i} \delta \mathbf{q}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{R}} \delta \mathbf{R} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \delta \boldsymbol{\Theta} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \mathbf{q}_f} \delta \mathbf{q}_f, \quad (2.26)$$

e, utilizando as Equações (2.1) e (2.2), obtém-se

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{I} \delta \mathbf{R} + \frac{\partial(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \delta \boldsymbol{\Theta} + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \delta \mathbf{q}_f, \quad (2.27)$$

em que  $\mathbf{I}$  é a matriz identidade de ordem 3. Esta será mantida para, mais adiante, facilitar a definição da matriz de massa referente à translação.

A fim de encontrar uma expressão mais amigável para o termo  $\frac{\partial(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}}$ , pode-se utilizar a regra da cadeia, da forma

$$\frac{d(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{dt} = \frac{\partial(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \frac{\partial(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{\partial \mathbf{q}_f} \dot{\mathbf{q}}_f, \quad (2.28)$$

o que é equivalente a

$$\dot{\mathbf{A}}_{BI} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI} \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \frac{\partial(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f. \quad (2.29)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo da Equação (2.29), obtém-se

$$\mathbf{A}_{BI} \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^T \bar{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f = \frac{\partial(\mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{u}})}{\partial \boldsymbol{\Theta}} \dot{\boldsymbol{\Theta}} + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f, \quad (2.30)$$

e, lembrando que  $\bar{\omega} = \bar{\mathbf{G}}\dot{\Theta}$ , pode-se verificar que

$$\frac{\partial(\mathbf{A}_{BI}\bar{\mathbf{u}})}{\partial\Theta} = \mathbf{A}_{BI}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}^T\bar{\mathbf{G}}. \quad (2.31)$$

Finalmente, transpondo a Equação (2.27), o deslocamento virtual,  $\delta\mathbf{r}^T$ , pode ser escrito como

$$\delta\mathbf{r}^T = \begin{bmatrix} \delta\mathbf{R}^T & \delta\Theta^T & \delta\mathbf{q}_f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{G}}^T\tilde{\bar{\mathbf{u}}}\mathbf{A}_{BI}^T \\ \mathbf{S}^T\mathbf{A}_{SB}^T\mathbf{A}_{BI}^T \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

### 2.3.1 Forças Inerciais Generalizadas

Escrevendo o trabalho virtual exercido pelas forças inerciais em um corpo qualquer do sistema, tem-se

$$\delta W_i = \int_V \rho\delta\mathbf{r}^T\ddot{\mathbf{r}} \, dV, \quad (2.33)$$

onde  $\rho$  é a massa específica do corpo. Substituindo a expressão de  $\delta\mathbf{r}^T$  na Equação (2.33), obtém-se

$$\delta W_i = \delta\mathbf{R}^T \underbrace{\int_V \rho\mathbf{I}\ddot{\mathbf{r}} \, dV}_{\mathbf{Q}_i^R} + \delta\Theta^T \underbrace{\int_V \rho\bar{\mathbf{G}}^T\tilde{\bar{\mathbf{u}}}\mathbf{A}_{BI}^T\ddot{\mathbf{r}} \, dV}_{\mathbf{Q}_i^\Theta} + \delta\mathbf{q}_f^T \underbrace{\int_V \rho\mathbf{S}^T\mathbf{A}_{SB}^T\mathbf{A}_{BI}^T\ddot{\mathbf{r}} \, dV}_{\mathbf{Q}_i^f}, \quad (2.34)$$

em que  $\mathbf{Q}_i^R$ ,  $\mathbf{Q}_i^\Theta$  e  $\mathbf{Q}_i^f$  são forças inerciais generalizadas de translação, de rotação e elásticas, respectivamente. Desenvolvendo, primeiramente,  $\mathbf{Q}_i^R$ , tem-se

$$\mathbf{Q}_i^R = \int_V \rho\mathbf{I}(\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{BI}\tilde{\bar{\omega}}\tilde{\bar{\omega}}\bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI}\tilde{\bar{\mathbf{u}}}^T\bar{\Omega} + 2\mathbf{A}_{BI}\tilde{\bar{\omega}}\mathbf{A}_{SB}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{A}_{BI}\mathbf{A}_{SB}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{q}}_f) \, dV, \quad (2.35)$$

e, separando em diferentes integrais, de forma a evidenciar os termos  $\ddot{\mathbf{R}}$ ,  $\bar{\Omega}$  e  $\ddot{\mathbf{q}}_f$ ,

obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_i^R = & \int_V \rho \mathbf{I} dV \ddot{\mathbf{R}} + \int_V \rho \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}}^T dV \bar{\boldsymbol{\Omega}} + \int_V \rho \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} dV \ddot{\mathbf{q}}_f \\ & + \int_V \rho (\mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}} + 2 \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f) dV. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Para manter a notação semelhante à utilizada por Shabana (2013), faz-se as seguintes definições:

$$\mathbf{m}_{RR} \triangleq \int_V \rho \mathbf{I} dV, \quad (2.37)$$

$$\bar{\mathbf{S}}_t \triangleq \int_V \rho \bar{\mathbf{u}} dV, \quad (2.38)$$

e,

$$\bar{\mathbf{S}} \triangleq \int_V \rho \mathbf{S} dV. \quad (2.39)$$

Dessa forma, pode-se reescrever  $\mathbf{Q}_i^R$  da forma

$$\mathbf{Q}_i^R = \mathbf{m}_{RR} \ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{S}}_t \tilde{\tilde{\boldsymbol{\Omega}}} + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \bar{\mathbf{S}} \ddot{\mathbf{q}}_f - \mathbf{A}_{BI} \bar{\mathbf{Q}}_v^R, \quad (2.40)$$

em que  $\bar{\mathbf{Q}}_v^R$  é o vetor de forças de velocidade quadrática, que contém as forças de Coriolis e de efeito giroscópico, sendo ele dado por

$$\bar{\mathbf{Q}}_v^R = -\tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \bar{\mathbf{S}}_t - 2 \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{A}_{SB} \bar{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{q}}_f. \quad (2.41)$$

Na sequência, desenvolvendo  $\mathbf{Q}_i^\Theta$ , tem-se

$$\mathbf{Q}_i^\Theta = \int_V \rho \bar{\mathbf{G}}^T \tilde{\tilde{\mathbf{u}}} \mathbf{A}_{BI}^T (\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \tilde{\tilde{\mathbf{u}}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \bar{\boldsymbol{\Omega}} + 2 \mathbf{A}_{BI} \tilde{\tilde{\boldsymbol{\omega}}} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}_f) dV. \quad (2.42)$$

Analogamente ao caso do  $\mathbf{Q}_i^R$ , agrupando os termos de interesse e utilizando as definições previamente estabelecidas, tem-se

$$\mathbf{Q}_i^\Theta = \bar{\mathbf{G}}^T \tilde{\tilde{\mathbf{S}}}_t \mathbf{A}_{BI}^T \ddot{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta} \bar{\boldsymbol{\Omega}} + \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f} \ddot{\mathbf{q}}_f - \bar{\mathbf{G}}^T \bar{\mathbf{Q}}_v^\Omega, \quad (2.43)$$

em que:

$$\bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta} = \int_V \rho \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^T \tilde{\bar{\mathbf{u}}} dV, \quad (2.44)$$

$$\bar{\mathbf{I}}_{\Theta f} = \int_V \rho \tilde{\bar{\mathbf{u}}} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} dV, \quad (2.45)$$

e,

$$\bar{\mathbf{Q}}_v^\Omega = - \int_V \rho \tilde{\bar{\mathbf{u}}} \tilde{\bar{\omega}} (\tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + 2 \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f) dV. \quad (2.46)$$

Conforme demonstrado por Orzechowski, Matikainen e Mikkola (2017), o termo  $\bar{\mathbf{Q}}_v^\Omega$  pode ser manipulado e reescrito da forma

$$\bar{\mathbf{Q}}_v^\Omega = -\tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta} \bar{\omega} - \dot{\bar{\mathbf{I}}}_{\Theta\Theta} \bar{\omega} - \tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f} \dot{\mathbf{q}}_f. \quad (2.47)$$

Por fim, desenvolvendo o termo  $\mathbf{Q}_i^f$ , obtém-se

$$\mathbf{Q}_i^f = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{A}_{SB}^T \mathbf{A}_{BI}^T (\ddot{\mathbf{R}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\bar{\omega}} \tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{A}_{BI} \tilde{\bar{\mathbf{u}}}^T \bar{\Omega} + 2 \mathbf{A}_{BI} \tilde{\bar{\omega}} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f + \mathbf{A}_{BI} \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \ddot{\mathbf{q}}_f) dV. \quad (2.48)$$

Repetindo o processo como nos casos anteriores, tem-se que

$$\mathbf{Q}_i^f = \bar{\mathbf{S}}^T \mathbf{A}_{SB}^T \mathbf{A}_{BI}^T \ddot{\mathbf{R}} + \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f}^T \bar{\Omega} + \mathbf{m}_{ff} \ddot{\mathbf{q}}_f - \mathbf{Q}_v^f, \quad (2.49)$$

onde

$$\mathbf{m}_{ff} = \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{S} dV, \quad (2.50)$$

e,

$$\mathbf{Q}_v^f = - \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{A}_{SB}^T \tilde{\bar{\omega}} (\tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + 2 \mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f) dV. \quad (2.51)$$

### 2.3.2 Forças Externas Generalizadas

O trabalho virtual realizado pelas forças externas,  $\delta W_e$ , pode ser escrito da forma

$$\delta W_e = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{F}_e, \quad (2.52)$$

sendo  $\mathbf{F}_e$  a força externa resultante escrita no sistema inercial,  $SR_I$ . A natureza das forças externas,  $\mathbf{F}_e$ , será discutida, em detalhes, no capítulo referente à formulação aerodinâmica. Substituindo o termo  $\mathbf{r}^T$  na Equação (2.52), obtém-se

$$\delta W_e = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{R}^T & \delta \Theta^T & \delta \mathbf{q}_f^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} \\ \bar{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{A}_{BI}^T \\ \mathbf{S}^T \mathbf{A}_{SB}^T \mathbf{A}_{BI}^T \end{bmatrix} \mathbf{F}_e, \quad (2.53)$$

e, agrupando os termos, tem-se

$$\delta W_e = \underbrace{\delta \mathbf{R}^T \mathbf{F}_e}_{{\mathbf{Q}}_e^R} + \underbrace{\delta \Theta^T \bar{\mathbf{G}}^T \tilde{\mathbf{u}} \mathbf{A}_{BI}^T \mathbf{F}_e}_{{\mathbf{Q}}_e^\Theta} + \underbrace{\delta \mathbf{q}_f^T \mathbf{S}^T \mathbf{A}_{SB}^T \mathbf{A}_{BI}^T \mathbf{F}_e}_{{\mathbf{Q}}_e^f}, \quad (2.54)$$

em que  $\mathbf{Q}_e^R$ ,  $\mathbf{Q}_e^\Theta$  e  $\mathbf{Q}_e^f$  são as forças externas generalizadas de translação, de rotação e elásticas, respectivamente.

### 2.3.3 Forças Elásticas Generalizadas

Seja  $\bar{\mathbf{u}}_o = x_1 \mathbf{e}_1^S + x_2 \mathbf{e}_2^S + x_3 \mathbf{e}_3^S$  a posição de um ponto  $P$  qualquer em um corpo flexível,  $S$ , na configuração indeformada. Após uma deformação, o ponto  $P$  sofre um deslocamento  $\bar{\mathbf{u}}_f$ , que pode ser decomposto em componentes da forma

$$\bar{\mathbf{u}}_f = u_1^f \mathbf{e}_1^S + u_2^f \mathbf{e}_2^S + u_3^f \mathbf{e}_3^S. \quad (2.55)$$

Dessa forma, como mostrado por Shabana (2013), o tensor de deformações de Green-Lagrange,  $\varepsilon$ , referente ao ponto  $P$ , é dado por

$$\varepsilon = \frac{1}{2} (\mathbf{J}^T \mathbf{J} - \mathbf{I}), \quad (2.56)$$

em que  $\mathbf{J}$  é o tensor gradiente de deslocamentos, escrito da forma

$$\mathbf{J}_{ij} = \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \delta_{ij}, \quad (2.57)$$

e  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker, dado por

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}. \quad (2.58)$$

Pode-se então, desenvolvendo a Equação (2.56), obter

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k^f}{\partial x_i} \frac{\partial u_k^f}{\partial x_j} \right). \quad (2.59)$$

Assumindo pequenas deformações, os termos diferenciais de segunda ordem podem ser desprezados, simplificando o tensor de deformações da forma

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i^f}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j^f}{\partial x_i} \right). \quad (2.60)$$

Fazendo uso da simetria do tensor de deformações, pode-se trabalhar apenas com os 6 termos independentes organizados de forma vetorial, sendo 3 referentes às deformações normais e 3 às de cisalhamento, da forma  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}\}^T$ . Dessa forma, pode-se definir um operador diferencial  $\mathbf{D}$ , tal que

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \bar{\mathbf{u}}_f, \quad (2.61)$$

sendo  $\mathbf{D}$  definido da forma

$$\mathbf{D} \triangleq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 2\frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & 2\frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \end{bmatrix}. \quad (2.62)$$

Uma vez conhecido o tensor de deformações, é possível obter o tensor de tensões,  $\sigma$ , por meio de um modelo constitutivo do material (SHABANA, 2013). Considerando um material homogêneo, isotrópico e linear, o modelo constitutivo passa a depender de apenas dois parâmetros independentes, e essa relação se dá por meio da Lei de Hooke generalizada, da forma

$$\sigma = \bar{\mathbf{E}} \varepsilon, \quad (2.63)$$

em que  $\bar{\mathbf{E}}$  é o tensor constitutivo do material, dado por

$$\bar{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} \lambda_c + 2G_c & \lambda_c & \lambda_c & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_c & \lambda_c + 2G_c & \lambda_c & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_c & \lambda_c & \lambda_c + 2G_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2G_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2G_c \end{bmatrix}, \quad (2.64)$$

sendo  $G_c$  e  $\lambda_c$  os parâmetros de Lamé, os quais tem relações diretas com o módulo de elasticidade,  $E_c$ , e o coeficiente de Poisson,  $\nu$ . Tais relações são dadas por

$$G_c = \frac{E_c}{2(1 + \nu)}, \quad (2.65)$$

e,

$$\lambda_c = \frac{2\nu G_c}{1 - 2\nu}. \quad (2.66)$$

Segundo Shabana (2013), o trabalho virtual das forças elásticas,  $\delta W_s$ , pode ser escrito da forma

$$\delta W_s = - \int_V \sigma^T \delta \varepsilon \, dV. \quad (2.67)$$

Substituindo as relações das Equações (2.17), (2.61) e (2.63) na expressão de  $\delta W_s$ , obtém-se

$$\delta W_s = -\mathbf{q}_f^T \left[ \int_V (\mathbf{D}\mathbf{S})^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{D}\mathbf{S} \, dV \right] \delta \mathbf{q}_f. \quad (2.68)$$

Dessa forma, define-se a matriz de rigidez associada às coordenadas elásticas,  $\mathbf{K}_{ff}$ , da forma

$$\mathbf{K}_{ff} \triangleq \int_V (\mathbf{DS})^T \bar{\mathbf{E}} \mathbf{DS} dV. \quad (2.69)$$

As forças elásticas generalizadas,  $\mathbf{Q}_s^f$ , são, por definição, dadas por

$$\mathbf{Q}_s^{fT} \triangleq \frac{\partial(\delta W_s)}{\partial(\delta \mathbf{q}_f)}, \quad (2.70)$$

resultando em

$$\mathbf{Q}_s^f = -\mathbf{q}_f^T \mathbf{K}_{ff}. \quad (2.71)$$

Como comenta Shabana (2013), a matriz  $\mathbf{K}_{ff}$  é simétrica e positiva definida, o que permite escrever a transposta da Equação (2.71) da forma

$$\mathbf{Q}_s^f = -\mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f. \quad (2.72)$$

Ainda, segundo Schiavo, Ferretti e Vigano (2005), é usual se adicionar forças dissipativas, ou de amortecimento, de forma a representar melhor uma estrutura real. Pela própria natureza dessas forças, tem-se, em geral, magnitudes diretamente proporcionais à velocidade. No caso das coordenadas elásticas, pode-se escrever

$$\mathbf{Q}_s^f = -\mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f - \mathbf{D}_{ff} \dot{\mathbf{q}}_f, \quad (2.73)$$

em que  $\mathbf{D}_{ff}$  é a matriz de amortecimento. Rao (2018) aborda as equações do movimento para um sistema com  $n$  graus de liberdade na forma canônica, em que o amortecimento depende da razão de amortecimento,  $\zeta$ , e das frequências naturais,  $\omega_n$ . Conforme mostra Speck (2004), a matriz de amortecimento é diagonal, montada da forma  $\mathbf{D}_{ff} = \text{diag}(\mathbf{d}_{ff})$ , em que

$$\mathbf{d}_{ff}^{(i)} = 2\zeta \sqrt{m_{ff}^{(i,i)} K_{ff}^{(i,i)}}, \quad (2.74)$$

em que  $(i, i)$  representa o elemento da  $i$ -ésima linha e  $i$ -ésima coluna da matriz, e o parâmetro  $\zeta$  pode ser estimado conhecendo a resposta oscilatória do sistema.

### 2.3.4 Sistema de Equações na Forma Matricial

Na sequência, retomando o PTV, dado pela Equação (2.24), pode-se concluir que, para satisfazê-lo, é necessário e suficiente que:

$$\begin{cases} \mathbf{Q}_i^R = \mathbf{Q}_e^R \\ \mathbf{Q}_i^\Theta = \mathbf{Q}_e^\Theta \\ \mathbf{Q}_i^f = \mathbf{Q}_e^f + \mathbf{Q}_s^f \end{cases} . \quad (2.75)$$

Para escrever o conjunto de Equações (2.75), na forma matricial, convém, multiplicar a primeira equação por  $\mathbf{A}_{BI}^T$  e a segunda por  $\bar{\mathbf{G}}^{T-1}$ , ambas à esquerda. Dessa forma, obtém-se

$$\mathbf{M}^S \hat{\mathbf{q}}^S = \hat{\mathbf{Q}}_v^S + \hat{\mathbf{Q}}_s^S + \hat{\mathbf{Q}}_e^S, \quad (2.76)$$

sendo a matriz de massa generalizada,  $\mathbf{M}^S$ , dada por

$$\mathbf{M}^S \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{m}_{RR} & \tilde{\bar{\mathbf{S}}}_t^T & \bar{\mathbf{S}} \\ \tilde{\bar{\mathbf{S}}}_t & \bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta} & \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f} \\ \bar{\mathbf{S}}^T & \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f}^T & \mathbf{m}_{ff} \end{bmatrix}, \quad (2.77)$$

o vetor de acelerações generalizadas,  $\hat{\mathbf{q}}^S$ , definido da forma

$$\hat{\mathbf{q}}^S \triangleq \begin{bmatrix} \ddot{\bar{\mathbf{R}}} \\ \bar{\boldsymbol{\Omega}} \\ \ddot{\mathbf{q}}_f \end{bmatrix}, \quad (2.78)$$

o vetor de forças de velocidade quadrática,  $\hat{\mathbf{Q}}_v^S$ , dado por

$$\hat{\mathbf{Q}}_v^S \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{Q}}_v^R \\ \bar{\mathbf{Q}}_v^\Omega \\ \mathbf{Q}_v^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\bar{\omega}} \tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{S}}_t - 2\tilde{\bar{\omega}} \mathbf{A}_{SB} \bar{\mathbf{S}} \dot{\mathbf{q}}_f \\ -\tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{I}}_{\Theta\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} - \dot{\bar{\mathbf{I}}}_{\Theta\Theta} \bar{\boldsymbol{\omega}} - \tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{I}}_{\Theta f} \dot{\mathbf{q}}_f \\ - \int_V \rho \mathbf{S}^T \mathbf{A}_{SB}^T \tilde{\bar{\omega}} (\tilde{\bar{\omega}} \bar{\mathbf{u}} + 2\mathbf{A}_{SB} \mathbf{S} \dot{\mathbf{q}}_f) dV \end{bmatrix}, \quad (2.79)$$

o vetor de forças elásticas generalizadas,  $\hat{\mathbf{Q}}_s^S$ , escrito da forma

$$\hat{\mathbf{Q}}_s^S \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_s^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{K}_{ff} \mathbf{q}_f - \mathbf{D}_{ff} \dot{\mathbf{q}}_f \end{bmatrix}, \quad (2.80)$$

e, o vetor de forças externas generalizadas,  $\hat{\mathbf{Q}}_e^S$ , dado por

$$\hat{\mathbf{Q}}_e^S \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_e^R \\ \mathbf{Q}_e^\Omega \\ \mathbf{Q}_e^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_a + \bar{\mathbf{F}}_p + m\bar{\mathbf{g}} \\ \tilde{\bar{\mathbf{u}}}(\bar{\mathbf{F}}_a + \bar{\mathbf{F}}_p + m\bar{\mathbf{g}}) + \bar{\tau}_a + \bar{\tau}_p \\ \mathbf{S}^T(\bar{\bar{\mathbf{F}}}_a + \bar{\bar{\mathbf{F}}}_p) + \frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial x_1} \mathbf{\Pi}_{23}(\bar{\bar{\tau}}_a + \bar{\bar{\tau}}_p) \end{bmatrix}, \quad (2.81)$$

sendo que, para facilitar a integração da dinâmica com as forças aerodinâmicas, decidiu-se por:

- Desmembrar as forças externas,  $\bar{\mathbf{F}}_e$ , em forças aerodinâmicas,  $\bar{\mathbf{F}}_a$ , forças propulsivas,  $\bar{\mathbf{F}}_p$ , e força peso,  $m\bar{\mathbf{g}}$ ;
- Desmembrar as forças de rotação generalizadas,  $\bar{\mathbf{Q}}_e^\Omega$ , em cinco termos, sendo:  $\tilde{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathbf{F}}_a$ , os momentos causados pelas forças aerodinâmicas resultantes sobre o eixo elástico;  $\bar{\tau}_a$ , os momentos aerodinâmicos concentrados em torno do eixo elástico;  $\tilde{\bar{\mathbf{u}}} \bar{\mathbf{F}}_p$ , os momentos causados pelas forças propulsivas resultantes sobre o eixo elástico;  $\bar{\tau}_p$ , os momentos propulsivos concentrados em torno do eixo elástico; e,  $\tilde{\bar{\mathbf{u}}}(m\bar{\mathbf{g}})$ , os momentos causados pela força gravitacional;
- Desmembrar as forças elásticas generalizadas,  $\mathbf{Q}_e^f$ , em quatro termos, sendo:  $\mathbf{S}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}_a$ , os esforços aerodinâmicos responsáveis por excitar os modos de flexão da estrutura;  $\mathbf{S}^T \bar{\bar{\mathbf{F}}}_p$ , os esforços propulsivos responsáveis por excitar os modos de flexão da estrutura;  $\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial x_1} \mathbf{\Pi}_{23} \bar{\bar{\tau}}_a$ , os esforços aerodinâmicos responsáveis por excitar os modos de torção; e,  $\frac{\partial \mathbf{S}^T}{\partial x_1} \mathbf{\Pi}_{23} \bar{\bar{\tau}}_p$ , os esforços propulsivos responsáveis por excitar os modos de torção, em que  $\mathbf{\Pi}_{23}$  é uma matriz de permutação definida da forma

$$\mathbf{\Pi}_{23} \triangleq \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad (2.82)$$

a qual é responsável por garantir a consistência dos deslocamentos  $x_2$  e  $x_3$  causados pelas componentes 2 e 3 dos torques  $\bar{\bar{\tau}}_a$  e  $\bar{\bar{\tau}}_p$ .

Neste trabalho, optou-se por realizar os estudos numéricos utilizando um planador. Portanto, nenhum modelo propulsivo será apresentado, e  $\bar{\mathbf{F}}_p = 0$  será assumido.

## 2.4 DINÂMICA DE MULTICORPOS

Um sistema de multicorpos é composto por dois ou mais corpos, podendo ser eles rígidos ou flexíveis. Por conveniência, costuma-se adotar um sistema de referência local,  $SR_S$ , para cada corpo, de modo a facilitar a definição dos limites de integração das integrais de volume, facilitando a obtenção das suas integrais de forma.

Para unificar a dinâmica de  $N_b$  corpos, pode-se concatenar as dinâmicas individuais por blocos, sendo a matriz de massa total,  $\mathbf{M}$ , dada por

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}^1 & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^2 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{M}^{N_b} \end{bmatrix}. \quad (2.83)$$

O vetor de acelerações total,  $\hat{\mathbf{q}}$ , pode ser escrito da forma

$$\hat{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}^1 \\ \hat{\mathbf{q}}^2 \\ \vdots \\ \hat{\mathbf{q}}^{N_b} \end{bmatrix}, \quad (2.84)$$

e o mesmo é válido para os vetores de forças generalizadas,  $\hat{\mathbf{Q}}_v$ ,  $\hat{\mathbf{Q}}_s$  e  $\hat{\mathbf{Q}}_e$ .

Em geral, os corpos possuem vínculos entre si, o que acopla a dinâmica de um corpo do sistema com os demais. Tais vínculos, são escritos como um vetor de funções não lineares,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0$ , todas linearmente independentes. Se os vínculos forem holônomos, composto apenas por funções diferenciáveis e com derivadas primeiras contínuas, tem-se que

$$|\mathbf{C}_q| \neq 0, \quad (2.85)$$

em que  $\mathbf{C}_q \triangleq \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \mathbf{q}_j}$  é a matriz Jacobiana dos vínculos.

Para escrever as forças de reação generalizadas atuantes no sistema, pode-se utilizar os princípios de cálculo variacional. Seja  $J$  um funcional dado por

$$J = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt, \quad (2.86)$$

em que  $\mathcal{L}$  corresponde à função Lagrangiana do movimento do sistema entre os pontos 1 e 2, entre os instantes de tempo  $t_1$  e  $t_2$ . O Princípio de Hamilton, ou da mínima

ação, garante que o movimento do sistema transcorra pelo caminho que extrema o funcional  $J$ , isto é, o caminho para o qual

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt = 0, \quad (2.87)$$

o que resulta em

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} \right)^T \delta \mathbf{q} + \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \delta \dot{\mathbf{q}} \right] dt = 0. \quad (2.88)$$

Utilizando a regra de integração por partes, pode-se mostrar que

$$\delta J = \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \delta \mathbf{q} \right]_{t_1}^{t_2} + \int_{t_1}^{t_2} \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \delta \mathbf{q} \right] dt = 0, \quad (2.89)$$

e, sendo  $\delta \mathbf{q}$  uma função contínua entre  $t_1$  e  $t_2$ , necessariamente, tem-se que

$$\frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = 0, \quad (2.90)$$

e,

$$\left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \delta \mathbf{q} \right]_{t=t_2} - \left[ \left( \frac{\partial \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T \delta \mathbf{q} \right]_{t=t_1} = 0, \quad (2.91)$$

em que as Equações (2.90) são as Equações de Euler-Lagrange e, as Equações (2.91), as condições de contorno ou de transversalidade.

Se o movimento do sistema estiver sob a restrição de um conjunto de vínculos  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = 0$ , o teorema de Lagrange garante que existe um único conjunto  $\boldsymbol{\lambda}$ , variante no tempo, tal que o problema de minimização do funcional aumentado,  $J^*$ , da forma

$$\delta J^* = \delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, t) \boldsymbol{\lambda}(t) dt = 0, \quad (2.92)$$

descreve a dinâmica do problema (BREZHNEVA; TRET'YAKOV; WRIGHT, 2011). Neste caso,  $\boldsymbol{\lambda}$  é o conjunto de multiplicadores de Lagrange.

Seja  $\mathcal{L}^*$  a função Lagrangiana modificada, dada por

$$\mathcal{L}^* \triangleq \mathcal{L}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) + \mathbf{C}^T(\mathbf{q}, t) \boldsymbol{\lambda}(t), \quad (2.93)$$

resolve-se o problema com vínculos aplicando as Equações de Euler-Lagrange, da forma

$$\frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}^*}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = \mathbf{0}, \quad (2.94)$$

obtendo-se

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} - \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right) = -\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.95)$$

Dessa forma, pode-se perceber que o movimento do sistema sob a ação de um conjunto de vínculos é equivalente a um movimento irrestrito sob a ação de forças de reação generalizadas,  $\mathbf{Q}_c$ , definidas da forma

$$\mathbf{Q}_c \triangleq -\mathbf{C}_{\mathbf{q}}^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.96)$$

Entretanto, para que a dinâmica completa possa ser integrada, é preciso encontrar um conjunto de equações adicionais, visto que os multiplicadores de Lagrange são variáveis extras a serem determinadas. Neste trabalho, as restrições utilizadas possuem a única função de manter os multicorpos flexíveis rigidamente conectados ao primeiro corpo, definido como sendo a fuselagem. As restrições, portanto, são dadas da forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \begin{bmatrix} \mathbf{R}^1 - \mathbf{R}^2 \\ \boldsymbol{\Theta}^1 - \boldsymbol{\Theta}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{R}^1 - \mathbf{R}^{N_b} \\ \boldsymbol{\Theta}^1 - \boldsymbol{\Theta}^{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Assim, derivando a expressão,  $\mathbf{C}(\mathbf{q}, t) = \mathbf{0}$ , e multiplicando à esquerda as equações referentes a  $\dot{\boldsymbol{\Theta}}$  por  $\bar{\mathbf{G}}$ , tem-se que

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}}^1 - \dot{\mathbf{R}}^2 \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}^1 - \bar{\boldsymbol{\omega}}^2 \\ \vdots \\ \dot{\mathbf{R}}^1 - \dot{\mathbf{R}}^{N_b} \\ \bar{\boldsymbol{\omega}}^1 - \bar{\boldsymbol{\omega}}^{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.98)$$

Derivando-a novamente em relação ao tempo, e multiplicando à esquerda as equações referentes a  $\ddot{\mathbf{R}}$  por  $\mathbf{A}_{BI}^T$ , obtém-se

$$\begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{R}}^1 - \ddot{\mathbf{R}}^2 \\ \ddot{\mathbf{\Omega}}^1 - \ddot{\mathbf{\Omega}}^2 \\ \vdots \\ \ddot{\mathbf{R}}^{N_b} - \ddot{\mathbf{R}}^1 \\ \ddot{\mathbf{\Omega}}^1 - \ddot{\mathbf{\Omega}}^{N_b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_q \hat{\mathbf{q}}. \quad (2.99)$$

Finalmente, combinando as Equações (2.76) e (2.99), pode-se escrever o sistema completo de equações para a dinâmica de multicorpos da forma

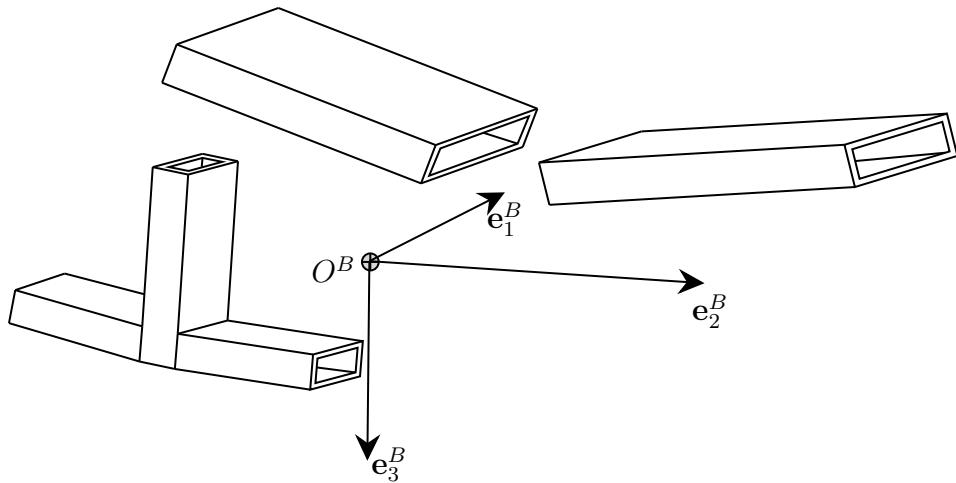
$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{C}_q^T \\ \mathbf{C}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{q}} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{Q}}_v + \hat{\mathbf{Q}}_s + \hat{\mathbf{Q}}_e \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (2.100)$$

### 3 MODELAGEM ESTRUTURAL

Conforme visto no capítulo anterior, a interface do modelo estrutural com a dinâmica ocorre por meio da matriz de forma,  $S$ , a qual contém as funções de forma,  $\Phi$ , que interpolam os deslocamentos elásticos do corpo.

Para definir as funções de forma a serem utilizadas, é preciso, primeiro, conhecer a natureza dos deslocamentos elásticos e as condições de contorno do problema. No caso de aeronaves com configuração tradicional, em que cada superfície aerodinâmica é fixa diretamente na fuselagem, é usual a sua idealização por vigas engastadas equivalentes. Ainda, neste trabalho, a fuselagem é idealizada como um corpo rígido, em cuja estrutura, todas as superfícies aerodinâmicas estão engastadas, conforme ilustrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Idealização estrutural dos corpos flexíveis.



Fonte: Autor.

A interpolação dos deslocamentos pode ser feita por diversos métodos, entre eles o método de Rayleigh-Ritz. Embora o método seja bastante simples, a sua validade é fortemente dependente do conhecimento, a priori, de funções de base globais para a representação dos deslocamentos da estrutura. Visando obter expressões analíticas fechadas para que a ferramenta seja de baixo custo computacional, decidiu-se por utilizar o método de Rayleigh-Ritz, tomando como base de funções as próprias formas modais analíticas, apresentadas por Rao (2018), para vigas engastadas contínuas, sendo os modos de flexão,  $\Phi_i^f$ , são dados da forma

$$\Phi_i^f = \cosh(\vartheta_i^f \xi) - \cos(\vartheta_i^f \xi) - \varsigma_i (\sinh(\vartheta_i^f \xi) - \sin(\vartheta_i^f \xi)), \quad (3.1)$$

em que  $\xi$  é o comprimento adimensional da viga, variando entre 0 e 1,  $\vartheta_i^f$  é a  $i$ -ésima raiz real positiva da equação

$$\cos(\vartheta_i^f) \cosh(\vartheta_i^f) + 1 = 0, \quad (3.2)$$

e,

$$\varsigma_i = \frac{\sinh(\vartheta_i^f) - \sin(\vartheta_i^f)}{\cosh(\vartheta_i^f) + \cos(\vartheta_i^f)}. \quad (3.3)$$

Segundo Rao (2018), as frequências naturais correspondentes a cada modo de flexão,  $f_i^f$ , em Hertz, são dadas por

$$f_i^f = \frac{(\vartheta_i^f)^2}{2\pi} \sqrt{\frac{E_c I_v}{\rho A_v l_v^4}}, \quad (3.4)$$

em que:  $I_v$  é o momento de inércia de área referente ao eixo de flexão;  $A_v$ , a área da seção transversal; e,  $l_v$ , o comprimento da viga. Dessa forma, conhecendo as frequências naturais de flexão da asa da aeronave, pode-se estimar a rigidez à flexão,  $E_c I_v$  da mesma. Os modos de torção,  $\Phi_i^t$ , por sua vez, são dados pela expressão

$$\Phi_i^t = \sqrt{2} \sin \left( \pi \left[ i - \frac{1}{2} \right] \xi \right), \quad (3.5)$$

sendo as frequências naturais de torção,  $f_i^t$ , em Hertz, dadas por

$$f_i^t = \frac{\vartheta_i^t}{2\pi l_v} \sqrt{\frac{T_c G_c}{\rho I_p}}, \quad (3.6)$$

em que:  $T_c$  é a constante torcional referente à seção transversal (BLEVINS, 1979);  $I_p$ , o momento de inércia polar de área; e,  $\vartheta_i^t$  é dado por

$$\vartheta_i^t = \left( i - \frac{1}{2} \right) \pi. \quad (3.7)$$

Analogamente ao caso da flexão, a rigidez torcional da viga,  $G_c I_p$ , pode ser estimada conhecendo as frequências naturais da superfície aerodinâmica a ser modelada. Uma vez conhecidos esses parâmetros, pode-se gerar uma base de funções ortonormais do tamanho desejado, cabendo ao projetista escolher os modos mais adequados dependendo do tempo disponível e da rigorosidade da análise. Todavia, como se sabe que os modos de baixa frequência são os que mais interferem na di-

nâmica de voo - por possuírem frequências naturais próximas aos modos de corpo rígido, e que os modos de alta frequência podem tornar a integração numérica muito lenta - por requererem passos de tempo muito pequenos para resolver movimentos em alta frequência, decidiu-se por utilizar apenas os dois primeiros modos de flexão e torção, os quais estão traçados na Figura 3.2.

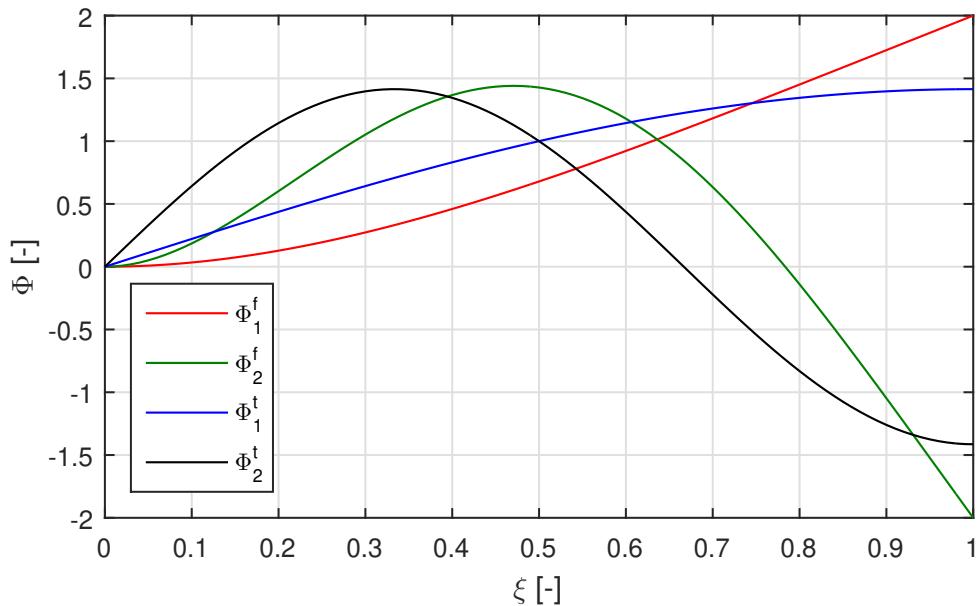


Figura 3.2 – Formas modais utilizadas para o modelo de viga.

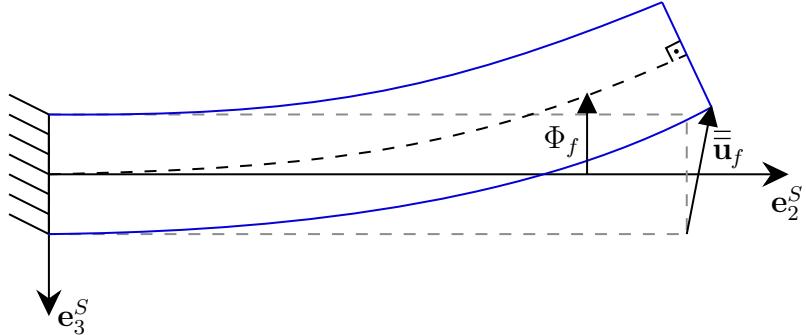
Uma vez que se deseja modelar uma aeronave sem motores fixos na asa, considerou-se que os deslocamentos por flexão no plano  $e_1^S e_2^S$  são insignificantes quando comparados aos do plano  $e_2^S e_3^S$ . Por conta disso, tem-se apenas quatro graus de liberdade flexíveis para cada corpo.

Agora, para montar a matriz de forma,  $S$ , é necessário apenas descrever a cinemática dos deslocamentos elásticos do corpo. No caso da flexão, utilizou-se as hipóteses cinemáticas do modelo de viga de Euler-Bernoulli, válida apenas para pequenas rotações, supondo que todas as seções transversais da viga permanecem planas, indeformadas e perpendiculares à linha elástica, conforme ilustrado na Figura 3.3.

Como as rotações medidas tangentes à linha elástica são, por hipótese, pequenas, tem-se que

$$\frac{d\Phi_i^f}{dx_2} \approx \chi, \quad (3.8)$$

Figura 3.3 – Hipótese cinemática da viga de Euler-Bernoulli sob flexão.



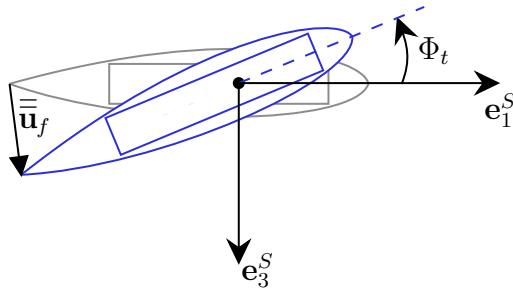
Fonte: Autor.

e, portanto,

$$\begin{cases} \sin(\chi) \approx \chi \\ \cos(\chi) \approx 1 \end{cases} . \quad (3.9)$$

Analogamente, para a torção, adotou-se as hipóteses cinemáticas do modelo de viga de Saint-Venant, considerando pequenas rotações e que as seções transversais permanecem planas, paralelas e indeformadas, conforme ilustrado na Figura 3.4.

Figura 3.4 – Hipótese cinemática da viga de Saint-Venant sob torção.



Fonte: Autor.

Vale ressaltar que as funções de forma de torção descrevem o próprio ângulo de torção ao longo da viga, então, utilizando a aproximação para ângulos pequenos, tem-se que

$$\begin{cases} \tan(\Phi_i^t) \approx \Phi_i^t \\ \sin(\Phi_i^t) \approx \Phi_i^t \\ \cos(\Phi_i^t) \approx 1 \end{cases} . \quad (3.10)$$

Adotando que as funções  $\Phi^f$  são positivas no sentido de  $e_3^S$ , e que as funções  $\Phi^t$  são positivas no sentido de rotação em torno de  $e_2^S$ , pode-se, a partir das Figuras

3.3 e 3.4, montar a matriz  $\mathbf{S}$  da forma

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3\Phi_1^t & x_3\Phi_2^t \\ -x_3\frac{d\Phi_1^f}{dx_2} & -x_3\frac{d\Phi_2^f}{dx_2} & 0 & 0 \\ \Phi_1^f & \Phi_2^f & -x_1\Phi_1^t & -x_1\Phi_2^t \end{bmatrix}, \quad (3.11)$$

de tal maneira que a relação

$$\bar{\bar{\mathbf{u}}}_f = \begin{bmatrix} u_1^f \\ u_2^f \\ u_3^f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & x_3\Phi_1^t & x_3\Phi_2^t \\ -x_3\frac{d\Phi_1^f}{dx_2} & -x_3\frac{d\Phi_2^f}{dx_2} & 0 & 0 \\ \Phi_1^f & \Phi_2^f & -x_1\Phi_1^t & -x_1\Phi_2^t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_1^f \\ q_2^f \\ q_1^t \\ q_2^t \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

seja satisfeita.

## 4 MODELAGEM AERODINÂMICA

Neste capítulo, complementa-se a formulação dinâmica, modelando as forças aerodinâmicas atuantes na aeronave. Visto que o modelo estrutural utilizado já é restrito a pequenos deslocamentos, não há grande perda de generalidade em utilizar um modelo de aerodinâmica linear. Dessa forma, o modelo aerodinâmico escolhido é uma extensão da teoria das faixas modificada, *Modified Strip Theory* (MST), semelhante à utilizada por Pogorzelski (2010). A teoria considera efeitos não estacionários, e é estendida para superfícies sustentadoras com enflechamento, incidência, diedro, arqueamento, e contabiliza a contribuição dos movimentos de corpo rígido e flexível.

Por ser um método que permite a obtenção de derivadas de estabilidade e controle, acaba possuindo custo computacional reduzido quando comparado a outras técnicas, como observado por Kier (2005). Entretanto, vale ressaltar que, como o escoamento é considerado invíscido e, também não se considera a influência da fuselagem, as forças de arrasto são subestimadas. Dessa forma, quando há dados disponíveis, é conveniente utilizar uma correção adicional para a força de arrasto, por meio de uma polar de arrasto, conforme sugerido por Pogorzelski (2010).

### 4.1 TEORIA DAS FAIXAS MODIFICADA

A teoria das faixas foi introduzida por Theodorsen (1935), apresentando as analíticas para o cálculo da sustentação e do momento de arfagem em uma seção típica de 3 graus de liberdade. A modelagem é embasada na teoria de escoamentos potenciais subsônicos (invíscidos, incompressíveis e irrotacionais), cujas soluções são obtidas pela superposição de soluções elementares da Equação de Laplace.

Para aplicar esse método a uma asa, é preciso discretizá-la em faixas, e, à cada faixa, associa-se uma seção típica bidimensional. Por se tratar de escoamentos idealmente bidimensionais, nenhum efeito de ponta de asa ou interferência entre as faixas é considerado. Ainda, a esteira é modelada por um filamento de vórtices reto e alinhado com a direção do escoamento livre.

A influência da esteira se manifesta na forma de um atraso aerodinâmico, representado pela função de deficiência de sustentação de Theodorsen,  $C(k)$ , dada por

$$C(k) = \frac{H_1^2(k)}{H_1^2(k) + iH_0^2(k)}, \quad (4.1)$$

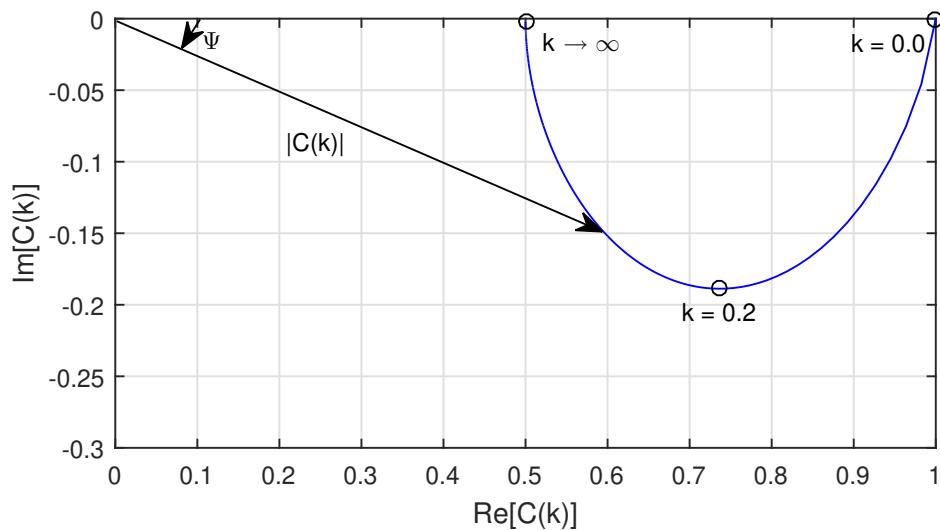
onde  $H_n^2$  são funções de Hankel do tipo 2 e ordem  $n$ , definidas em termos de funções

de Bessel,  $i = \sqrt{-1}$  e  $k$  é a frequência reduzida, dada por

$$k = \frac{\omega b}{V_n}, \quad (4.2)$$

sendo:  $\omega$ , a frequência angular do movimento;  $b$ , metade da corda da seção típica;  $e$ ,  $V_n$ , a magnitude da componente de velocidade do escoamento no plano da seção típica. Ao traçar a função  $C(k)$  no plano complexo, para diferentes valores de  $k$ , fica evidente o atraso de fase,  $\Psi$ , bem como a atenuação, em módulo,  $|C(k)|$ , inseridos na sustentação, conforme a Figura 4.1.

Figura 4.1 – Função de deficiência de sustentação de Theodorsen no plano complexo.



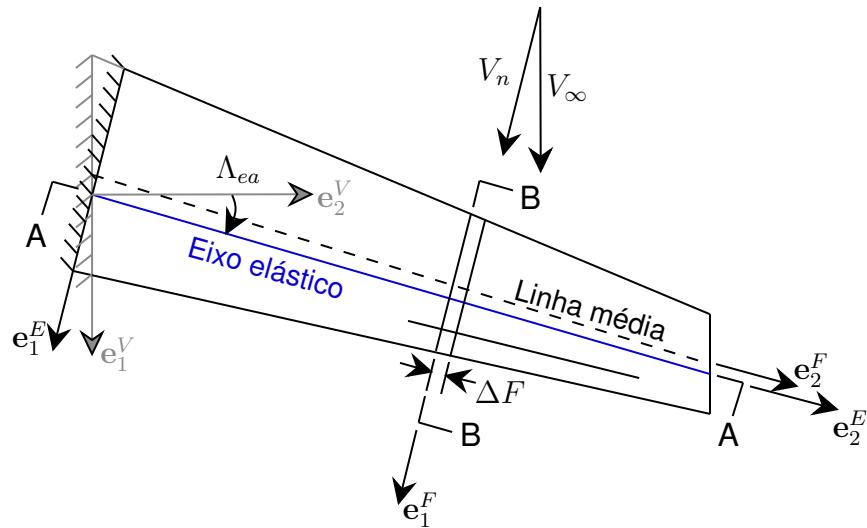
Fonte: Autor.

A abordagem da seção típica adota, estrategicamente, o eixo elástico como referência, visando o desacoplamento entre os graus de liberdade de torção e flexão. Devido às limitações da teoria apresentada por Theodorsen (1935), algumas correções foram propostas por Barmby, Cunningham e Garrick (1951), generalizando para o caso de asas enflechadas e com diedro. Segundo eles, se a asa for rígida o suficiente na região próxima à raiz, é razoável adotar uma raiz equivalente da asa, dada perpendicular ao eixo elástico, conforme a Figura 4.2.

Na seção de corte A-A da Figura 4.2, ilustrada na Figura 4.3, pode-se ver o ângulo de diedro efetivo da faixa,  $\tan^{-1} \sigma$ , o qual pode ser induzido tanto pelos movimentos de corpo rígido, quanto pela flexão da asa.

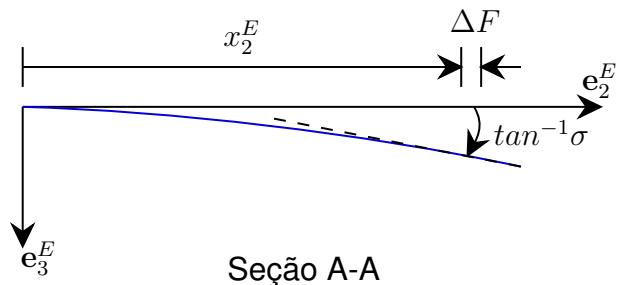
Na seção de corte B-B da Figura 4.2, ilustrada na Figura 4.4, tem-se a seção típica de três graus de liberdade associada à faixa indicada. O sistema de referência da faixa,  $SR_F$ , é definido com origem coincidente com a linha média da asa, e neste caso, ainda sem considerar a existência de contribuições dos movimentos de corpo

Figura 4.2 – Esquema de asa enflechada com raiz equivalente.



Fonte: Adaptada de Barmby, Cunningham e Garrick (1951).

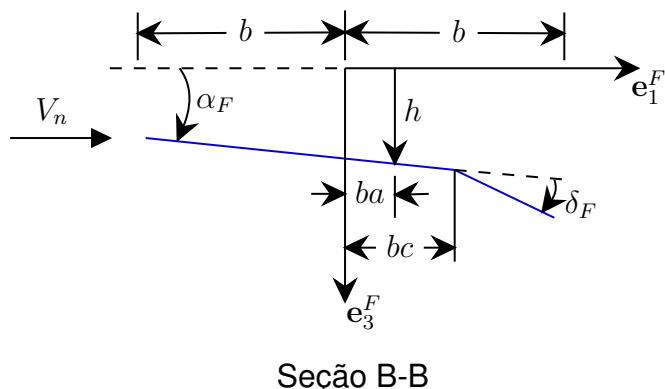
Figura 4.3 – Seção de corte A-A.



Fonte: Adaptada de Barmby, Cunningham e Garrick (1951).

rígido,  $e_1^F$  aponta no mesmo sentido do escoamento livre, conforme ilustrado na Figura 4.4.

Figura 4.4 – Seção de corte B-B: seção típica com três graus de liberdade.



Fonte: Adaptada de Theodorsen (1935).

Dessa forma, tem-se que:  $ba$  é a distância do eixo elástico;  $bc$ , a distância da articulação da superfície de controle;  $h$ , a posição instantânea da faixa;  $\alpha_F$ , o ângulo de ataque instantâneo da faixa;  $e$ ,  $\delta_F$ , o ângulo de deflexão da superfície de controle.

Como hipótese para a obtenção das expressões analíticas para a seção típica, supõe-se que os movimentos são harmônicos e de pequena amplitude para todos os graus de liberdade, escrevendo-os da forma

$$\begin{cases} \alpha_F = \Delta\alpha_F e^{i\omega t} \\ h = \Delta h e^{i\omega t} \\ \delta_F = \Delta\delta_F e^{i\omega t} \end{cases} . \quad (4.3)$$

Seja,  $x_3^E = F(x_1^E, x_2^E, t)$ , a função que descreve a superfície da asa, pode-se, para pequenas perturbações, escrever a distribuição de velocidades normal à superfície,  $w$ , aplicando a condição de contorno de não penetrabilidade, da forma

$$w(x_1^E, x_2^E, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial F}{\partial x_1^V}, \quad (4.4)$$

Utilizando a diferenciação pela regra da cadeia, pode-se reescrevê-la da forma

$$w(x_1^E, x_2^E, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + V_\infty \left( \frac{\partial F}{\partial x_1^E} \frac{\partial x_1^E}{\partial x_1^V} + \frac{\partial F}{\partial x_2^E} \frac{\partial x_2^E}{\partial x_1^V} \right), \quad (4.5)$$

obtendo-se, portanto,

$$w(x_1^E, x_2^E, t) = \frac{\partial F}{\partial t} + V_\infty \frac{\partial F}{\partial x_1^E} \cos \Lambda_{ea} + V_\infty \frac{\partial F}{\partial x_2^E} \sin \Lambda_{ea}. \quad (4.6)$$

Utilizando como base a Figura 4.4, pode-se descrever a superfície como

$$F = h + x_1^E \alpha_F, \quad (4.7)$$

obtendo-se, portanto,

$$w = \dot{h} + x_1^E \dot{\alpha}_F + V_\infty \alpha_F \cos \Lambda_{ea} + V_\infty (\sigma + x_1^E \tau) \sin \Lambda_{ea}, \quad (4.8)$$

em que

$$\sigma = \frac{\partial h}{\partial x_2^E}, \quad (4.9)$$

e,

$$\tau = \frac{\partial \alpha_F}{\partial x_2^E}. \quad (4.10)$$

As inclinações  $\sigma$  e  $\tau$  são comumente denominadas na literatura como as inclinações locais da flexão e da torção do eixo elástico, respectivamente. Todavia, do ponto de vista de uma faixa, elas também podem ser vistas como as inclinações do diedro e do ângulo de ataque.

Utilizando as generalizações propostas por Yates (1958), para o caso de perfis aerodinâmicos arqueados e com centro aerodinâmico posicionado em  $ba_{cn}$ , pode-se escrever o *downwash* no centro aerodinâmico,  $Q_w$ , da forma

$$Q_w = \dot{h} + V_n \alpha_F + V_n \sigma \tan \Lambda_{ea} + b \left( \frac{C_{l\alpha n}}{2\pi} + a_{cn} - a \right) (\dot{\alpha}_F + V_n \tau \tan \Lambda_{ea}) + \frac{V_n \delta_F}{\pi} T_{10} + \frac{b \dot{\delta}_F}{2\pi} T_{11}, \quad (4.11)$$

em que:  $T_n$  são as integrais de Theodorsen, e podem ser consultadas em Theodorsen (1935);  $V_n$ , a velocidade normal ao bordo de ataque da faixa, dada por

$$V_n = V_\infty \cos \Lambda_{ea}; \quad (4.12)$$

e,  $C_{l\alpha n}$ , a inclinação da curva do coeficiente de sustentação pelo ângulo de ataque, referentes à seção normal ao eixo elástico, dada da forma

$$C_{l\alpha n} = \frac{C_{l\alpha}}{\cos \Lambda_{ea}}. \quad (4.13)$$

Adicionando a contribuição do momento de arfagem do aerofólio, para  $\alpha_F = 0$ , às equações apresentadas por Bisplinghoff, Ashley e L.Halfman (1983), obtém-se a força,  $P_F$ , e o momento,  $M_F$ , resultantes sobre o eixo elástico da seção típica, dados por

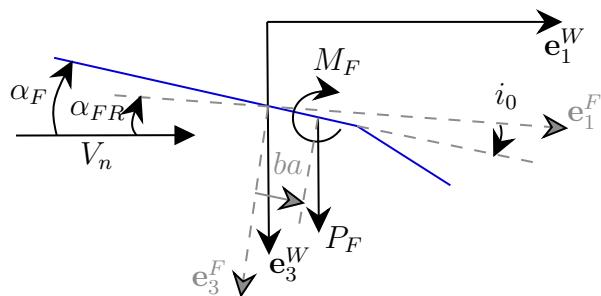
$$P_F = -\pi \rho_a b^2 [\ddot{h} + V_n \dot{\alpha}_F + V_n \dot{\sigma} \Lambda_{ea} - ba(\ddot{\alpha}_F + V_n \dot{\tau} \tan \Lambda_{ea})] - C_{l\alpha n} \rho_a V_n b C(k) Q_w + \rho_a b^2 V_n \dot{\delta}_F T_4 + \rho_a b^3 \ddot{\delta}_F T_1, \quad (4.14)$$

e,

$$\begin{aligned}
 M_F = & 2\rho_a V_n^2 b^2 C_{m0} - \pi \rho_a b^4 \left( \frac{1}{8} + a^2 \right) (\ddot{\alpha}_F + V_n \dot{\tau} \tan \Lambda_{ea}) + \pi \rho_a b^2 V_n (\dot{h} + V_n \sigma \tan \Lambda_{ea}) \\
 & + \pi \rho_a b^3 a (\ddot{h} + V_n \dot{\sigma} \tan \Lambda_{ea}) + \pi \rho_a b^2 V_n^2 (\alpha_F - ab\tau \tan \Lambda_{ea}) \\
 & - 2\pi \rho_a b^2 V_n \left[ \frac{1}{2} - (a - a_{cn}) C(k) \frac{C_{l\alpha n}}{2\pi} \right] Q_w - \rho_a b^2 V_n^2 \delta_F T_4 \\
 & - \rho_a b^3 V_n \dot{\delta}_F (T_1 - T_8 - (c - a)T_4) - \rho_a b^4 \ddot{\delta}_F (-T_7 - (c - a)T_1),
 \end{aligned} \tag{4.15}$$

sendo:  $C_{m0}$ , o coeficiente de momento de arfagem para sustentação nula do perfil representado pela seção típica;  $e$ ,  $\rho_a$ , a massa específica do ar. A força,  $P_F$ , e o momento,  $M_F$ , são dadas nas direções  $e_3^W$  e  $e_2^W$ , respectivamente, referentes ao sistema de referência aerodinâmico da faixa,  $SR_W$ , conforme ilustrado na Figura 4.5.

Figura 4.5 – Sistema aerodinâmico da faixa,  $SR_W$ .



Fonte: Autor.

## 4.2 INFLUÊNCIA DOS MOVIMENTOS DE CORPO RÍGIDO E FLEXÍVEL

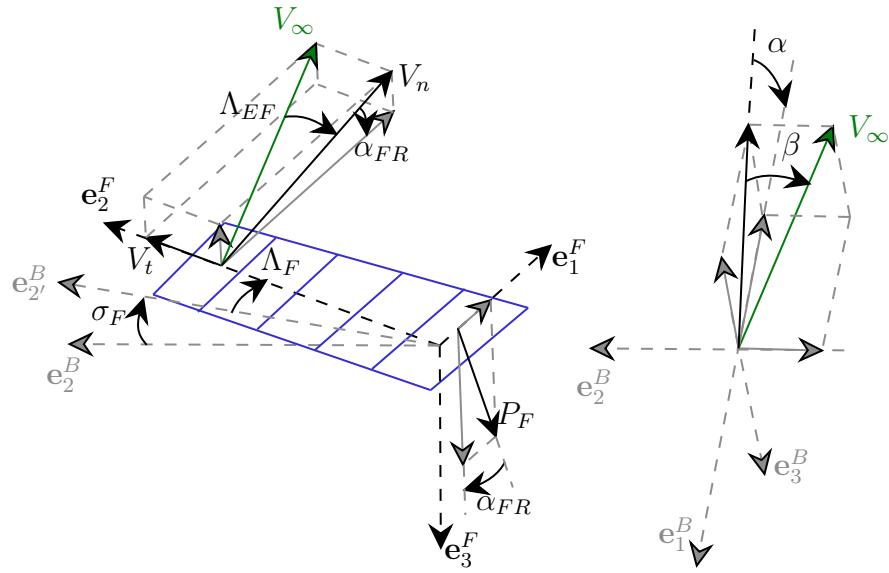
Para aplicar a MST para uma simulação de dinâmica de voo, é preciso contabilizar os efeitos dos movimentos de corpo rígido e flexível sobre os graus de liberdade de cada faixa.

Para contabilizar os efeitos dos movimentos de corpo rígido, precisa-se, primeiramente, analisar a influência dos ângulos de ataque ( $\alpha$ ) e derrapagem ( $\beta$ ) da aeronave sobre cada faixa. Essa influência é a chave para integrar a MST à dinâmica de voo.

Na Figura 4.6, encontra-se uma semi-asa direita discretizada em faixas, sendo que cada faixa possui sua orientação definida por  $\sigma_F$  e  $\Lambda_F$ . À esquerda, estão ilustrados o ângulo de enflechamento efetivo da faixa,  $\Lambda_{EF}$ , e o ângulo de ataque induzido

pelos movimentos de corpo rígido na faixa,  $\alpha_{FR}$ . A força atuante na faixa,  $P_F$ , é dada normal à componente  $V_n$ , e, portanto, está defasada por um ângulo,  $\alpha_{FR}$ , do sistema da faixa. À direita, encontra-se a definição do sistema aerodinâmico global,  $SR_A$ , com relação ao sistema do corpo,  $SR_B$ .

Figura 4.6 – Contribuição dos movimentos de corpo rígido por meio dos ângulos  $\Lambda_{EF}$  e  $\alpha_{FR}$ .



Fonte: Autor.

Feitas essas definições, pode-se decompor o versor referente à velocidade do escoamento,  $V_\infty$ , originalmente dado no  $SR_A$ , no sistema no sistema  $SR_B$  utilizando duas sequências de transformação diferentes. Matematicamente, tem-se a seguinte equivalência:

$$C_1(\sigma_F)C_3(-\Lambda_F)C_2(\alpha_{FR})C_3(\Lambda_{EF}) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = C_2(\alpha)C_3(-\beta) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

o que consiste em um sistema de 3 equações não-lineares. A solução do sistema para os ângulos  $\Lambda_{EF}$  e  $\alpha_{FR}$  é dada por

$$\begin{cases} \Lambda_{EF} = \sin^{-1} [c(\alpha)c(\beta)s(\Lambda_F) + c(\Lambda_F)(-c(\sigma_F)s(\beta) + c(\beta)s(\alpha)s(\alpha_F))] \\ \alpha_{FR} = \tan^{-1} \left[ \frac{s(\alpha)c(\beta)c(\sigma_F) + s(\beta)s(\sigma_F)}{-s(\alpha)c(\beta)s(\Lambda_F)s(\sigma_F) + c(\alpha)c(\beta)c(\Lambda_F) + s(\beta)s(\Lambda_F)c(\sigma_F)} \right] \end{cases} . \quad (4.17)$$

Como a MST é válida somente para movimentos harmônicos, precisa-se escre-

ver os movimentos dos graus de liberdade de corpo rígido e flexível da forma

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \alpha_e + \Delta\alpha e^{i\omega t} \\ \beta = \beta_e + \Delta\beta e^{i\omega t} \\ p = p_e + \Delta p e^{i\omega t} \\ q = q_e + \Delta q e^{i\omega t} \\ r = r_e + \Delta r e^{i\omega t} \\ \delta_a = \delta_{ae} + \Delta\delta_a e^{i\omega t} \\ \delta_e = \delta_{ee} + \Delta\delta_e e^{i\omega t} \\ \delta_r = \delta_{re} + \Delta\delta_r e^{i\omega t} \\ q_{11}^f = q_{11e}^f + \Delta q_{11}^f e^{i\omega t} \\ q_{21}^f = q_{21e}^f + \Delta q_{21}^f e^{i\omega t} \\ q_{11}^t = q_{11e}^t + \Delta q_{11}^t e^{i\omega t} \\ q_{21}^t = q_{21e}^t + \Delta q_{21}^t e^{i\omega t} \\ \vdots \\ q_{2nf}^t = q_{2nfe}^t + \Delta q_{2nf}^t e^{i\omega t} \end{array} \right. , \quad (4.18)$$

em que  $\delta_a$ ,  $\delta_e$  e  $\delta_r$  são as deflexões do aileron, profundor e leme, respectivamente.

Dessa forma, inclui-se as contribuições de  $\alpha$  e  $\beta$ , juntamente à influência das  $N_e^f$  e  $N_e^t$  coordenadas elásticas de flexão e torção, respectivamente, nas expressões do deslocamento  $h$  e ângulo de ataque  $\alpha_F$  da faixa, da forma

$$h = x_2^E \sum_{i=1}^{N_e^f} \Phi_i^f q_i^f, \quad (4.19)$$

e, já considerando os ângulos de incidência,  $i_0$ , e de ataque para sustentação nula,  $\alpha_0$ ,

$$\alpha_F = i_0 - \alpha_0 + \alpha_{FR}(\alpha_e, \beta_e) + \frac{\partial \alpha_{FR}(\alpha_e, \beta_e)}{\partial \alpha} \Delta\alpha e^{i\omega t} + \frac{\partial \alpha_{FR}(\alpha_e, \beta_e)}{\partial \beta} \Delta\beta e^{i\omega t} + \sum_{i=1}^{N_e^t} \Phi_i^t q_i^t. \quad (4.20)$$

As inclinações dos ângulos de diedro ( $\sigma$ ) e torção ( $\tau$ ) na faixa são dados, portanto, por

$$\sigma = \sum_{i=1}^{N_e^f} \Phi_i^f q_i^f, \quad (4.21)$$

e,

$$\tau = \frac{\partial i_0}{\partial x_2^E} - \frac{\partial \alpha_0}{\partial x_2^E} + \sum_{i=1}^{N_e^t} \frac{\partial \Phi_i^t}{\partial x_2^E} q_i^t. \quad (4.22)$$

Ainda, deve-se tomar cuidado com a expressão de  $\dot{h}$ , visto que a velocidade angular da aeronave,  $\bar{\omega}$ , também a influencia. Cada faixa possui um braço,  $\bar{r}_{ea}$ , partindo da origem do sistema  $SR_B$ , até o ponto de referência do eixo elástico, e um versor normal,  $\hat{n}^F$ , que parte do eixo elástico e aponta no sentido de  $h$ . Dessa forma, a expressão de  $\dot{h}$  fica

$$\dot{h} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\bar{\omega} \times \bar{r}_{ea}) \cdot \hat{n}^F. \quad (4.23)$$

Por fim, deve-se substituir  $\Lambda_{ea}$  por  $\Lambda_{EF}$  nas Equações (4.11), (4.12), (4.13), (4.14) e (4.15), de forma a considerar o enflechamento efetivo considerando  $\alpha$  e  $\beta$ . As expressões de  $\ddot{h}$ ,  $\dot{\alpha}_F$ ,  $\ddot{\alpha}_F$ ,  $\dot{\sigma}$ , e  $\dot{\tau}$  são encontradas naturalmente, fazendo simples derivadas em relação ao tempo.

### 4.3 GENERALIZAÇÃO PARA MOVIMENTOS ARBITRÁRIOS

Até o momento, tratou-se da teoria aerodinâmica para movimentos harmônicos. Entretanto, como discutido nos trabalhos de Silva (1994) e Pogorzelski (2010), pode-se generalizar os movimentos puramente harmônicos para movimentos amortecidos substituindo  $i\omega$  pela variável de Laplace,  $s$ . A função de deficiência de sustentação de Theodorsen, por sua vez, é generalizada quando se utiliza, como argumento, a frequência reduzida complexa,  $ik$ , obtida multiplicando a Equação (4.2) pela unidade imaginária,  $i$ , da forma

$$ik = \frac{sb_{ref}}{V_n}. \quad (4.24)$$

#### 4.3.1 Matriz de Coeficientes de Influência Aerodinâmica

Quando se trabalha com aerodinâmica linear, é usual escrever as forças aerodinâmicas como uma combinação linear dos estados aerodinâmicos - estados dos quais

as forças aerodinâmicas dependem. Ao escrever essa combinação linear na forma matricial, obtém-se a matriz de coeficientes de influência aerodinâmica, conhecida, em inglês, como *Aerodynamic Influence Coefficient Matrix* (AIC). Uma vez conhecida a matriz AIC, pode-se, conforme discutido nas seções seguintes, voltar ao domínio do tempo, obtendo as derivadas de estabilidade e controle. Dessa forma, para construí-la, inicia-se escrevendo as forças,  $\bar{\mathbf{F}}_a^F$ , e momentos,  $\bar{\tau}_a^F$ , aerodinâmicos, para uma faixa de envergadura,  $\Delta F$ , no sistema de interesse,  $SR_B$ , da forma

$$\bar{\mathbf{F}}_a^F(ik) = \begin{bmatrix} F_{a1}^F \\ F_{a2}^F \\ F_{a3}^F \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1(\sigma_F) \mathbf{C}_3(-\Lambda_F) \mathbf{C}_2(\alpha_{FR}) \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ P_F \Delta F \end{bmatrix}, \quad (4.25)$$

e,

$$\bar{\tau}_a^F(ik) = \begin{bmatrix} \tau_{a1}^F \\ \tau_{a2}^F \\ \tau_{a3}^F \end{bmatrix} = \mathbf{C}_1(\sigma_F) \mathbf{C}_3(-\Lambda_F) \mathbf{C}_2(\alpha_{FR}) \begin{bmatrix} 0 \\ M_F \Delta F \\ 0 \end{bmatrix} + \bar{\mathbf{r}}_{ea} \times \bar{\mathbf{F}}_a^F. \quad (4.26)$$

Definindo um conjunto de forças aerodinâmicas generalizadas,  $\bar{\mathbf{Q}}_a^F$ , referente à faixa  $F$ , da forma

$$\bar{\mathbf{Q}}_a^F(ik) \triangleq \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{F}}_a^F \\ \bar{\tau}_a^F \end{bmatrix}, \quad (4.27)$$

e, truncando todos os termos de mais alta ordem, como, por exemplo,  $\Delta\alpha^2$ ,  $\Delta\beta^2$ ,

$\Delta\alpha\Delta\beta$ , etc., pode-se reescrevê-las da forma

$$\bar{\mathbf{Q}}_a^F(ik) = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{E1}(0) \\ A_{E2}(0) \\ A_{E3}(0) \\ A_{E4}(0) \\ A_{E5}(0) \\ A_{E6}(0) \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}_E^F} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{\partial F_{a1}^F}{\partial \Delta\alpha} & \frac{\partial F_{a1}^F}{\partial \Delta\beta} & \frac{\partial F_{a1}^F}{\partial \Delta p} & \frac{\partial F_{a1}^F}{\partial \Delta q} & \dots & \frac{\partial F_{a1}^F}{\partial \Delta q_{2nf}^t} \\ \frac{\partial F_{a2}^F}{\partial \Delta\alpha} & \frac{\partial F_{a2}^F}{\partial \Delta\beta} & \frac{\partial F_{a2}^F}{\partial \Delta p} & \frac{\partial F_{a2}^F}{\partial \Delta q} & \dots & \frac{\partial F_{a2}^F}{\partial \Delta q_{2nf}^t} \\ \frac{\partial F_{a3}^F}{\partial \Delta\alpha} & \frac{\partial F_{a3}^F}{\partial \Delta\beta} & \frac{\partial F_{a3}^F}{\partial \Delta p} & \frac{\partial F_{a3}^F}{\partial \Delta q} & \dots & \frac{\partial F_{a3}^F}{\partial \Delta q_{2nf}^t} \\ \frac{\partial \tau_{a1}^F}{\partial \Delta\alpha} & \frac{\partial \tau_{a1}^F}{\partial \Delta\beta} & \frac{\partial \tau_{a1}^F}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \tau_{a1}^F}{\partial \Delta q} & \dots & \frac{\partial \tau_{a1}^F}{\partial \Delta q_{2nf}^t} \\ \frac{\partial \tau_{a2}^F}{\partial \Delta\alpha} & \frac{\partial \tau_{a2}^F}{\partial \Delta\beta} & \frac{\partial \tau_{a2}^F}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \tau_{a2}^F}{\partial \Delta q} & \dots & \frac{\partial \tau_{a2}^F}{\partial \Delta q_{2nf}^t} \\ \frac{\partial \tau_{a3}^F}{\partial \Delta\alpha} & \frac{\partial \tau_{a3}^F}{\partial \Delta\beta} & \frac{\partial \tau_{a3}^F}{\partial \Delta p} & \frac{\partial \tau_{a3}^F}{\partial \Delta q} & \dots & \frac{\partial \tau_{a3}^F}{\partial \Delta q_{2nf}^t} \end{bmatrix}}_{\mathbf{AIC}^F(ik)} \begin{bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\beta \\ \Delta p \\ \Delta q \\ \Delta r \\ \Delta\delta_a \\ \Delta\delta_e \\ \Delta\delta_r \\ \Delta q_{11}^f \\ \vdots \\ \Delta q_{2nf}^t \end{bmatrix}, \quad (4.28)$$

onde:  $\Delta\mathbf{x}_a$  é o vetor de estados aerodinâmicos; e,  $\mathbf{A}_E^F$ , é o vetor de forças generalizadas,  $\bar{\mathbf{Q}}_a^F$ , para  $k = 0$  e  $\Delta\mathbf{x}_a = 0$ .

Intuitivamente, pode-se interpretar o vetor de forças generalizadas,  $\bar{\mathbf{Q}}_a^F$ , como uma soma de uma parcela constante,  $\mathbf{A}_E^F$ , dependente da condição de referência em torno da qual a aerodinâmica está linearizada, e uma parcela variável, com amplitude dependente da frequência,  $\mathbf{AIC}^F \Delta\mathbf{x}_a$ .

A matriz AIC total da aeronave pode ser encontrada de diferentes formas, dependendo do nível de detalhes que se deseja preservar. Caso seja necessário conhecer a distribuição de forças na asa, é preciso concatenar por blocos todas as matrizes  $\mathbf{AIC}^F$ , como mostra Silva (1994). Caso seja desejado conhecer apenas as forças resultantes escritas no sistema de interesse, conforme realizado por Pogorzelski (2010), pode-se somar todas as matrizes  $\mathbf{AIC}^F$ , visto que as forças já estão escritas no sistema do corpo. A grande vantagem da última opção é a economia de tempo computacional, visto que o número de derivadas de estabilidade e controle, e o número de estados de atraso aerodinâmico são proporcionais ao tamanho da matriz AIC total,  $\mathbf{AIC}_{tot}$ .

Neste trabalho, como a abordagem da dinâmica é por multicorpos flexíveis, faz-se necessário conhecer a força resultante em cada superfície aerodinâmica. Dessa forma, como o vetor de estados aerodinâmicos,  $\Delta\mathbf{x}_a$ , é comum a todos corpos, as

matrizes  $\mathbf{A}_{Etot}$  e  $\mathbf{AIC}_{tot}$  são escritas da forma

$$\mathbf{A}_{Etot} = \begin{bmatrix} \sum_{F=1}^{N_{F1}} [\mathbf{A}_E^F]^1 \\ \sum_{F=1}^{N_{F2}} [\mathbf{A}_E^F]^2 \\ \sum_{F=1}^{N_{F3}} [\mathbf{A}_E^F]^3 \\ \sum_{F=1}^{N_{F4}} [\mathbf{A}_E^F]^4 \\ \sum_{F=1}^{N_{F5}} [\mathbf{A}_E^F]^5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{AIC}_{tot}(ik) = \begin{bmatrix} \sum_{F=1}^{N_{F1}} [\mathbf{AIC}^F]^1 \\ \sum_{F=1}^{N_{F2}} [\mathbf{AIC}^F]^2 \\ \sum_{F=1}^{N_{F3}} [\mathbf{AIC}^F]^3 \\ \sum_{F=1}^{N_{F4}} [\mathbf{AIC}^F]^4 \\ \sum_{F=1}^{N_{F5}} [\mathbf{AIC}^F]^5 \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

sendo,  $N_{Fj}$ , o número de faixas da  $j$ -ésima superfície sustentadora.

### 4.3.2 Aproximação por Funções Racionais

Para simulações de dinâmica de voo e projetos de sistemas de controle, é desejável trabalhar no domínio do tempo, visto que a interpretação física do movimento é direta, e a maioria das técnicas de controle moderno estão atreladas ao modelo da planta no espaço de estados.

Conforme amplamente discutido na literatura, a exemplo de Silva (1994) e Pogorzelski (2010), para retornar as forças ao domínio do tempo, não é possível aplicar diretamente a transformada inversa de Laplace, pois a função  $C(ik)$  não possui transformada inversa. Dessa forma, é usual realizar uma aproximação da matriz  $\mathbf{AIC}_{tot}(ik)$  por funções racionais que garantam a validade para movimentos arbitrários. Para tal, existem diversas técnicas, entre as quais, o método de Roger, amplamente difundido por sua simplicidade.

O método de Roger consiste na aproximação da matriz  $\mathbf{AIC}_{tot}(ik)$  por polinômios matriciais de Padé em uma faixa de frequências reduzidas,  $k$ , de interesse. A matriz aproximada,  $\mathbf{AIC}_{ap}(ik)$ , é escrita da forma

$$\mathbf{AIC}_{ap}(ik) = [\mathbf{A}_0] + ik[\mathbf{A}_1] + (ik)^2[\mathbf{A}_2] + \sum_{n=1}^{n_{lag}} \frac{ik[\mathbf{A}_{n+2}]}{ik + \beta_n}, \quad (4.30)$$

em que:  $\beta_n$  está associado ao  $n$ -ésimo polo de atraso aerodinâmico, cuja função é ditar a dinâmica da esteira de vórtices; e,  $n_{lag}$  é o número de polos de atraso alocados para garantir uma aproximação adequada.

Reescrevendo a Equação (4.30) para cada termo  $(i, j)$  das matrizes, e para a

m-ésima frequênci,  $k_m$ , tem-se

$$a_{ap}^{(i,j)}(ik_m) = a_0^{(i,j)} + ik_m a_1^{(i,j)} + (ik_m)^2 a_2^{(i,j)} + \sum_{n=1}^{n_{lag}} \frac{ik_m a_{n+2}^{(i,j)}}{ik_m + \beta_n}, \quad (4.31)$$

ou, na forma vetorial,

$$a_{ap}^{(i,j)}(ik_m) = \{\mathbf{Y}(ik_m)\}\{\mathbf{a}^{(i,j)}\}, \quad (4.32)$$

em que

$$\mathbf{Y}(ik_m) = \begin{bmatrix} 1 & ik_m & (ik_m)^2 & \frac{ik_m}{ik_m + \beta_1} & \dots & \frac{ik_m}{ik_m + \beta_{n_{lag}}} \end{bmatrix}, \quad (4.33)$$

e,

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} a_0^{(i,j)} & a_1^{(i,j)} & a_2^{(i,j)} & a_3^{(i,j)} & \dots & a_{n_{lag}+2}^{(i,j)} \end{bmatrix}^T. \quad (4.34)$$

Embora a aproximação seja realizada apenas para frequências reduzidas pertencentes ao domínio do eixo imaginário do plano complexo, a aproximação também é válida para frequências amortecidas, devido à extensão analítica associada à função resultante do Método dos Mínimos Quadrados (MMQ) (SILVA, 1994). Para aplicar o MMQ, tem-se que o erro quadrático,  $\epsilon^{(i,j)}$ , dado por

$$\epsilon^{(i,j)} = \sum_{m=1}^{m_k} |a_{ap}^{(i,j)}(ik_m) - a_{tot}^{(i,j)}(ik_m)|^2, \quad (4.35)$$

deve ser minimizado utilizando a condição

$$\frac{\partial \epsilon^{(i,j)}}{\partial a_n^{(i,j)}} = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, n_{lag} + 2. \quad (4.36)$$

Conforme desenvolvido no trabalho de Silva (1994), a expressão final para os termos,  $\mathbf{a}^{(i,j)}$ , é dada, na forma vetorial, por

$$\mathbf{a}^{(i,j)} = (\mathbf{T}^T \mathbf{T}^* + \mathbf{T}^{*T} \mathbf{T})^{-1} (\mathbf{T}^{*T} \mathbf{a}_{tot}^{(i,j)} + \mathbf{T}^T \mathbf{a}_{tot}^{(i,j)*}), \quad (4.37)$$

em que: a notação  $(\cdot)^*$  representa o complexo conjugado;  $(\cdot)^T$ , a transposta;  $\mathbf{T}$  é dada

da forma

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}(ik_1) \\ \mathbf{Y}(ik_2) \\ \mathbf{Y}(ik_3) \\ \vdots \\ \mathbf{Y}(ik_{m_k}) \end{bmatrix}; \quad (4.38)$$

$\mathbf{e}$ ,  $\mathbf{a}_{tot}^{(i,j)}$ , dada por

$$\mathbf{a}_{tot}^{(i,j)} = \begin{bmatrix} a_{tot}^{(i,j)}(ik_1) \\ a_{tot}^{(i,j)}(ik_2) \\ a_{tot}^{(i,j)}(ik_3) \\ \vdots \\ a_{tot}^{(i,j)}(ik_{m_k}) \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

O processo é repetido para cada elemento  $(i, j)$  da matriz  $\mathbf{AIC}_{tot}$ , dando origem às matrizes  $[\mathbf{A}_0]$ ,  $[\mathbf{A}_1]$ , ...,  $[\mathbf{A}_{n_{lag}+2}]$ .

### 4.3.3 Dinâmica dos Estados de Atraso Aerodinâmico

Uma vez feita a aproximação da matriz  $\mathbf{AIC}_{tot}$  por funções racionais, compostas unicamente por números reais, pode-se facilmente aplicar a transformada inversa de Laplace à componente variável das forças generalizadas totais,  $\Delta\bar{\mathbf{Q}}_a(ik)$ , da forma

$$\mathcal{L}^{-1}\{\Delta\bar{\mathbf{Q}}_a(ik)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\left([\mathbf{A}_0] + ik[\mathbf{A}_1] + (ik)^2[\mathbf{A}_2] + \sum_{n=1}^{n_{lag}} \frac{ik[\mathbf{A}_{n+2}]}{ik + \beta_n}\right) \Delta\mathbf{x}_a(ik)\right\}, \quad (4.40)$$

e, substituindo  $ik$  por  $sb_{ref}/V_\infty$ , obtém-se

$$\Delta\bar{\mathbf{Q}}_a(t) = [\mathbf{A}_0]\Delta\mathbf{x}_a(t) + \left(\frac{b_{ref}}{V_\infty}\right) [\mathbf{A}_1]\Delta\dot{\mathbf{x}}_a(t) + \left(\frac{b_{ref}}{V_\infty}\right)^2 [\mathbf{A}_2]\Delta\ddot{\mathbf{x}}_a(t) + \sum_{n=1}^{n_{lag}} [\mathbf{A}_{n+2}]\mathbf{X}_n^{lag}(t), \quad (4.41)$$

em que  $\mathbf{X}_n^{lag}(t)$  são os estados de atraso aerodinâmico, advindos da transformada

inversa de Laplace:

$$\mathbf{X}_n^{lag}(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \sum_{n=1}^{n_{lag}} \frac{ik[\mathbf{A}_{n+2}]}{ik + \beta_n} \Delta \mathbf{x}_a(ik) \right\}, \quad (4.42)$$

a qual fornece a dinâmica dos atrasos aerodinâmicos inseridos ao sistema para cada polo aerodinâmico,  $\beta_n^{lag}$ , alocado, dados por

$$\dot{\mathbf{X}}_n^{lag}(t) = \Delta \dot{\mathbf{x}}_a(t) - \left( \frac{V_\infty}{b_{ref}} \right) \beta_n^{lag} \mathbf{X}_n^{lag}(t). \quad (4.43)$$

#### 4.3.4 Derivadas de Estabilidade e Controle

Para que seja possível utilizar as matrizes provenientes da aproximação da AIC para outras condições que não aquela adotada como referência, é conveniente adimensionalizar as forças aerodinâmicas generalizadas,  $\bar{\mathbf{Q}}_a(t)$ . A adimensionalização não é a mesma para cada força, sendo usual adotar a corda média aerodinâmica da asa,  $C_{ref}$ , como comprimento de referência para as forças referentes à dinâmica longitudinal, e, a envergadura da asa,  $B_{ref}$ , para as referentes à dinâmica látero-direcional. Utilizando as adimensionalizações sugeridas por Pogorzelski (2010), pode-se escrever, genericamente, as forças para um corpo,  $N$ ,  $\bar{\mathbf{Q}}_a^N$ , da forma:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{Q}}_a^N = & K_n^1 \left( C_{Q_E} + C_{Q_\alpha} \Delta \alpha + C_{Q_\beta} \Delta \beta + C_{Q_{\delta_a}} \Delta \delta_a + C_{Q_{\delta_e}} \Delta \delta_e + C_{Q_{\delta_r}} \Delta \delta_r + \sum_{j=1}^{n_{elast}} C_{Q_{q_j}} \Delta q_j \right) \\ & + K_n^2 \left[ C_{Q_{\dot{\alpha}}} \Delta \dot{\alpha} + C_{Q_{\dot{\beta}}} \Delta \dot{\beta} + C_{Q_p} \Delta p + C_{Q_q} \Delta q + C_{Q_r} \Delta r + C_{Q_{\dot{\delta}_a}} \Delta \dot{\delta}_a + C_{Q_{\dot{\delta}_e}} \Delta \dot{\delta}_e + C_{Q_{\dot{\delta}_r}} \Delta \dot{\delta}_r \right. \\ & + \sum_{j=1}^{n_{elast}} C_{Q_{\dot{q}_j}} \Delta \dot{q}_j + \sum_{k=1}^{n_{lag}} \left( C_{Q_{\alpha,k}^{lag}} x_{\alpha,k}^{lag} + C_{Q_{\beta,k}^{lag}} x_{\beta,k}^{lag} + C_{Q_{\delta_a,k}^{lag}} x_{\delta_a,k}^{lag} + C_{Q_{\delta_e,k}^{lag}} x_{\delta_e,k}^{lag} + C_{Q_{\delta_r,k}^{lag}} x_{\delta_r,k}^{lag} \right. \\ & \left. \left. + \sum_{j=1}^{n_{elast}} C_{Q_{q_j,k}^{lag}} x_{q_j,k}^{lag} \right) \right] + K_n^3 \left[ C_{Q_{\ddot{\alpha}}} \Delta \ddot{\alpha} + C_{Q_{\ddot{\beta}}} \Delta \ddot{\beta} + C_{Q_{\ddot{p}}} \Delta \ddot{p} + C_{Q_{\ddot{q}}} \Delta \ddot{q} + C_{Q_{\ddot{r}}} \Delta \ddot{r} + C_{Q_{\ddot{\delta}_a}} \Delta \ddot{\delta}_a \right. \\ & \left. + C_{Q_{\ddot{\delta}_e}} \Delta \ddot{\delta}_e + C_{Q_{\ddot{\delta}_r}} \Delta \ddot{\delta}_r + \sum_{j=1}^{n_{elast}} C_{Q_{\ddot{q}_j}} \Delta \ddot{q}_j + \sum_{k=1}^{n_{lag}} \left( C_{Q_{p,k}^{lag}} x_{p,k}^{lag} + C_{Q_{q,k}^{lag}} x_{q,k}^{lag} + C_{Q_{r,k}^{lag}} x_{r,k}^{lag} \right) \right] \\ & + K_n^4 (C_{Q_{\ddot{p}}} \Delta \ddot{p} + C_{Q_{\ddot{q}}} \Delta \ddot{q} + C_{Q_{\ddot{r}}} \Delta \ddot{r}), \end{aligned} \quad (4.44)$$

sendo, os fatores de adimensionalização, para cada componente da força  $\bar{\mathbf{Q}}_a^N$ ,  $K_n$ ,

dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} K_{1,3}^1 = 0.5\rho_a V_\infty^2 S_{ref} \\ K_{1,3}^2 = 0.25\rho_a V_\infty S_{ref} C_{ref} \\ K_{1,3}^3 = 0.25\rho_a S_{ref} C_{ref}^2 \\ K_{1,3}^4 = 0.25V_\infty^{-1} \rho_a S_{ref} C_{ref}^3 \\ K_2^1 = 0.5\rho_a V_\infty^2 S_{ref} \\ K_2^2 = 0.25\rho_a V_\infty S_{ref} B_{ref} \\ K_2^3 = 0.25\rho_a S_{ref} B_{ref}^2 \\ K_2^4 = 0.25V_\infty^{-1} \rho_a S_{ref} B_{ref}^3 \\ K_{4,6}^1 = 0.5\rho_a V_\infty^2 S_{ref} C_{ref} \\ K_{4,6}^2 = 0.25\rho_a V_\infty S_{ref} C_{ref}^2 \\ K_{4,6}^3 = 0.25\rho_a S_{ref} C_{ref}^3 \\ K_{4,6}^4 = 0.25V_\infty^{-1} \rho_a S_{ref} C_{ref}^4 \\ K_5^1 = 0.5\rho_a V_\infty^2 S_{ref} B_{ref} \\ K_5^2 = 0.25\rho_a V_\infty S_{ref} B_{ref}^2 \\ K_5^3 = 0.25\rho_a S_{ref} B_{ref}^3 \\ K_5^4 = 0.25V_\infty^{-1} \rho_a S_{ref} B_{ref}^4 \end{array} \right. , \quad (4.45)$$

onde  $S_{ref}$  é a área de planta da asa.

Percebe-se, portanto, que o número de derivadas de estabilidade e controle é bastante grande. Para 5 superfícies aerodinâmicas, cada uma com quatro coordenadas elásticas, sob 6 forças generalizadas atuantes, e, alocando 5 polos aerodinâmicos, obtém-se um total de 4230 derivadas.

#### 4.4 MODELO DE RAJADA

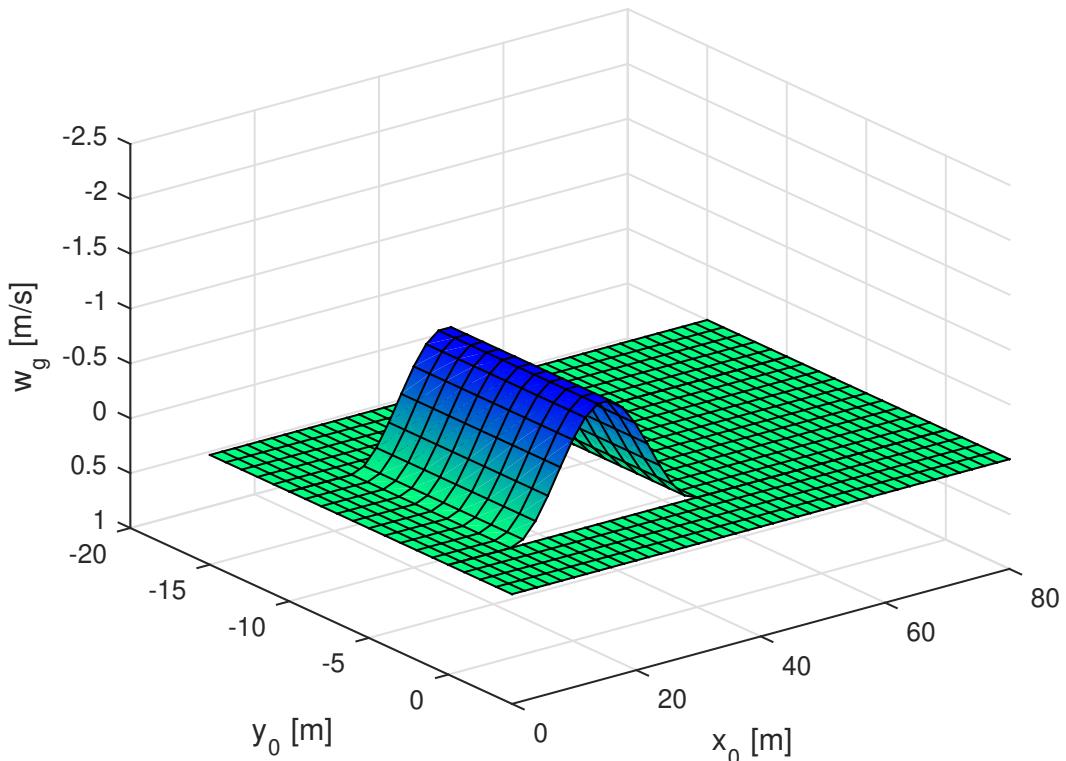
A fim de realizar estudos perturbativos com rajadas de vento, decidiu-se por utilizar um modelo padrão de rajada das especificações de certificação JAR/FAR 25.341 e CS-23, utilizadas por Kier (2005) e Kalthof (2014), respectivamente. O modelo es- colhido, conhecido por  $1 - \cos$ , prescreve apenas a componente vertical de velocidade

da rajada,  $w_g$ , a qual é dada, no sistema inercial, por

$$w_g(x_0, y_0) = \begin{cases} -\frac{V_{0w}}{2} \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi(x_0 - x_{0w})}{H_w}\right) \right], & x_{0w} \leq x_0 \leq x_{fw} \\ 0, & y_{0w} \leq y_0 \leq y_{fw} \\ & \text{caso contrário} \end{cases}, \quad (4.46)$$

onde:  $x_{0w}$ ,  $y_{0w}$ ,  $x_{fw}$  e  $y_{fw}$  estão escritos no sistema inercial e definem uma região retangular, dentro da qual ocorre a rajada. Dessa forma, é possível simular a rajada sobre toda a aeronave, ou mesmo sobre apenas uma metade. Os parâmetros  $V_{0w}$  e  $H_w$  correspondem à magnitude máxima da velocidade e metade do comprimento da rajada, respectivamente. Estes podem ser alterados para variar o gradiente da rajada, gerando diferentes perfis de vento. O perfil de rajada que será utilizado mais à frente foi ilustrado na Figura 4.7.

Figura 4.7 – Modelo de rajada 1-cos.



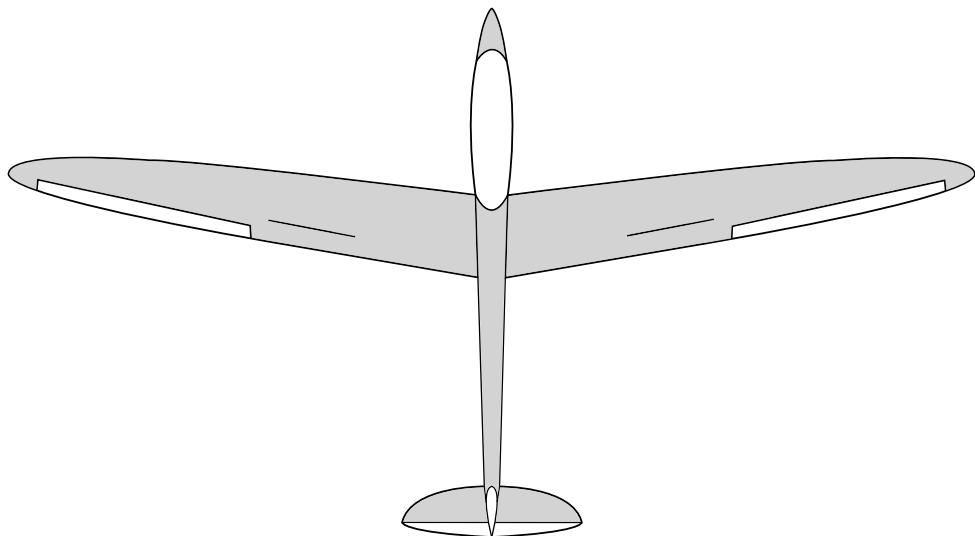
Fonte: Autor.

Os parâmetros da rajada foram arbitrados tal que:  $H_w = 15 \text{ m}$ ,  $V_{0w} = 1.111 \text{ m/s}$ ,  $x_{0w} = 10 \text{ m}$ ,  $x_{fw} = 40 \text{ m}$ ,  $y_{0w} = -20 \text{ m}$  e  $y_{fw} = 0 \text{ m}$ .

## 5 ESTUDOS NUMÉRICOS

A aeronave escolhida para os estudos numéricos foi o planador brasileiro, P1, a qual também foi utilizada por Pogorzelski (2010). Por se tratar de um planador, com alongamento superior às aeronaves comerciais, tem-se uma boa aproximação pela MST, dado que o efeito de ponta de asa é pequeno. No entanto, devido à abordagem por multicorpos, a distribuição de massa de cada corpo teve de ser estimada. Ainda, devido à utilização de um modelo estrutural de viga engastada, algumas adaptações da aeronave precisaram ser realizadas, como a adaptação da cauda para satisfazer as condições de contorno do modelo estrutural adotado, substituindo a configuração em T pela tradicional. Uma ilustração da vista superior da aeronave adaptada é dada na Figura 5.1. Demais detalhes da aeronave são dados no Apêndice A.

Figura 5.1 – Vista superior da aeronave P1 adaptada.



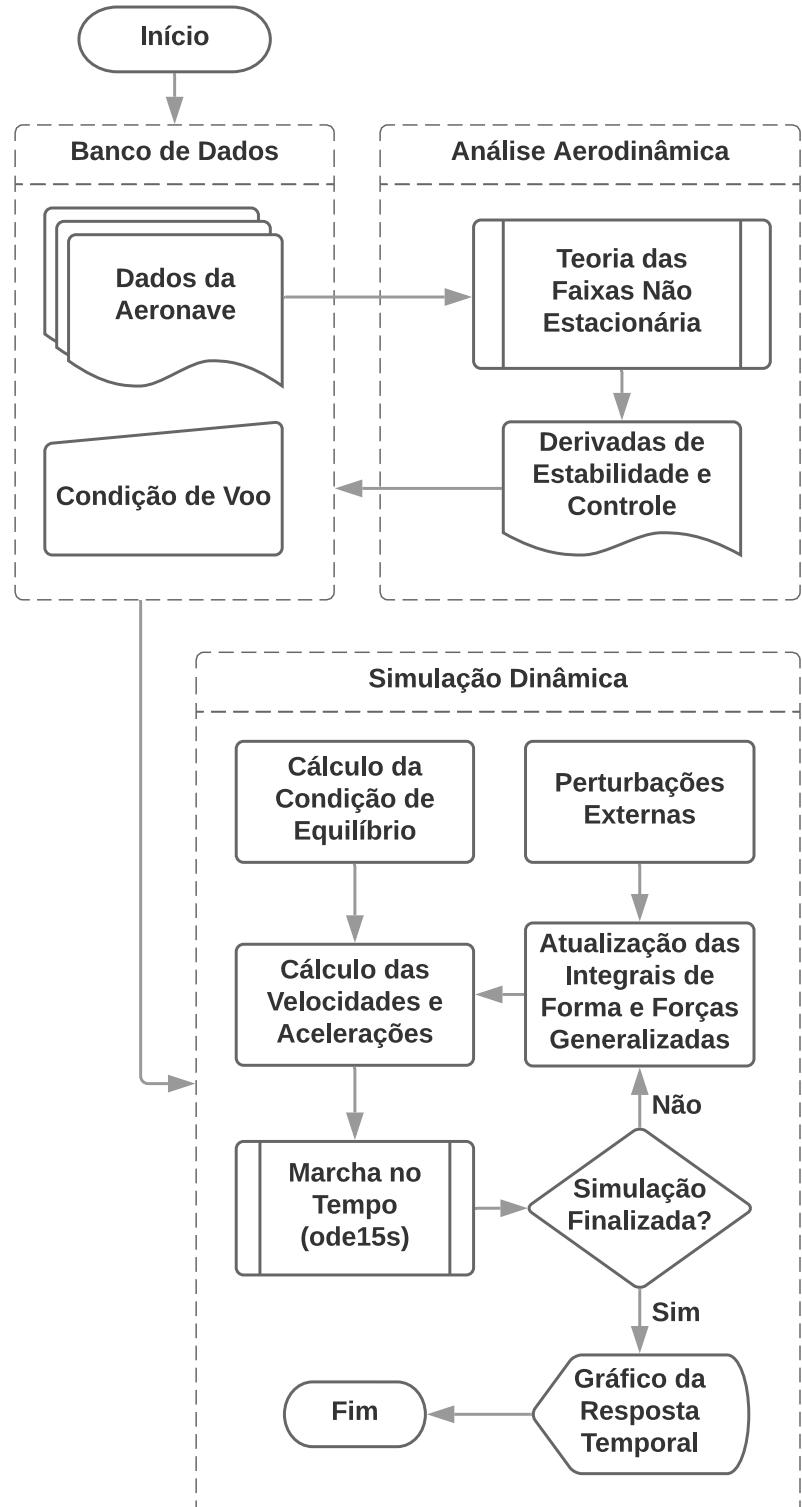
Fonte: Autor.

Embora as empenagens horizontal (EH) e vertical (EV) possuam uma rigidez elevada, elas estão sendo consideradas flexíveis. Por conta disso, as frequências naturais dos seus modos flexíveis são bastante elevadas. Quando esses modos de alta frequência são excitados, o passo de tempo de integração precisa ser reduzido, para que as oscilações não sofram um amortecimento numérico, o que torna a marcha no tempo lenta. Dada a necessidade de testar diferentes métodos de integração, utilizou-se o *software* Matlab, devido à vasta gama de integradores, por ele, disponibilizada.

Como a matriz de massa generalizada do sistema de multicorpos é variante no tempo - pois depende das coordenadas elásticas - o sistema linear da Equação (2.100) é resolvido a cada passo de tempo, para obter as acelerações generalizadas e os multiplicadores de Lagrange. Por conta de todas essas peculiaridades, recomenda-se o

uso do integrador *ode15s*, que consiste em um método de passo e ordem variáveis (VSVO), baseado nas fórmulas de diferenças numéricas de ordem 1 a 5. Uma vez feitas essas considerações, parte-se para a estrutura básica do ambiente de simulação desenvolvido, ilustrada na Figura 5.2.

Figura 5.2 – Estrutura básica do ambiente de simulação.



Fonte: Autor.

As informações da aeronave são armazenadas em um banco de dados externo. Quando uma solicitação para o cálculo do modelo aerodinâmico é feita, o algoritmo acessa as informações da aeronave e a condição de voo de referência, realiza a discretização das superfícies em faixas, calcula a matriz AIC total, realiza a aproximação por funções racionais, adimensionaliza todas as matrizes aproximadas, e, por fim, retorna as derivadas de estabilidade e controle para o banco de dados.

Quando uma simulação dinâmica é solicitada, a condição de voo é carregada junto ao modelo aerodinâmico. Na sequência, é realizado o cálculo da condição de equilíbrio, e a dinâmica é linearizada em torno dessa condição. As matrizes Jacobianas da dinâmica são armazenadas para, mais tarde, serem utilizadas para estimar as derivadas dos estados aerodinâmicos.

Na sequência, o algoritmo solicita ao usuário se o mesmo deseja utilizar o modelo de aerodinâmica não estacionária (incluindo os efeitos de esteira e das derivadas dos estados aerodinâmicos), ou apenas o modelo quasi-estacionário (ignorando os efeitos citados anteriormente).

Por fim, o usuário informa qual tipo de perturbação deseja utilizar, seja ela em algum estado, controle, ou com o modelo de rajada de vento.

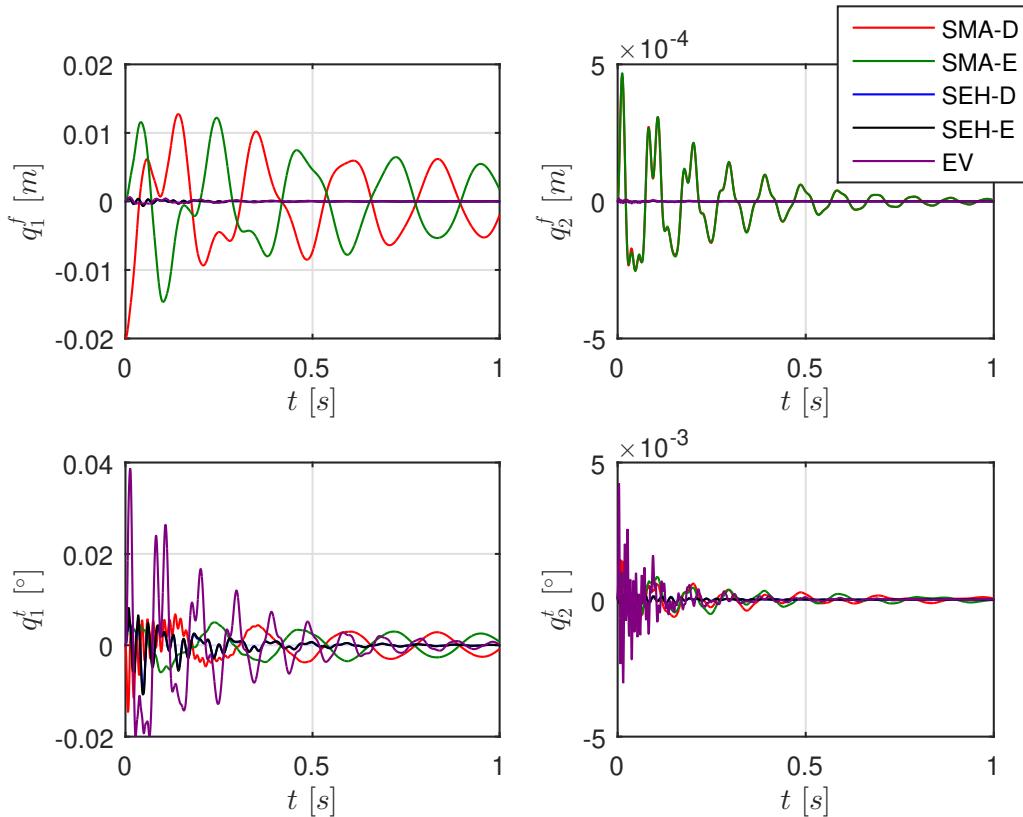
Para discutir e avaliar os efeitos da modelagem desenvolvida no presente trabalho, alguns estudos numéricos são realizados nas seções seguintes.

## 5.1 RESPOSTA À PERTURBAÇÃO ESTRUTURAL SEM FORÇAS EXTERNAS

Como primeiro estudo, escolheu-se uma simulação sem forças externas, a fim de avaliar a coerência da resposta da aeronave à uma perturbação na estrutura. Dada a ausência de forças externas, a condição de equilíbrio é a própria condição indefinida da aeronave. Dessa forma, escolheu-se, como condição inicial para a simulação, a própria condição de equilíbrio, mas com uma perturbação de 4 centímetros para cima na ponta da semi-asa direita (SMA-D). Observando a Figura 3.2, e, atentando para a matriz de orientação de cada corpo,  $A_{SB}$  (ângulos de orientação definidos no Apêndice A), conclui-se que a perturbação deve ser de  $q_1^f = -0.02 \text{ m}$ .

Após realizada a simulação, traçou-se, inicialmente, a resposta temporal das coordenadas elásticas para cada corpo, conforme apresentado na Figura 5.3.

Figura 5.3 – Resposta temporal das coordenadas elásticas,  $q_f$ , para uma perturbação na semi-asa direita de  $q_1^f = -0.02 \text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio.



Fonte: Autor.

Ressaltando que  $q_1^f$  é positivo para baixo na SMA-D, e positivo para cima na semi-asa esquerda (SMA-E), pode-se fazer as seguintes constatações:

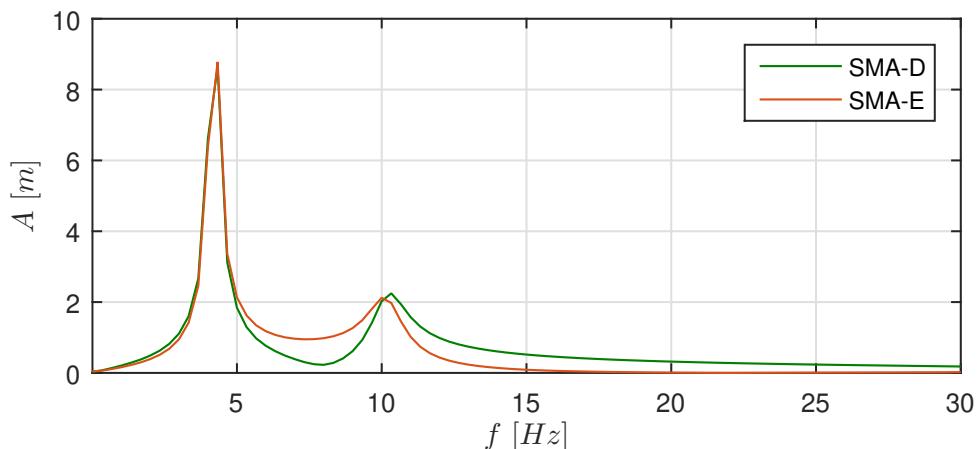
- Ao perturbar a SMA-D para cima, adiciona-se, idealmente, energia potencial elástica ao sistema. Por meio do engaste na fuselagem, parte dessa energia é transmitida para os demais corpos do sistema;
- Ao mesmo passo que a SMA-D tende a voltar para o equilíbrio, a aeronave tende a sofrer um rolamento no sentido negativo de  $\phi$ , devido aos esforços de reação no engaste. Por conta da própria inércia da semi-asa esquerda (SMA-E), há uma tendência inicial de deslocamento positivo de  $q_1^f$  referente à SMA-E, com respeito à fuselagem;
- Os modos de flexão primários da SMA-D e SMA-E, após, aproximadamente, 0.5 segundos, continuam se manifestando de forma quase simétrica até atingir o tempo de acomodação;
- Os modos de flexão secundários são excitados de forma antissimétrica desde o primeiro instante, e permanecem se manifestando em harmonia até atingir o

tempo de acomodação;

- A influência dessa perturbação na flexão das empenagens é quase insignificante. Todavia, a influência na torção apresentou amplitudes consideráveis. Acredita-se que isso esteja sendo causado devido às estimativas grosseiras de rigidez torcional para as empenagens;
- A atenuação das oscilações é relativamente lenta, pois, nesta simulação, é dada puramente pelo amortecimento estrutural.

Realizando a Transformada Rápida de Fourier, ou *Fast Fourier Transform* (FFT), nas respostas temporais do primeiro modo de flexão das semi-asas, pode-se identificar duas principais frequências, conforme a Figura 5.4.

Figura 5.4 – Transformada Rápida de Fourier da resposta temporal dos primeiros modos de flexão das semi-asas.



Fonte: Autor.

As duas frequências que concentram a maior parte da energia se referem aos modos simétricos e assimétricos quando os movimentos das duas semi-asas são combinados. No entanto, como a aeronave está livre no espaço, a fuselagem sofre um rolamento sempre no sentido contrário ao movimento da ponta das semi-asas, devido às reações de apoio nos engastes. Neste caso, a combinação de rolamento da fuselagem com a manifestação dos primeiros modos de flexão possui uma frequência levemente superior à frequência natural das semi-asas, conforme ilustrado feita na Tabela 5.1.

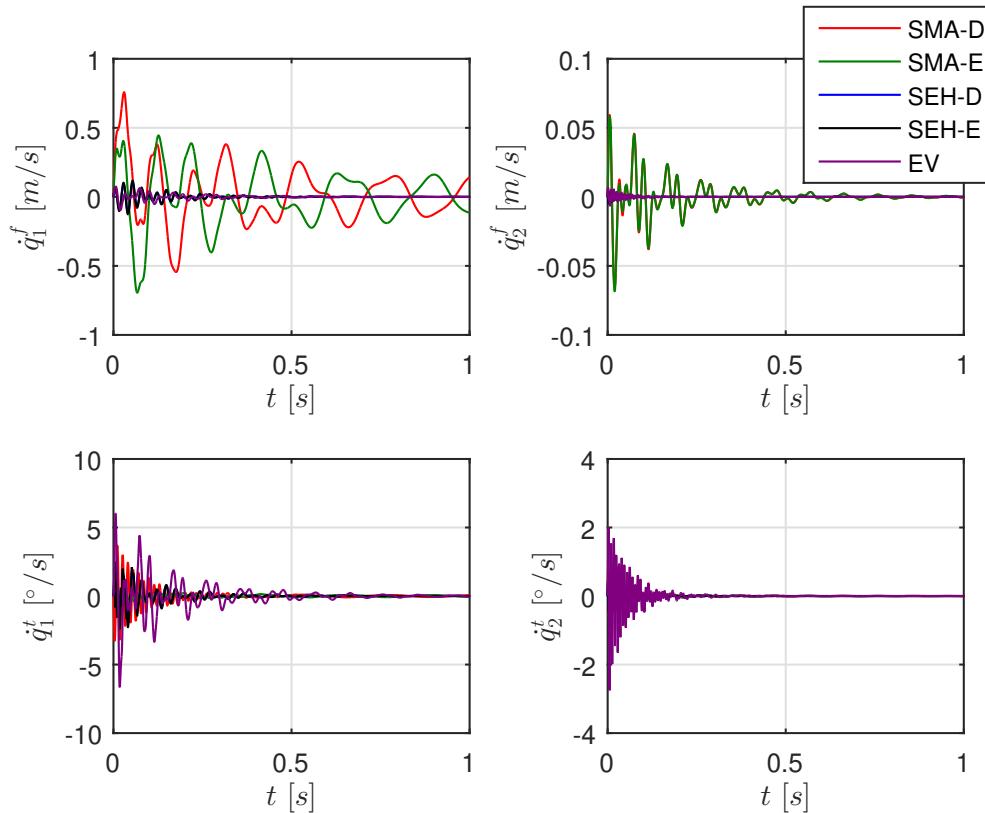
Tabela 5.1 – Comparação entre as frequências obtidas para o movimento combinado e as frequências naturais apresentadas em Pogorzelski (2010).

|                      | Modo Simétrico (Hz) | Modo Assimétrico (Hz) |
|----------------------|---------------------|-----------------------|
| Freq. Natural        | 3.45                | 8.26                  |
| Mov. Combinado (FFT) | 4.33                | 10.15                 |

Fonte: Autor.

Analizando as velocidades associadas às coordenadas elásticas, traçadas na Figura 5.5, percebe-se melhor a influência da perturbação sobre as empenagens. Por serem mais rígidas, suas oscilações são de menor amplitude e com maior frequência natural.

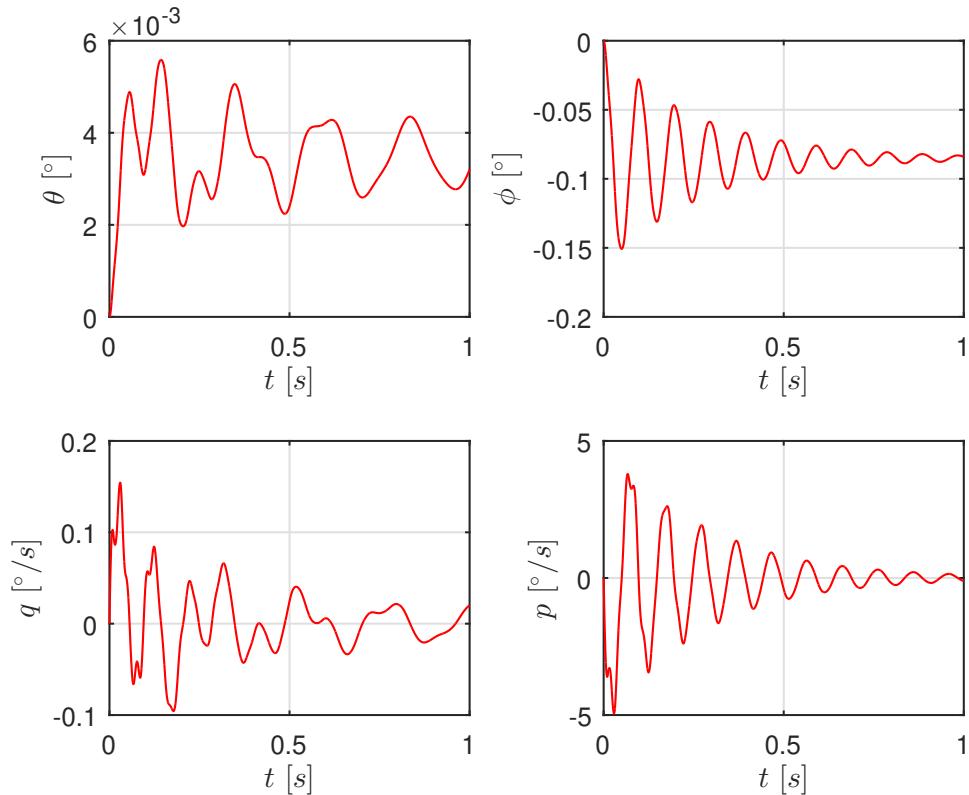
Figura 5.5 – Resposta temporal das derivadas das coordenadas elásticas,  $\dot{q}_f$ , para uma perturbação na semi-asa direita de  $q_1^f = -0.02 \text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio.



Fonte: Autor.

Na sequência, investiga-se a influência da perturbação em algumas variáveis da dinâmica de rotação. Naturalmente, traçou-se as respostas temporais dos ângulos de arfagem ( $\theta$ ), rolamento ( $\phi$ ), e, das velocidades de arfagem ( $q$ ) e rolamento ( $p$ ), conforme visto na Figura 5.6.

Figura 5.6 – Resposta temporal das variáveis,  $\theta$ ,  $q$ ,  $\phi$  e  $p$ , para uma perturbação na semi-asa direita de  $q_1^f = -0.02\text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio.

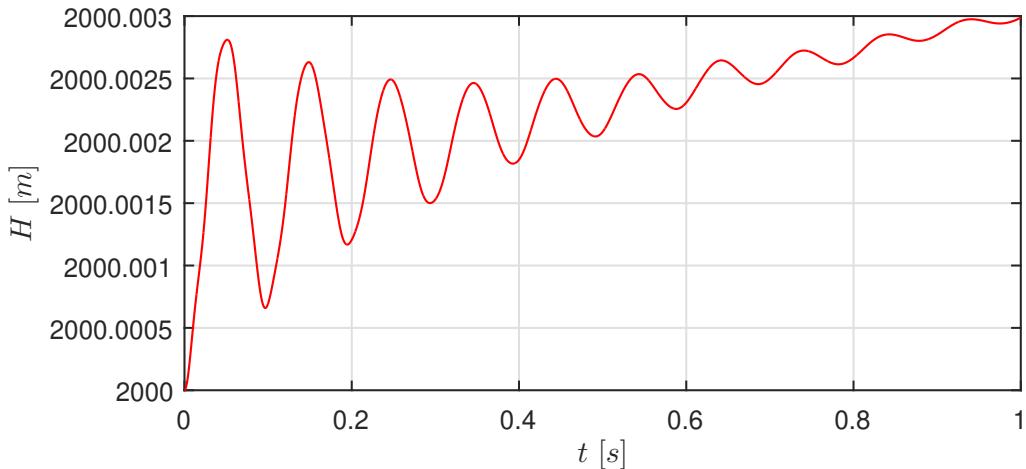


Fonte: Autor.

Conforme o previsto, a aeronave inicia com um rolamento negativo e permanece oscilando em torno do seu eixo longitudinal. A tendência de aumento do ângulo  $\theta$  é melhor explicada quando analisada em conjunto com a resposta temporal da altitude,  $H$ , traçada na Figura 5.7.

Analizando a resposta da altitude no tempo, percebe-se que, quando a SMA-D é idealmente perturbada para cima, faz-se um deslocamento do centro de massa de todo o sistema. Como não há nenhuma força externa agindo no sistema, a quantidade de movimento linear do centro de massa precisa ser conservada. Por conta disso, todo o conjunto é forçado pelas próprias forças internas a se deslocar alguns milímetros para cima conforme as oscilações vão sendo amortecidas.

Figura 5.7 – Resposta temporal da altitude,  $H$ , para uma perturbação na semi-asa direita de  $q_1^f = -0.02\text{ m}$ , a partir da condição de equilíbrio.



Fonte: Autor.

## 5.2 AVALIAÇÃO DA TEORIA DAS FAIXAS E APROXIMAÇÃO POR FUNÇÕES RACIONAIS

Neste estudo, apresenta-se os resultados obtidos utilizando a teoria das faixas, e valida-se a aproximação por funções racionais realizada para a matriz AIC.

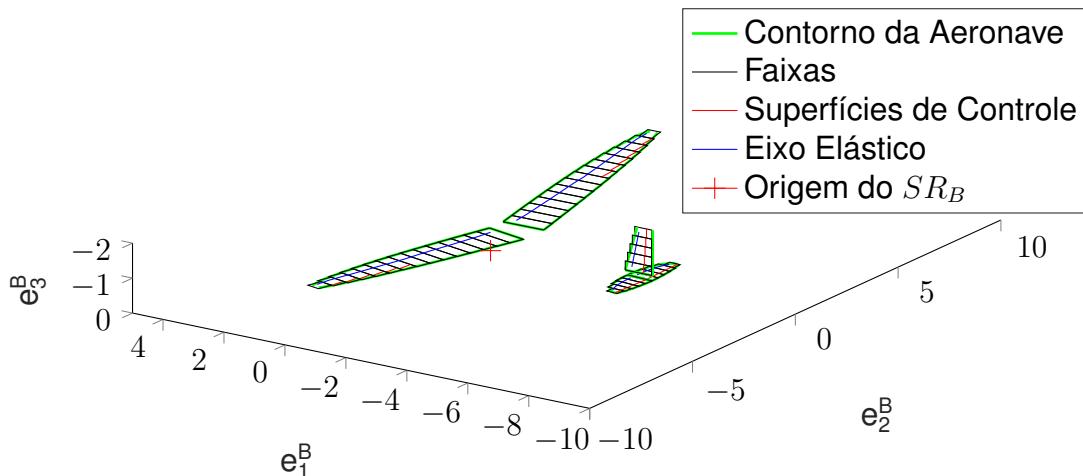
O primeiro passo para a obtenção da matriz AIC é a discretização das superfícies sustentadoras em faixas. Embora não seja necessário para a aplicação da MST, recomenda-se sempre traçar a malha no sistema de referência do corpo, para verificar visualmente possíveis equívocos cometidos pelo programador. Para fins de ilustração, reduziu-se o número de faixas em todas as superfícies sustentadoras, e traçou-se a malha aerodinâmica da aeronave utilizada na Figura 5.8.

Uma vez verificados todos os parâmetros de cada faixa, calcula-se a matriz AIC total. Para o caso de aeronaves de asa fixa, Pogorzelski (2010) sugere realizar a aproximação de Roger no intervalo de frequências reduzidas,  $k$ , de 0 a 2. Os polos de atraso aerodinâmico,  $\beta_n^{lag}$ , foram alocados na tentativa e erro, seguindo as dicas fornecidas por Pogorzelski (2010) e Silva (1994). A validação da aproximação é dada sobrepondo a matriz  $\text{AIC}_{tot}$  com a matriz aproximada,  $\text{AIC}_{ap}$ .

Alocando os polos de atraso,  $\beta^{lag} = \{0.01, 0.05, 0.20, 1.00, 2.00\}$ , conseguiu-se uma aproximação bastante satisfatória para todos os 840 termos da matriz AIC. Para ilustrar como essa validação é feita, apenas quatro deles foram ilustrados na Figura 5.9, sendo eles:

- $\text{AIC}[3, 1]$ : representa a influência da perturbação  $\Delta\alpha$  sobre a força  $\bar{Q}_{a3}$  da SMA-

Figura 5.8 – Discretização das superfícies sustentadoras em faixas.



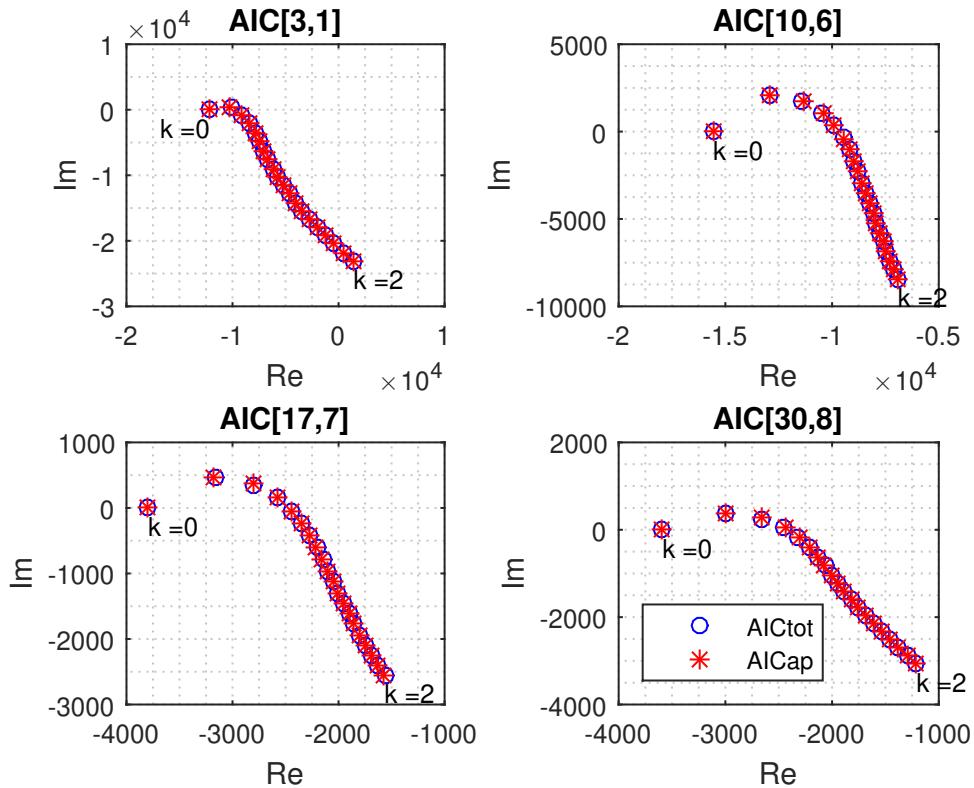
Fonte: Autor.

D. Percebe-se que para  $k = 0$  (caso quasi-estacionário), a relação é sempre um número real. Nesse caso, o sinal negativo é devido à força estar definida com sentido positivo na direção de  $e_3^B$ , que aponta para baixo;

- AIC[10, 6]: representa a influência da perturbação  $\Delta\delta_a$  sobre o momento de rolamento da SMA-E. Conforme o esperado, um comando de aileron positivo gera um momento de rolamento negativo;
- AIC[17, 7]: representa a influência da perturbação  $\Delta\delta_e$  sobre o momento de arfagem da semi-empenagem horizontal direita (SEH-D). O sinal esperado também é consistente, visto que um aumento de sustentação no profundo, claramente, resulta em um mergulho da aeronave;
- AIC[30, 8]: representa a influência da perturbação  $\Delta\delta_r$  sobre o momento de guinada da empenagem vertical (EV). Assim como os demais, o sinal é consistente com o esperado para  $k = 0$ .

O processo de análise crítica foi repetido para todas as derivadas de estabilidade e controle globais, as quais foram geradas pela simples soma das derivadas de cada superfície sustentadora. Embora diversas adaptações tenham sido feitas na aeronave, as derivadas de estabilidade e controle obtidas chegam muito próximas às obtidas por Pogorzelski (2010) para o P1.

Figura 5.9 – Aproximação da matriz AIC pelo Método dos Mínimos Quadrados.



Fonte: Autor.

### 5.3 OBTENÇÃO DA CONDIÇÃO DE EQUILÍBRIO DA AERONAVE FLEXÍVEL

O cálculo da condição de equilíbrio consiste em resolver o sistema de equações da dinâmica não linear para uma determinada condição de voo. No caso do algoritmo desenvolvido, especifica-se a velocidade, a altitude, o ângulo de derrapagem, e uma taxa de guinada, para casos de equilíbrio em curvas.

A fim de avaliar o impacto da flexibilidade na condição de equilíbrio, uma análise comparativa foi realizada. A condição de voo é uma condição de planeio com velocidade constante de 80 km/h, e altitude inicial de 2000 metros. As variáveis determinadas no cálculo das condições de equilíbrio foram resumidas na Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Comparação entre as condições de equilíbrio das aeronaves rígida e flexível, considerando uma condição de planeio à velocidade constante de 80 km/h.

| Variáveis de Equilíbrio                      | Corpo Rígido | Corpo Flexível |
|----------------------------------------------|--------------|----------------|
| Velocidade, $V$ [km/h]                       | 80           | 80             |
| Altitude, $H$ [m]                            | 2000         | 2000           |
| Ângulo de Ataque, $\alpha$ [°]               | 4.1614       | 4.0961         |
| Ângulo de Arfagem, $\theta$ [°]              | 2.6284       | 2.5871         |
| Ângulo de Rolamento, $\phi$ [°]              | 0            | 0              |
| Deflexão do Profundor, $\delta_e$ [°]        | -5.2204      | -5.0786        |
| Coord. Elast. Flexão 1 SMA-D, $q_{11}^f$ [m] | 0            | -0.046501      |
| Coord. Elast. Flexão 2 SMA-D, $q_{21}^f$ [m] | 0            | -0.002488      |
| Coord. Elast. Torção 1 SMA-D, $q_{11}^t$ [°] | 0            | 0.000104       |
| Coord. Elast. Torção 2 SMA-D, $q_{21}^t$ [°] | 0            | 0.000011       |
| Coord. Elast. Flexão 1 SMA-E, $q_{12}^f$ [m] | 0            | 0.046501       |
| Coord. Elast. Flexão 2 SMA-E, $q_{22}^f$ [m] | 0            | 0.002488       |
| Coord. Elast. Torção 1 SMA-E, $q_{12}^t$ [°] | 0            | -0.000104      |
| Coord. Elast. Torção 2 SMA-E, $q_{22}^t$ [°] | 0            | -0.000011      |
| Coord. Elast. Flexão 1 SEH-D, $q_{13}^f$ [m] | 0            | -0.000118      |
| Coord. Elast. Flexão 2 SEH-D, $q_{23}^f$ [m] | 0            | -0.000006      |
| Coord. Elast. Torção 1 SEH-D, $q_{13}^t$ [°] | 0            | 0.000063       |
| Coord. Elast. Torção 2 SEH-D, $q_{23}^t$ [°] | 0            | 0.000007       |
| Coord. Elast. Flexão 1 SEH-E, $q_{14}^f$ [m] | 0            | 0.000118       |
| Coord. Elast. Flexão 2 SEH-E, $q_{24}^f$ [m] | 0            | 0.000006       |
| Coord. Elast. Torção 1 SEH-E, $q_{14}^t$ [°] | 0            | -0.000063      |
| Coord. Elast. Torção 2 SEH-E, $q_{24}^t$ [°] | 0            | -0.000007      |
| Coord. Elast. Flexão 1 EV, $q_{15}^f$ [m]    | 0            | 0              |
| Coord. Elast. Flexão 2 EV, $q_{25}^f$ [m]    | 0            | 0              |
| Coord. Elast. Torção 1 EV, $q_{15}^t$ [°]    | 0            | 0              |
| Coord. Elast. Torção 2 EV, $q_{25}^t$ [°]    | 0            | 0              |

Fonte: Autor.

Como pode-se perceber, há uma pequena diferença nos ângulos de ataque e de arfagem, bem como na deflexão do profundor. Devido à flexibilidade, há uma leve manifestação dos modos de torção na asa, os quais atuam no sentido de aumentar o ângulo de ataque das faixas. Dessa forma, a asa consegue gerar a mesma sustentação com um ângulo de ataque global menor. O ângulo de arfagem, por sua vez, é reduzido para manter o mesmo ângulo de trajetória para os dois casos. Ainda, como

o ângulo de ataque global é menor para a aeronave flexível, o ângulo de ataque na cauda também é menor, reduzindo a amplitude da deflexão do profundor necessária para garantir o equilíbrio de momentos. Vale ressaltar que, conforme esperado, a configuração da aeronave flexível, no equilíbrio, é totalmente simétrica, com as deflexões da asa e da empunagem horizontal voltadas para cima.

Por fim, pode-se calcular o deslocamento na ponta da asa devido ao primeiro modo de flexão, dado, simplesmente, pelo dobro de  $q_1^f$ , conforme observado pelas formas modais adimensionais da Figura 3.2. Ou seja, tem-se um deslocamento na ponta da asa de, aproximadamente, 9 centímetros devido ao primeiro modo de flexão.

#### 5.4 RESPOSTA À PERTURBAÇÃO POR UMA SEMI-RAJADA

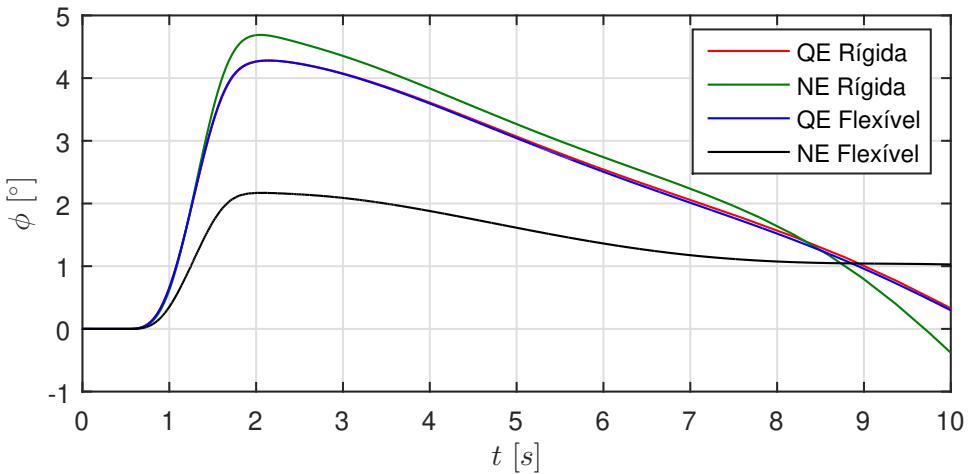
Neste último estudo numérico, buscou-se realizar uma simulação englobando todos os efeitos modelados e implementados na rotina. Dessa forma, uma simulação de rajada em meia aeronave (semi-rajada) é realizada partindo da condição de equilíbrio obtida anteriormente. A configuração da rajada utilizada é exatamente a apresentada na Figura 4.7, aplicada sobre a metade esquerda da aeronave. Para explorar o diferencial da dinâmica de multicorpos, também é feita uma análise do esforço cortante e do momento fletor na raiz da SMA-E. Como objetivo, tem-se interpretar fisicamente os resultados e comparar as respostas para os seguintes casos:

- Aeronave Rígida com modelo aerodinâmico Quasi-Estacionário (QE);
- Aeronave Flexível com modelo aerodinâmico Quasi-Estacionário (QE);
- Aeronave Rígida com modelo aerodinâmico Não Estacionário (NE);
- Aeronave Flexível com modelo aerodinâmico Não Estacionário (NE).

Inicialmente, traçou-se, na Figura 5.10, o gráfico do ângulo de rolamento,  $\phi$ , em função do tempo.

Conforme o esperado, como a rajada atinge somente o lado esquerdo da aeronave, de baixo para cima, o ângulo de ataque aerodinâmico da SMA-E aumenta, e, consequentemente, a aeronave tende a rolar para sair da rajada. Entretanto, percebe-se um resultado interessante. Quando se utiliza o modelo aerodinâmico QE, as aeronaves respondem de forma praticamente idêntica, independente se a estrutura é tratada como rígida ou flexível. Ainda, percebe-se que o modelo NE apresenta uma resposta mais agressiva quando se utiliza corpo rígido, e mais amortecida, quando se utiliza corpo flexível.

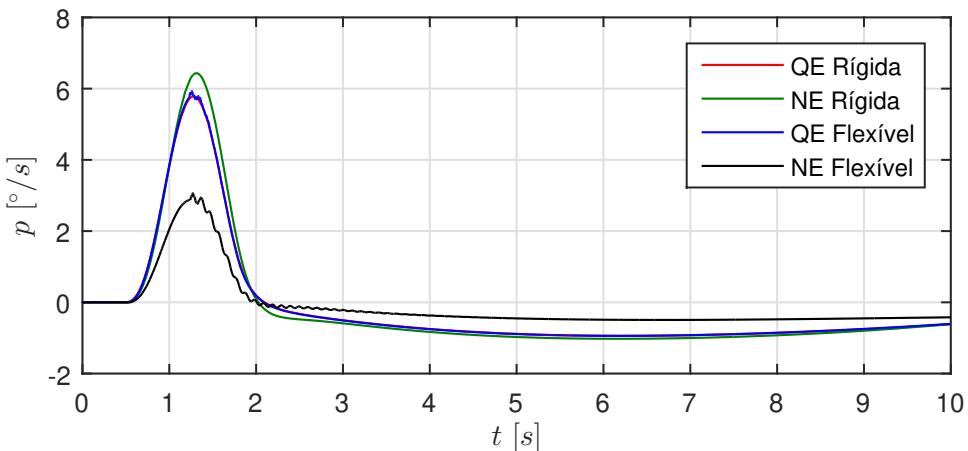
Figura 5.10 – Resposta temporal do ângulo de rolamento,  $\phi$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave.



Fonte: Autor.

Na Figura 5.11, referente à velocidade de rolamento,  $p$ , o mesmo efeito é detectado, entretanto, com uma leve oscilação para os corpos flexíveis, a partir de 1.3 segundos.

Figura 5.11 – Resposta temporal da velocidade angular,  $p$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave.

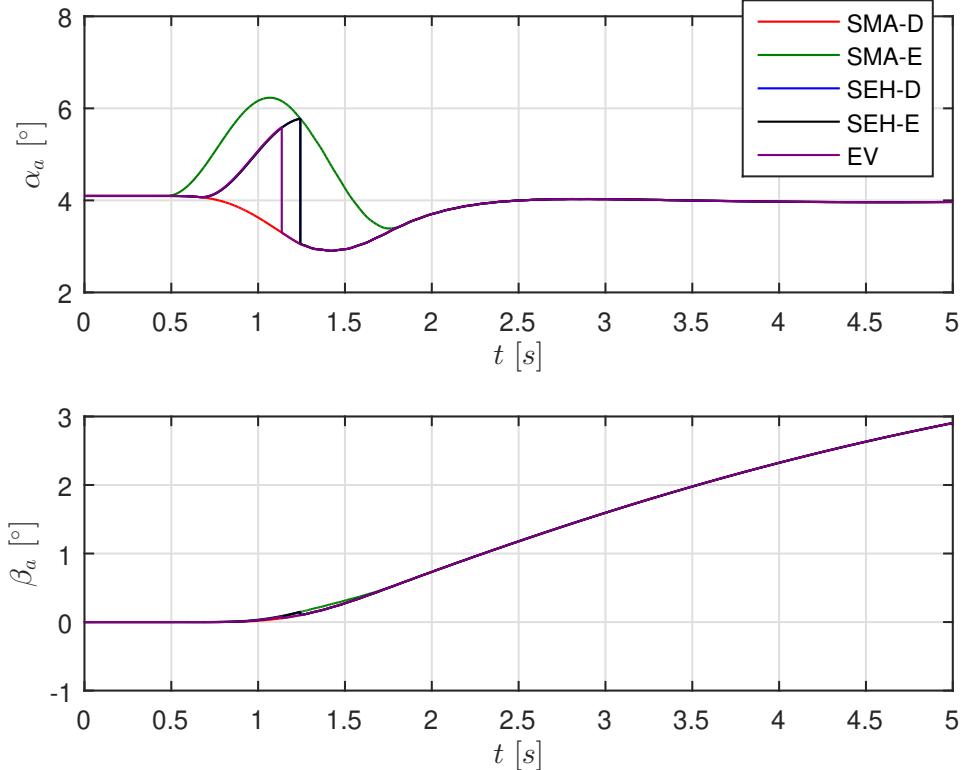


Fonte: Autor.

Para investigar o motivo da oscilação, traçou-se os ângulos de ataque e derapagem aerodinâmicos,  $\alpha_a$  e  $\beta_a$ , para cada superfície da aeronave flexível. Esses ângulos já levam em conta o efeito da rajada sobre cada superfície aerodinâmica. O resultado é dado na Figura 5.12.

Como pode-se perceber, a SMA-E é a primeira a sentir o efeito da rajada, visto que, para computar a magnitude da rajada, utiliza-se a posição inercial do sistema

Figura 5.12 – Resposta temporal dos ângulos de ataque e derrapagem aerodinâmicos,  $\alpha_a$  e  $\beta_a$ , respectivamente, para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave.



Fonte: Autor.

$SR_S$  de cada corpo. Alguns instantes depois, as empenagens sentem, ao mesmo tempo, o efeito da rajada, até que o ângulo de ataque aerodinâmico cai abruptamente. Essa queda abrupta ocorre nas empenagens porque a aeronave, ao sofrer uma derrapagem e um rolamento positivos, faz com que a cauda escape da rajada após alguns instantes. A SMA-E, por sua vez, não chega a escapar da rajada porque sua origem está deslocada por metade da largura da fuselagem, como pode ser visto na Figura 5.8.

Conforme ilustrado na Figura 4.7, o modelo de rajada apresenta descontinuidades nos limites referentes à posição inercial  $y_0$ . Por conta disso, juntamente à queda abrupta do ângulo de ataque aerodinâmico, ocorre uma queda da força de sustentação. Como consequência, tem-se a excitação de todos os corpos, devido aos vínculos de engaste na fuselagem.

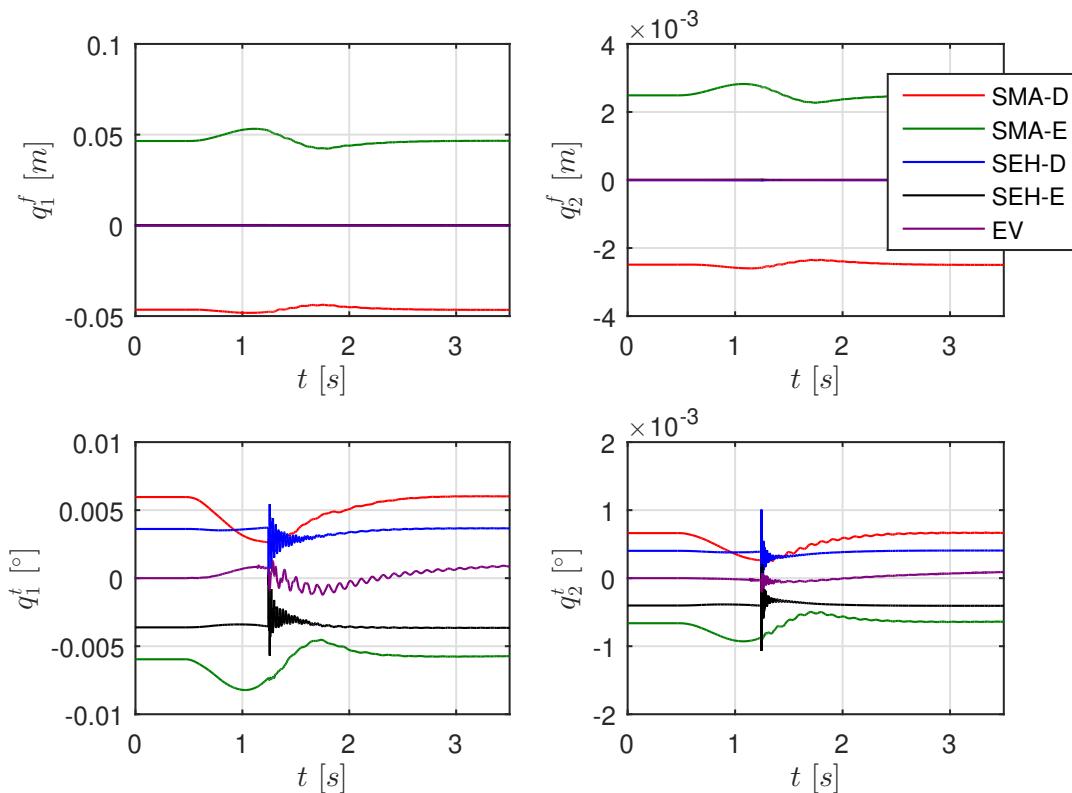
Analizando os gráficos das coordenadas elásticas, e suas respectivas velocidades, traçados nas Figuras 5.13 e 5.14, respectivamente, observa-se que:

- A resposta de  $q_1^f$ , devido à rajada na SMA-E, ocorre com maior amplitude quando comparada à resposta da SMA-D. Isso mostra a forte atuação do amortecimento

aerodinâmico;

- Para esse tipo de perturbação (queda de sustentação abrupta), as coordenadas elásticas referentes aos modos de flexão e torção se manifestam, para o primeiro e segundo modo, aproximadamente, da mesma forma, mas com ordens de magnitude diferentes.

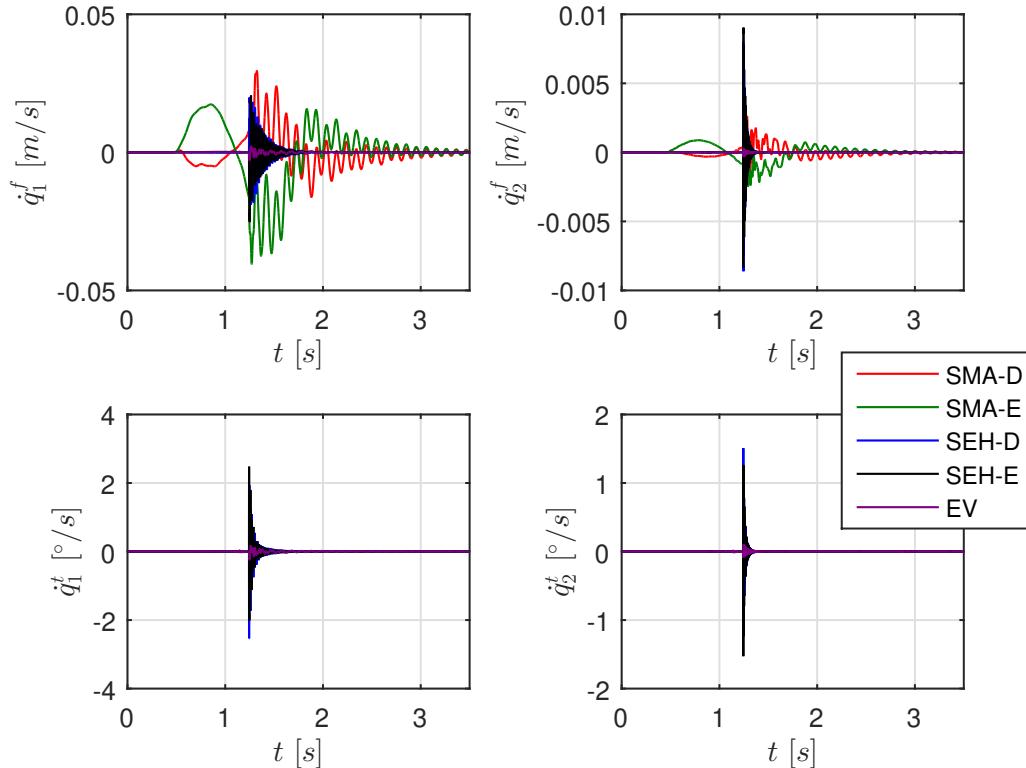
Figura 5.13 – Resposta temporal das coordenadas elásticas,  $q_f$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave flexível, com modelo de aerodinâmica não estacionária.



Fonte: Autor.

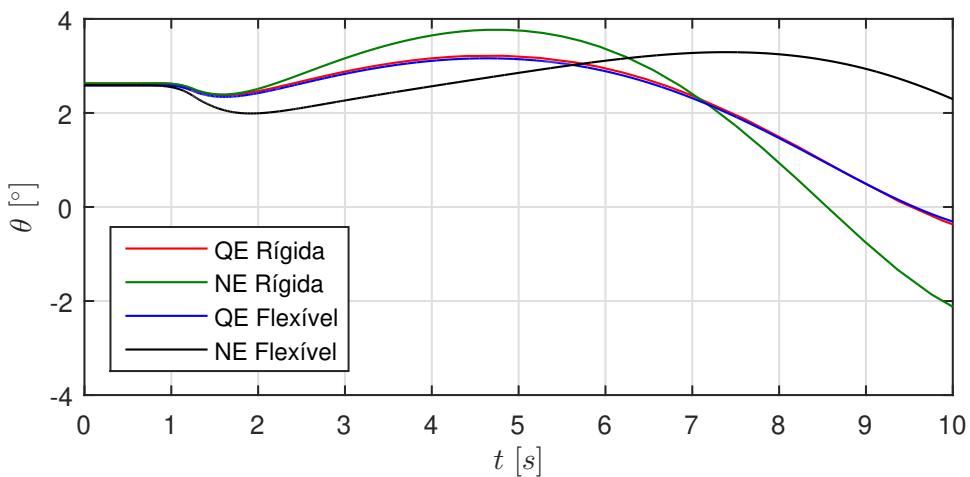
Na sequência, traçou-se as variáveis da dinâmica de rotação no plano longitudinal,  $\theta$  e  $q$  nas Figuras 5.15 e 5.16. Analisando os resultados obtidos, percebe-se um efeito diferente do ocorrido para  $\phi$  e  $p$ . Agora, identifica-se dois padrões bem definidos de respostas, divididos pelo modelo aerodinâmico: aquelas que utilizam a modelagem QE, e as que utilizam NE. Para o caso QE, a flexibilidade praticamente não afeta a resposta, mas, quando considerado o modelo NE, percebe-se uma diferença significativa, sendo a resposta da aeronave flexível potencializada pelos efeitos não estacionários.

Figura 5.14 – Resposta temporal das derivadas das coordenadas elásticas,  $\dot{q}_f$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave flexível, com modelo de aerodinâmica não estacionária.



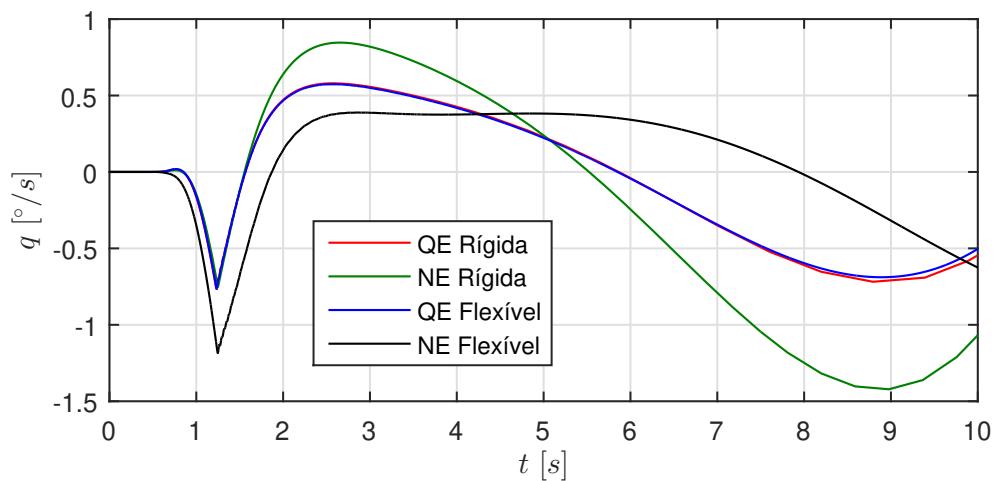
Fonte: Autor.

Figura 5.15 – Resposta temporal do ângulo de arfagem,  $\theta$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave.



Fonte: Autor.

Figura 5.16 – Resposta temporal da velocidade angular,  $q$ , para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave.



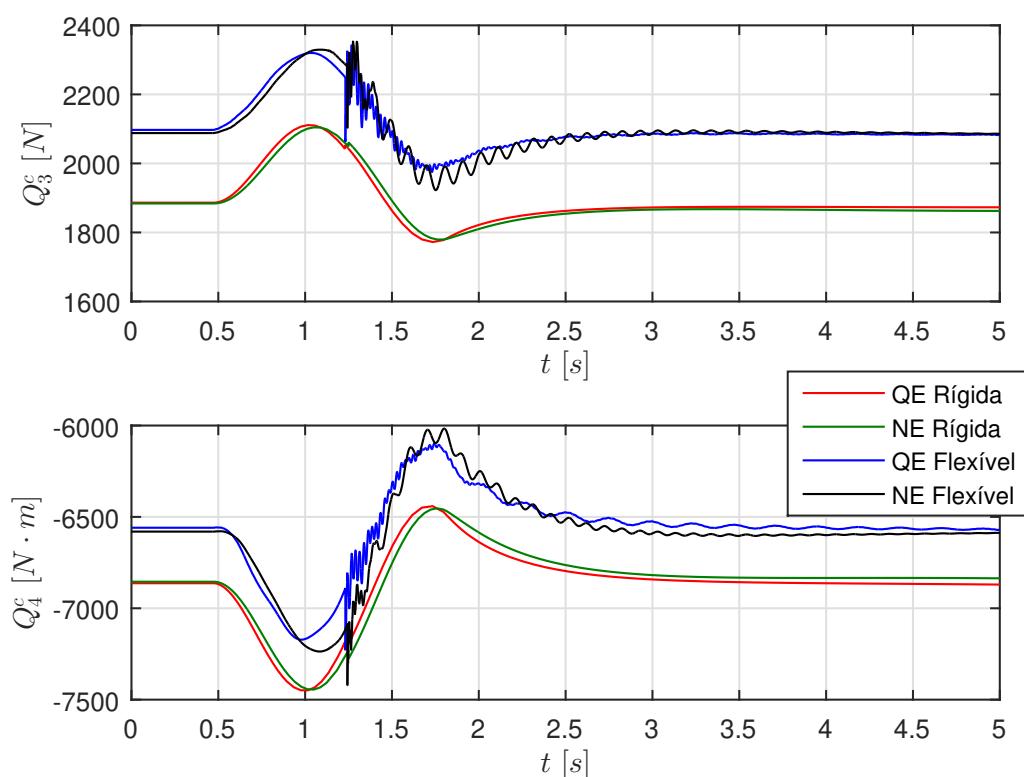
Fonte: Autor.

Ainda, pode-se perceber que o modelo QE causa movimentos de arfagem mais ágeis, visto visto que as cargas aerodinâmicas sofrem mudanças instantâneas, enquanto que a aerodinâmica NE possui uma dinâmica. As diferenças nas amplitudes dos movimentos, por sua vez, devem-se ao fato do modelo NE levar em conta as taxas de variação dos ângulos aerodinâmicos,  $\dot{\alpha}_a$  e  $\dot{\beta}_a$ , cujas intensidades são significativas em alguns pontos da rajada.

Por fim, para investigar a previsão das cargas na raiz da SMA-E, traçou-se os esforços cortantes e momentos fletores, conforme a Figura 5.17.

Conforme pode ser observado, há uma diferença significativa entre forças e momentos de reação na condição de equilíbrio, para aeronaves rígidas e flexíveis. Ainda, é possível concluir que o modelo NE prevê forças de reação bastante oscilatórias, quando comparado ao QE, para a aeronave flexível. Todavia, quando se trata da aeronave rígida, não há diferença significativa entre os modelos QE e NE, e os esforços de reação apresentam um caráter suave e bastante amortecido.

Figura 5.17 – Resposta temporal do esforço cortante,  $Q_3^c$ , e do momento fletor,  $Q_4^c$ , na raiz da semi-asa esquerda, para uma perturbação com semi-rajada sobre o lado esquerdo da aeronave.



Fonte: Autor.

## 6 CONCLUSÃO

Neste capítulo, apresenta-se as considerações finais do trabalho, as quais foram organizadas nos itens a seguir:

- Neste trabalho, foi desenvolvida uma modelagem da dinâmica de multicorpos flexíveis voltada à aplicação em aeronaves flexíveis. Dadas todas as hipóteses simplificadoras adotadas, como pequenas deformações e aerodinâmica linear, a aplicação dessa modelagem se reduz ao escopo de aeronaves pouco flexíveis, em condições de voo bem comportadas;
- Ao utilizar a teoria de multicorpos para a modelagem de aeronaves flexíveis, tornou-se possível a utilização de modelos estruturais mais simplificados, como o de uma simples viga engastada. Por outro lado, na ausência de dados experimentais, percebeu-se que um novo desafio é criado: estimar corretamente a distribuição de massa de todos os corpos sem afetar a resposta natural da aeronave, ou, até mesmo, a sua estabilidade;
- Quanto ao cômputo dos efeitos de aerodinâmica não estacionária, encontrou-se dificuldade em calcular as derivadas dos estados aerodinâmicos. Um integrador de passo e ordem variáveis foi utilizado para tornar as simulações mais rápidas, entretanto, devido aos passos de tempo intermediários realizados, não se recomenda a utilização do método das diferenças finitas para estimar derivadas. Dessa forma, para contornar o problema, utilizou-se as matrizes Jacobianas da dinâmica, um modelo linearizado da aeronave;
- Com as abordagens utilizadas para as modelagens dinâmica e aerodinâmica, pode-se obter quase todas expressões de forma analítica, o que acaba evitando muitas etapas de cálculo numérico, reduzindo o custo computacional. Entretanto, devido à extensão das expressões obtidas, tanto para as integrais de forma, como para a matriz AIC, não foi possível incluí-las no trabalho;
- Devido ao grande volume de dados gerados em cada simulação, escolheu-se apenas alguns para apresentar no trabalho. Destaca-se um estudo bastante interessante de perturbação por rajada em metade da aeronave, o qual só foi possível graças ao desmembramento das derivadas de estabilidade e controle para as forças individuais em cada superfície aerodinâmica;
- Embora os resultados apresentados careçam de validações, foi possível, por meio de uma análise crítica, verificar sentido físico e coerência em todas as variáveis envolvidas nas simulações. Assim sendo, considera-se como satisfatórios

os resultados obtidos, mostrando coerência na modelagem proposta e abrindo caminho para diversos aprimoramentos no futuro;

- Por fim, com a ferramenta computacional desenvolvida, tornam-se possíveis outros estudos numéricos, como análises de estabilidade, previsão de ocorrência de *flutter*, e, até mesmo, projetos de sistema de controle.

## 6.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Para trabalhos futuros, sugere-se:

- Realizar a validação do algoritmo implementado para a teoria das faixas;
- Investigar e aprimorar as estimativas de massa e momentos de inércia das superfícies sustentadoras, levando em conta distribuições não uniformes;
- Investigar e aprimorar os modelos constitutivos para incluir materiais anisotrópicos, pensando na aplicação em asas de material compósito;
- Investigar a influência da consideração dos termos de acoplamento inercial na matriz de massa generalizada;
- Realizar uma análise comparativa semelhante à realizada com a semi-rajada, mas utilizando perturbações do tipo dublê nos controles;
- Investigar e implementar novas correções para o modelo aerodinâmico, considerando efeitos de ponta de asa e interferência entre as faixas;
- Generalizar o modelo de viga para torná-lo tridimensional, inserindo modos de flexão no plano desconsiderado, a fim de investigar os seus efeitos na dinâmica de voo;
- Desenvolver outros modelos estruturais, bem como realizar a comparação com um modelo de Elementos Finitos;
- Realizar estudos numéricos de análise de estabilidade da aeronave, bem como a previsão de *flutter*;
- Adaptar superfícies de controle extras na aeronave e projetar um sistema de controle dos modos flexíveis, utilizando a técnica de Controle por Mapeamentos Exponenciais.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BARMBY, J. G.; CUNNINGHAM, H. J.; GARRICK, I. E. Study of effects of sweep on the flutter of cantilever wings. In: **NACA Technical Reports**. 1014. ed. Langley Field, VA, United State: National Advisory Committee for Aeronautics, 1951.
- BISPLINGHOFF, R. L.; ASHLEY, H.; L.HALFMAN, R. **Aeroelasticity**. [S.I.]: Dover Publications, Inc., 1983. ISBN 0486691896, 9780486691893.
- BLEVINS, R. D. **Formulas for natural frequency and mode shape**. [S.I.]: Van Nostrand Reinhold, 1979. ISBN 0442207107, 9780442207106.
- BREZHNEVA, O.; TRET'YAKOV, A. A.; WRIGHT, S. E. A short elementary proof of the Lagrange multiplier theorem. **Optimization Letters**, v. 6, n. 8, p. 1597—1601, 2011.
- CASTELLANI, M.; COOPER, J.; LEMMENS, Y. Nonlinear Static Aeroelasticity of High-Aspect-Ratio-Wing Aircraft by Finite Element and Multibody Methods. **Journal of Aircraft**, p. 548–560, 2017.
- CASTRICHINI, A. et al. Gust and Ground Loads Integration for Aircraft Landing Loads Prediction. **Journal of Aircraft**, v. 55, n. 1, p. 184–194, 2018.
- CAVAGNA, L.; MASARATI, P.; QUARANTA, G. Simulation of maneuvering flexible aircraft by coupled multibody/cfd. In: **ECCOMAS Thematic Conference on Multibody Dynamics**. Poland: [s.n.], 2009.
- DUNN, P.; DUGUNDJI, J. Nonlinear stall flutter and divergence analysis of cantilevered graphite/epoxy wings. **AIAA Journal**, p. 153–162, 1992.
- HOFF, R. I.; GRATTON, G. B. Estimating Sailplane Mass Properties. **Technical Soaring**, v. 34, n. 4, p. 118—124, 2010.
- HOFSTEE, J. et al. A variable, fully flexible dynamic response tool for special investigations (varloads). In: **Proceedings International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics**. Amsterdam: Nederlandse Vereniging voor Luchtvaarttechniek, 2003.
- KALTHOF, R. L. C. **Multibody Dynamics Modeling of Flexible Aircraft Flight Dynamics: Load Prediction in the Preliminary Design Phase**. 2014. 150 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeroespacial) — Universidade Tecnológica de Delft, Delft, 2014.
- KIER, T. Comparison of Unsteady Aerodynamic Modelling Methodologies with Respect to Flight Loads Analysis. **AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference and Exhibit**, p. 1–14, 2005.
- KRUGER, W. R. Multibody dynamics for the coupling of aeroelasticity and flight mechanics of highly flexible structures. In: **International Forum on Aeroelasticity and Structural Dynamics**. Stockholm: IFASD, 2007.

ORZECHOWSKI, G.; MATIKAINEN, M. K.; MIKKOLA, A. M. Inertia forces and shape integrals in the floating frame of reference formulation. **Nonlinear Dynamics**, v. 88, n. 3, p. 1953—1968, 2017.

POGORZELSKI, G. **Dinâmica de Aeronaves Flexíveis Empregando Teoria das Fai-xas Não-Estacionária**. 2010. 326 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Aeronáutica e Mecânica) — Instituto Tecnológico de Aeronáutica, São José dos Campos, 2010.

RAO, S. **Mechanical vibrations in SI units**. 6ed.. ed. [S.I.]: Pearson, 2018. ISBN 978-0-134-36130-7, 978-1-292-17860-4, 978-1-292-17860-8, 9781292178615, 1292178612.

SCHIAVO, F.; FERRETTI, G.; VIGANO, L. Object-oriented modelling and simulation of flexible multibody thin beams in modelica with the finite element method. In: **Proceedings of the 4th International Modelica Conference**. Hamburg: [s.n.], 2005.

SHABANA, A. **Dynamics of Multibody Systems**. 4. ed. [S.I.]: Cambridge University Press, 2013. ISBN 978-1-107-04265-0.

SILVA, R. G. A. da. **Análise Aeroelástica no Espaço de Estados Aplicada a Aeronaves de Asa Fixa**. 1994. 196 f. Dissertação (Mestrado em Engenharia Mecânica) — Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 1994.

SPIECK, M. **Ground Dynamics of Flexible Aircraft in Consideration of Aerodynamic Effects**. 2004. 133 p. Tese (Doutorado) — Technischen Universität München, München, 2004.

THEODORSEN, T. General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter. In: **NACA Technical Reports**. 496. ed. Langley Field, VA, United State: National Advisory Committee for Aeronautics, 1935.

VEPA, R. **Flight Dynamics, Simulation, and Control: For Rigid and Flexible Aircraft**. [S.I.]: CRC Press, 2014. ISBN 978-1-4665-7336-9.

WASZAK, M. R.; SCHMIDT, D. K. Flight dynamics of aeroelastic vehicles. **Journal of Aircraft**, v. 25, n. 6, p. 563—571, 1988. ISSN 0021-8669.

YATES, E. C. Calculation of flutter characteristics for finite-span swept or unswept wings at subsonic and supersonic speeds by a modified strip analysis. In: **NACA Research Memorandum**. Langley Field, VA, United State: National Advisory Committee for Aeronautics, 1958.

## APÊNDICE A – DADOS DA AERONAVE

Os dados aqui apresentados são resultados de estimativas, com base nos dados fornecidos por Pogorzelski (2010) para o planador P1. O eixo elástico para a asa é considerado o mesmo calculado por Pogorzelski (2010). Para realizar o desmembramento da massa entre os diferentes corpos, utilizou-se como referência as razões mássicas apresentadas por Hoff e Gratton (2010) para planadores.

As características geométricas estimadas para a aeronave adaptada foram resumidas nas Tabelas A.1, A.2, A.3, A.4 e A.5.

Tabela A.1 – Principais parâmetros geométricos da aeronave.

| Parâmetros Globais da Aeronave | Medida | Unidade     |
|--------------------------------|--------|-------------|
| Comprimento                    | 8.259  | <i>m</i>    |
| Altura                         | 1.74   | <i>m</i>    |
| Massa vazia                    | 320    | <i>kg</i>   |
| Massa máxima                   | 520    | <i>kg</i>   |
| Velocidade de estol            | 70     | <i>km/h</i> |
| Velocidade para nunca exceder  | 210    | <i>km/h</i> |
| Área ( $S_{ref}$ )             | 16.01  | $m^2$       |
| Envergadura ( $B_{ref}$ )      | 16.5   | <i>m</i>    |
| Alongamento ( $AR$ )           | 17     | -           |
| Distância do nariz do C.G.     | 2.9427 | <i>m</i>    |

Fonte: (POGORZELSKI, 2010).

Tabela A.2 – Principais parâmetros da fuselagem.

| Parâmetros da Fuselagem   | Medida          | Unidade   |
|---------------------------|-----------------|-----------|
| Posição do C.G. no $SR_B$ | [ -0.17, 0, 0 ] | <i>m</i>  |
| Massa                     | 376.91          | <i>kg</i> |
| $I_{xx}$                  | 802.98          | $kg.m^2$  |
| $I_{yy}$                  | 4913.82         | $kg.m^2$  |
| $I_{zz}$                  | 4537.21         | $kg.m^2$  |
| $I_{xy}$                  | 0               | $kg.m^2$  |
| $I_{xz}$                  | 514.99          | $kg.m^2$  |
| $I_{yz}$                  | 0               | $kg.m^2$  |

Fonte: Autor.

Tabela A.3 – Principais parâmetros geométricos das semi-asas.

| Parâmetros Genéricos das Semi-Asas     | Medida                     | Unidade |
|----------------------------------------|----------------------------|---------|
| Comprimento ( $L$ ) no $SR_S$          | 7.9538                     | $m$     |
| Massa                                  | 50                         | $kg$    |
| Centro aerodinâmico ( $a_{cn}$ )       | -0.445                     | -       |
| Corda média aerodinâmica ( $C_{ref}$ ) | 1.02                       | $m$     |
| $C_{l\alpha}$                          | 6.39                       | -       |
| $C_{m0}$                               | -0.078                     | -       |
| Razão Sup. Contr. / Corda              | 0.225                      | -       |
| Início Sup. Contr. ( $Li/L$ )          | 0.5                        | -       |
| Final Sup. Contr. ( $Lf/L$ )           | 0.94                       | -       |
| Amortecimento estrutural ( $\zeta$ )   | 0.025                      | -       |
| Parâmetros Específicos da SMA-D        |                            |         |
| Posição ( $\bar{R}_o$ ) no $SR_B$      | [-0.4578, 0.366, -0.7576]  | $m$     |
| Incidência ( $i_0$ )                   | 3                          | °       |
| Enflechamento ( $\Lambda_0$ )          | -7.6                       | °       |
| Diedro ( $\sigma_0$ )                  | 3                          | °       |
| $\alpha_0$ na raiz                     | -4.53                      | °       |
| $\alpha_0$ na ponta                    | -3.66                      | °       |
| Parâmetros Específicos da SMA-E        |                            |         |
| Posição ( $\bar{R}_o$ ) no $SR_B$      | [-0.4578, -0.366, -0.7576] | $m$     |
| Incidência ( $i_0$ )                   | -3                         | °       |
| Enflechamento ( $\Lambda_0$ )          | -7.6                       | °       |
| Diedro ( $\sigma_0$ )                  | 177                        | °       |
| $\alpha_0$ na raiz                     | 4.53                       | °       |
| $\alpha_0$ na ponta                    | 3.66                       | °       |

Fonte: Autor.

Tabela A.4 – Principais parâmetros geométricos das semi-empenagens horizontais.

| Parâmetros Genéricos das Semi-EH       | Medida                  | Unidade  |
|----------------------------------------|-------------------------|----------|
| Comprimento ( $L$ ) no $SR_S$          | 1.53                    | $m$      |
| Massa                                  | 7.5                     | $kg$     |
| Centro aerodinâmico ( $a_{cn}$ )       | -0.53                   | -        |
| Eixo elástico ( $a$ )                  | -0.5                    | -        |
| Corda média aerodinâmica ( $C_{ref}$ ) | 0.5                     | $m$      |
| $C_{l\alpha}$                          | 5.54                    | -        |
| $C_{m0}$                               | 0                       | -        |
| Razão Sup. Contr. / Corda              | 0.25                    | -        |
| Início Sup. Contr. ( $Li/L$ )          | 0                       | -        |
| Final Sup. Contr. ( $Lf/L$ )           | 1                       | -        |
| Amortecimento estrutural ( $\zeta$ )   | 0.025                   | -        |
| <b>Parâmetros Específicos da SEH-D</b> |                         |          |
| Posição ( $\bar{R}_o$ ) no $SR_B$      | $[-4.7027, 0, -0.1176]$ | $m$      |
| Incidência ( $i_0$ )                   | 2                       | $^\circ$ |
| Enflechamento ( $\Lambda_0$ )          | 0                       | $^\circ$ |
| Diedro ( $\sigma_0$ )                  | 0                       | $^\circ$ |
| $\alpha_0$                             | 0                       | $^\circ$ |
| <b>Parâmetros Específicos da SEH-E</b> |                         |          |
| Posição ( $\bar{R}_o$ ) no $SR_B$      | $[-4.7027, 0, -0.1176]$ | $m$      |
| Incidência ( $i_0$ )                   | -2                      | $^\circ$ |
| Enflechamento ( $\Lambda_0$ )          | 0                       | $^\circ$ |
| Diedro ( $\sigma_0$ )                  | 180                     | $^\circ$ |
| $\alpha_0$                             | 0                       | $^\circ$ |

Fonte: Autor.

Tabela A.5 – Principais parâmetros geométricos da empenagem vertical.

| Parâmetros da Empenagem Vertical (EV)  | Medida              | Unidade  |
|----------------------------------------|---------------------|----------|
| Comprimento ( $L$ ) no $SR_S$          | 1.3                 | $m$      |
| Massa                                  | 10                  | $kg$     |
| Centro aerodinâmico ( $a_{cn}$ )       | -0.54               | -        |
| Eixo elástico ( $a$ )                  | -0.5                | -        |
| Corda média aerodinâmica ( $C_{ref}$ ) | 0.65                | $m$      |
| $C_{l\alpha}$                          | 5.12                | -        |
| $C_{m0}$                               | 0                   | -        |
| Razão Sup. Contr. / Corda              | 0.3                 | -        |
| Início Sup. Contr. ( $Li/L$ )          | 0                   | -        |
| Final Sup. Contr. ( $Lf/L$ )           | 1                   | -        |
| Amortecimento estrutural ( $\zeta$ )   | 0.025               | -        |
| Posição ( $\bar{R}_o$ ) no $SR_B$      | [-4.6358, 0, -0.25] | $m$      |
| Incidência ( $i_0$ )                   | 0                   | $^\circ$ |
| Enflechamento ( $\Lambda_0$ )          | 0                   | $^\circ$ |
| Diédro ( $\sigma_0$ )                  | 90                  | $^\circ$ |
| $\alpha_0$                             | 0                   | $^\circ$ |

Fonte: Autor.