



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE MESTRADO PROFISSIONAL EM
MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL -
PROFMAT**



**PRODUTO EDUCACIONAL
Transformações Geométricas e Matrizes**

Luciana Zanchettin ¹
Janice Rachelli ²

1 INFORMAÇÕES GERAIS

1.1 Objeto de conhecimento: Transformações Geométricas e Matrizes

1.2 Competências: Utilizar estratégias, conceitos e procedimentos para interpretar situações no contexto das transformações geométricas e matrizes; modelar e resolver problemas que envolvam variáveis socioeconômicas ou técnico-científicas, usando representações algébricas.

1.3 Habilidade presente na Base Nacional Comum Curricular – BNCC:

- (EM13MAT105) Utilizar as noções de transformações isométricas (translação, reflexão, rotação e composições destas) e transformações homotéticas para analisar diferentes produções humanas como construções civis, obras de arte, entre outras.

1.4 Recursos:

- Computador, notebook ou celular com acesso à internet.
- Software GeoGebra.
- Plataforma Khan Academy.
- Livro didático.

1.5 Duração: 6 encontros presenciais (2 horas cada).

2 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

¹ Mestranda pelo Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UFSM, Santa Maria, RS – Brasil. Orientanda.

² Doutora em Ensino de Ciências e Matemática/UFN. Professora do Departamento de Matemática da Universidade Federal de Santa Maria/UFSM, Santa Maria, RS – Brasil. Orientadora.

A sequência didática foi planejada para ocorrer em seis encontros presenciais, em um total de 22 atividades, conforme indicada no Quadro 1.

Quadro 1 – Organização das aulas.

AULAS	TÓPICOS	ATIVIDADES
Aula 0	Apresentação da proposta, organização e motivação	-
Aula 1	Geometria de coordenadas e matrizes	1, 2, 3, 4 e 5
Aula 2	Translação e adição de matrizes	6, 7, 8 e 9
Aula 3	Reflexão, rotação e multiplicação de matrizes	10, 11, 12 ,13, 14 e 15
Aula 4	Escala	16, 17, 18 e 19
Aula 5	Aplicando aprendizagens	20, 21 e 22

2.1 Síntese da aplicação

Os encontros foram planejados com base na concepção de Sala de Aula Invertida, ou seja, foram divididas em três etapas denominadas Pré-aula, Aula e Pós-aula. As atividades planejadas para Pré-aula devem ser realizadas individualmente e no tempo que antecede o encontro presencial. Estas tarefas constituem pesquisa livre e estudos na plataforma educacional e digital Khan Academy, a partir de vídeos, artigos e testes recomendados pela professora. Os estudantes acessam esses materiais quando se inscrevem na turma, utilizando um código, previamente cadastrado e fornecido pela professora. Esse cadastro permite que a professora acompanhe a frequência dos estudantes e fornece índices de desempenho individuais e coletivos. Esses índices devem ser utilizados para avaliação diagnóstica, ajustes no planejamento e criação de critérios para organização de grupos de estudos.

A Aula (encontro presencial) também será organizada em três etapas: Na primeira etapa deve ser fornecido o feedback do desempenho da Pré-aula, dando maior ênfase aos aspectos positivos e orientando os alunos a refletir sobre a aplicação dos conteúdos estudados. É importante também apresentar os objetivos, deixar claro como os alunos serão avaliados e registrar no quadro um roteiro da proposta, para que os estudantes possam se organizar no tempo disponível. É nesse momento também que a professora compõe os grupos, levando em consideração alguns critérios tais como: disponibilidade de recursos tecnológicos, acesso à internet, desempenho nas atividades recomendadas na plataforma Khan Academy, durante a Pré-aula.

Na etapa seguinte, os estudantes realizam as atividades da Aula em grupos, utilizando a plataforma Khan Academy, o software GeoGebra, livros didáticos e solicitando auxílio à professora, quando necessário, e por fim, cada grupo deverá apresentar as aprendizagens aos demais grupos, de acordo com as combinações do início da aula. Na última etapa os alunos receberão as orientações sobre as atividades que devem ser realizadas antes do próximo

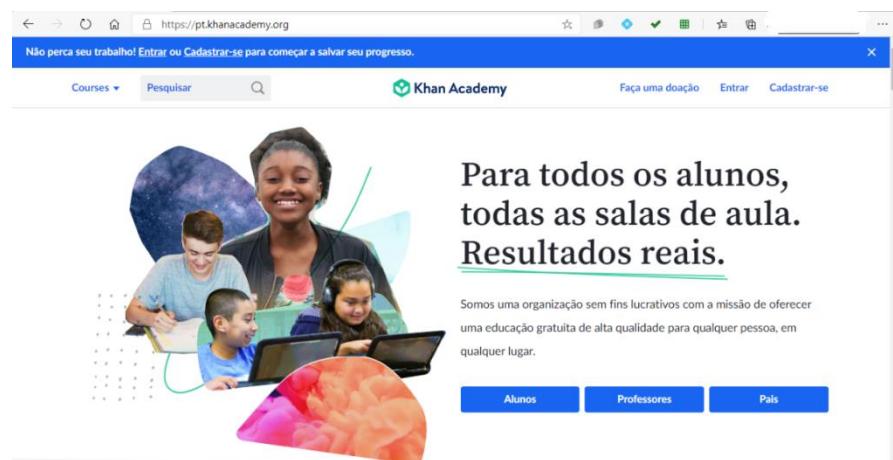
encontro e realizarão uma avaliação coletiva do desempenho da turma apresentando sugestões para contribuir com os ajustes da proposta.

Entendemos que o professor deve atuar como mentor, mediando as relações dos estudantes em cada grupo e entre os grupos ofertando recursos para o desenvolvimento das tarefas, dando suporte quanto aos recursos tecnológicos, fazendo ajustes nas propostas quando necessário e principalmente levando-os a reflexões, de modo que sejam responsáveis pela própria aprendizagem, ou seja, o aluno aprende sozinho ou com a troca entre colegas, assim como é preconizado nas metodologias ativas.

Na Pós-aula os estudantes realizam atividades complementares que podem ser utilizadas como um dos critérios para avaliar aprendizagens.

2.2 Acesso a Khan Academy e GeoGebra

O acesso na plataforma Khan Academy pode ser feito pelo link, <https://pt.khanacademy.org/> e poderá ser escolhido o cadastro como professor, aluno ou pais.



Fonte: Disponível em: <https://pt.khanacademy.org/>. Acesso em: 29 set. 2020.

Ao acessar a plataforma você terá acesso a todos os cursos dentre eles o de formação inicial para professores disponível em: <https://pt.khanacademy.org/khan-for-educators>, no qual poderá conhecer melhor a Khan Academy, aprender a configurar turmas, recomendar atividades e explorar os relatórios de desempenho dos alunos.

O acesso ao portal GeoGebra pode ser feito pelo link <https://www.geogebra.org>.

The screenshot shows the GeoGebra website homepage. On the left, there's a sidebar with links like 'Inicio', 'Feed de Notícias', 'Materiais', 'Perfil', 'Pessoas', 'Classroom', and 'Baixar Aplicativos'. The main content area features a banner for 'GeoGebra - Aplicativos Matemáticos' with images of a laptop, smartphone, and tablet displaying mathematical content. Below the banner are three sections: 'Powerful Math Apps' (with links to Calculadora, Calculadora 3D, Calculadora CAS, and Geometria), 'Ready for Tests' (with links to Calculadora Gráfica, Calculadora Científica, GeoGebra Clássico, and Testing), and 'More Great Apps' (with links to Notas, App Store, Google Play, and Baixar Aplicativos).

Fonte: Disponível em: <https://www.geogebra.org>, Acesso em: 29 set. 2020.

Os interessados podem realizar o cadastro, construir, utilizar e publicar materiais didáticos, ou simplesmente baixar aplicativos ou utilizar o software na versão on-line.

The screenshot shows the 'Baixar Aplicativos GeoGebra' page. It lists several free GeoGebra apps available for download: 'Calculadora Gráfica' (with icon of a graph), 'Calculadora 3D' (with icon of a 3D pyramid), 'Geometria' (with icon of a triangle), 'GeoGebra Clássico 6' (with icon of a geometric shape), 'Calculadora CAS' (with icon of an equals sign and an 'X'), and 'GeoGebra Clássico 5' (with icon of a geometric shape). Each app entry includes a 'DOWNLOAD' button and an 'INÍCIO' button.

Fonte: Disponível em: <https://www.geogebra.org>, Acesso em: 29 set. 2020.

Observações:

- Todos os recursos da Khan Academy podem ser acessados sem que haja a necessidade de cadastro na plataforma. Recomenda-se o cadastro para quem desejar utilizar os recursos como professor ou acompanhar o desempenho pessoal e dos alunos.
- O aplicativo Khan Academy e GeoGebra podem ser instalados em celulares a partir do Play Store, Apple Store, entre outros.

- Existem comunidades, tutoriais e artigos que ensinam utilizar o GeoGebra e construir materiais.

2.3 Desenvolvimento das aulas

1º ENCONTRO/AULA 0 - Apresentação da proposta, organização e motivação

O primeiro encontro é destinado a divulgação, a investigação sobre os interesses dos estudantes e de seus conhecimentos prévios, além, de informar as orientações para primeira aula.

Inicialmente pode ser apresentado um robô, que executa movimentos e exibidas algumas imagens de computação gráfica, que exemplificam aplicações das transformações geométricas. Em seguida pode ser feita uma conversa sobre a aplicação da Sala de Aula Invertida e para sondar os interesses, rotina de estudos e os recursos tecnológicos disponíveis, tais como celular, computador e acesso à internet. Após os alunos serão orientados a instalar em seus celulares e explorar os aplicativos do GeoGebra e Khan Academy, a realizar o cadastro individual na plataforma Khan Academy e se inscreverem nas aulas da turma através do código que será fornecido pela professora. Por fim, receberão as orientações para realizar a atividade que corresponde a Pré-aula da Aula 1.

PRÉ-AULA

Atividade 1: Pesquise e registrar no caderno o significado dos seguintes conteúdos no contexto matemático.

- Matrizes;
- Geometria de coordenadas;
- Transformações geométricas;

2º ENCONTRO/AULA 1 - Geometria de coordenadas e Matrizes

Inicialmente a professora, por meio de questionamento aos alunos, pode desenhar no quadro, uma estrutura de mapa conceitual preenchendo os dados com os resultados da pesquisa realizada pelos estudantes na Atividade 1. A partir de indagações sobre o mapa conceitual pretende-se avaliar os conhecimentos prévios dos alunos com a intenção de ajustar as propostas da aula e estabelecer critérios para formação de grupos.

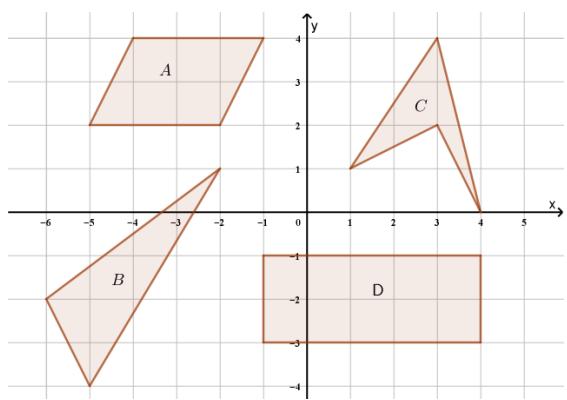
Após, a professora deverá organizar a turma em grupos de quatro alunos, de modo que cada grupo disponha de alunos com acesso a plataforma Khan Academy e ao software GeoGebra e em seguida propor a realização das atividades 2, 3 e 4.

AULA

Atividade 2: Construa um polígono, com software GeoGebra, descreva os vértices por pares ordenados e represente os vértices do polígono por meio de uma matriz.

Atividade 3: Resolva os exercícios:

- 1- Escreva a matriz correspondente aos vértices de cada polígono a seguir.



- 2 - Use papel quadriculado ou o software GeoGebra para construir um plano cartesiano e represente nele os polígonos correspondentes as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Atividade 4: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Introdução a transformações rígidas, Aprender e Praticar.

Introdução a transformações rígidas

Aprender

- Introdução às transformações rígidas
- Introdução às translações
- Introdução às rotações

Praticar

- Identificação de transformações

4 perguntas

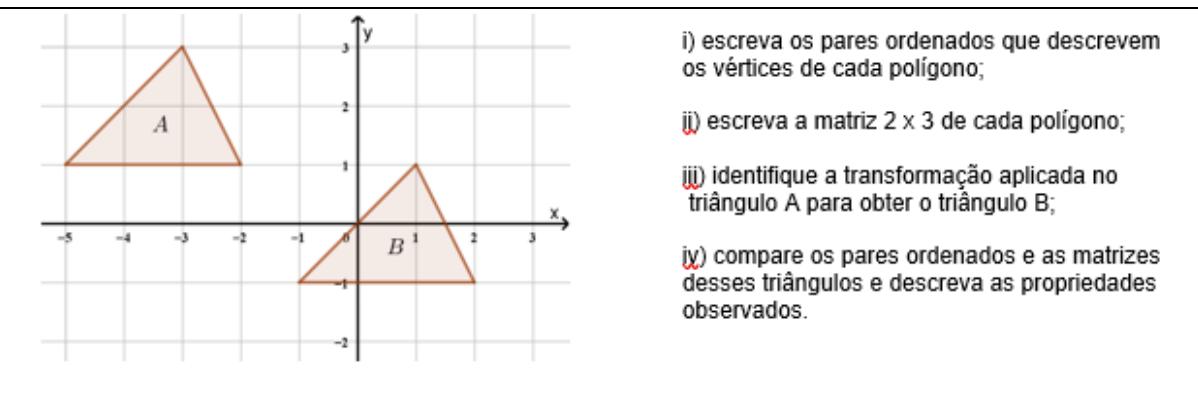
[Praticar](#)

Ao finalizar esse encontro serão encaminhadas as atividades 5 e 6 para serem desenvolvidas antes do próximo encontro nos momentos Pós-aula/Aula1 e Pré-aula/Aula2, respectivamente.

PÓS-AULA

Atividade 5: Resolva o exercício.

Observe os triângulos A e B no plano cartesiano abaixo e:



PRÉ-AULA

Atividade 6: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Translações: Aprender e Praticar.

Translações

Aprender	Praticar
<input type="checkbox"/> Translação de formas <input type="checkbox"/> Determinação de translações <input type="checkbox"/> Determinação de translações <input type="checkbox"/> Translação de formas <input type="checkbox"/> Problema de translação <input type="checkbox"/> Propriedades das translações <input type="checkbox"/> Revisão sobre translações	<div style="border: 1px solid #f0f0f0; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <input type="checkbox"/> Translação de pontos 4 perguntas Praticar </div> <div style="border: 1px solid #f0f0f0; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <input type="checkbox"/> Determine translações 4 perguntas Praticar </div> <div style="border: 1px solid #f0f0f0; padding: 5px; margin-bottom: 10px;"> <input type="checkbox"/> Translade formas 4 perguntas Praticar </div>

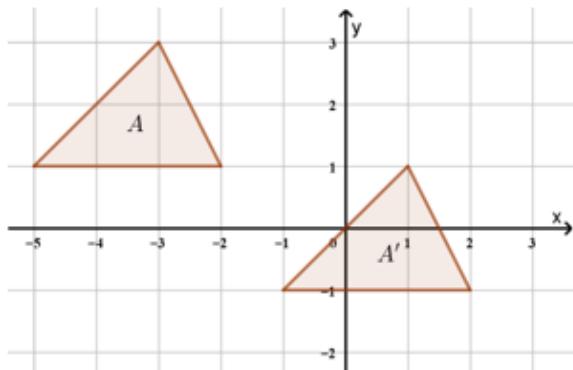
3º ENCONTRO/AULA 2 - Translação e Adição de Matrizes

No momento inicial dessa aula, os alunos serão convidados a socializar os resultados da Atividade 5. Após, serão organizados em grupos de quatro participantes, de acordo com o desempenho nas Atividades 5 e 6. A seguir os alunos serão orientados a refazer a parte, Praticar, da Atividade 6 a partir das dificuldades apresentadas ou do exercício em que pararam, caso não tenham concluído a atividade antes desse encontro.

Por fim serão propostas as atividades 7, 8 e 9 sendo que a atividade 9 deverá ser realizada no momento pós-aula.

AULA

Atividade 7: Na figura abaixo o triângulo A sofreu uma translação dando origem ao triângulo A'.



- Descreva a translação.
- Represente a translação por uma matriz coluna.
- Escreva as matrizes correspondentes aos triângulos A e A'.
- Compare as matrizes dos triângulos A e A' e escreva as propriedades observadas.

Atividade 8: Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 87), estabeleça a relação entre a translação e a adição de matrizes.

PÓS-AULA

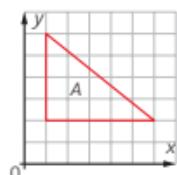
Atividade 9: Resolva os exercícios 49 e 50 do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 88). Para o exercício 50, use malha quadriculada ou GeoGebra.

Exercícios

49. Escreva o que significa cada uma das translações dada pelas matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

50. Copie o diagrama abaixo em uma malha quadriculada. Translade o triângulo A de acordo com cada matriz coluna dada e desenhe o triângulo transladado.



- a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo B.
b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo C.
c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo D.
d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo E.
e) Em cada caso, escreva a adição de matrizes correspondentes.

Além disso, para Pré-aula/Aula3 do próximo encontro, os alunos deverão ser organizados em dois grupos, Grupo 1 e Grupo 2. Um deles receberá orientações para realizar a atividade 10 enquanto o outro deverá realizar a atividade 11.

PRÉ-AULA

Atividade 10: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Rotação: Aprender e Praticar.

Rotações

<p>Aprender</p> <ul style="list-style-type: none"><input type="checkbox"/> Rotação de formas<input type="checkbox"/> Determinar rotações<input type="checkbox"/> Determinar rotações<input type="checkbox"/> Rotação de formas<input type="checkbox"/> Revisão sobre rotações<input type="checkbox"/> Rotação de formas: centro ≠ (0,0)	<p>Praticar</p> <ul style="list-style-type: none"><input type="checkbox"/> Rotação de pontos 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Determine rotações 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Rotacione formas 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Rotacione formas: centro ≠ (0,0) 4 perguntas Praticar
--	--

Atividade 11: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Reflexões: Aprender e Praticar.

Reflexões

<p>Aprender</p> <ul style="list-style-type: none"><input type="checkbox"/> Reflexão de figuras: eixo de simetria diagonal<input type="checkbox"/> Determinar reflexões (avançado)<input type="checkbox"/> Reflexão de formas<input type="checkbox"/> Revisão sobre reflexões	<p>Praticar</p> <ul style="list-style-type: none"><input type="checkbox"/> Reflexão de pontos 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Determine reflexões 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Determinar reflexões (avançado) 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Reflita formas 4 perguntas Praticar<input type="checkbox"/> Reflexões avançadas 4 perguntas Praticar
---	--

3º ENCONTRO/AULA 4 – Rotação, reflexão e multiplicação de matrizes

No início deste encontro, será solicitado que os alunos do Grupo 1, se organizem em grupos menores com quatro participantes e preparem a apresentação de um dos exercícios da

Atividade 10. De modo análogo, os alunos dos subgrupos do Grupo 2, devem organizar a apresentação de um exercício da Atividade 11.

A duração de cada apresentação deverá ser de aproximadamente 15 minutos; os alunos poderão escolher os recursos que irão utilizar e os exercícios serão indicados pela professora.

Após a apresentação dos exercícios, a professora irá propor a realização das Atividades 12, 13 e 14 em grupos de quatro participantes e reorganizados pela professora de modo que, dois deles tenham estudado reflexões e os outros, rotações.

AULA

Atividade 12:

- i) Construa, com GeoGebra, um polígono no primeiro quadrante do plano cartesiano e faça a rotação de 180° no sentido anti-horário em torno da origem (0,0).
- ii) Escrever as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
- iii) Repita os itens i) e ii) mudando apenas o ângulo de rotação.
- iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações p. 89 e 90, estabeleça a relação entre a rotação e a multiplicação de matrizes.

Atividade 13:

- i) Construa, com GeoGebra, um polígono no plano cartesiano e faça a reflexão dele em torno do eixo y.
- ii) Escrever as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
- iii) Repita os itens i) e ii) refletindo o polígono em torno do eixo x.
- iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações p. 88 e 89, estabeleça a relação entre a reflexão e a multiplicação de matrizes.

Atividade14: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o Visão geral sobre transformações rígidas: Praticar.

Visão geral sobre transformações rígidas

Aprender

Não há vídeos ou artigos disponíveis nesta lição

Praticar

Calcule medidas usando transformações rígidas

4 perguntas

Praticar

Transformações rígidas: propriedades preservadas

4 perguntas

Praticar

Transformações de figuras

4 perguntas

Praticar

Por fim a professora encaminha a Atividade 15 para o momento Pós-aula/Aula 3 e orienta os alunos para o desenvolvimento da Atividade 16, Pré-aula/Aula 4, antes do próximo encontro.

PÓS-AULA

Atividade 15: Faça os exercícios 51 a 54 com GeoGebra ou com uma malha quadriculada.

Exercícios

51. Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

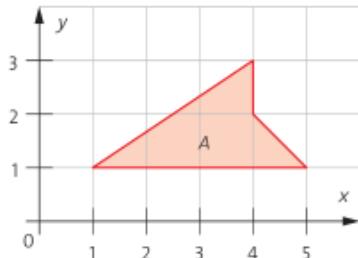
$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

- Marque os pares ordenados em um plano cartesiano e ligue os pontos, em ordem, para formar uma figura.
- Efetue uma reflexão das figuras em relação ao eixo x e escreva a matriz de cada figura refletida.
- Constate que a matriz da figura refletida pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura pela matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

52. Repita o exercício anterior, usando uma reflexão em relação ao eixo y .

53. Considere a figura A e uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem $(0, 0)$, originando uma figura D .



a) Obtenha a matriz associada à figura D .

b) Desenhe em um mesmo plano cartesiano as figuras A e D .

c) Verifique que a matriz associada pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

54. Faça o que se pede para cada matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Coloque os pares ordenados de cada matriz no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para formar uma figura.

b) Na matriz A aplique uma rotação de 90° , em B uma rotação de 180° e em C uma rotação de 270° , no sentido anti-horário, em torno da origem $(0, 0)$.

c) Em todos os casos escreva a matriz associada à figura final e desenhe-as em um mesmo plano cartesiano.

d) Verifique que a matriz associada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Fonte: (Dante, 2017, p. 90).

PRÉ-AULA

Atividade 16: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre Dilatação: Aprender e Praticar.

Dilatações

Aprender	Praticar
<ul style="list-style-type: none">▶ Como realizar dilatações▶ Dilatação de formas: como contrair▶ Dilatação de formas: expansão	<ul style="list-style-type: none"><input checked="" type="checkbox"/> Dilatação de pontos 4 perguntas Praticar<input checked="" type="checkbox"/> Dilatações: fator de escala 4 perguntas Praticar<input checked="" type="checkbox"/> Dilatações: centro 4 perguntas Praticar<input checked="" type="checkbox"/> Dilatação de triângulos 4 perguntas Praticar<input checked="" type="checkbox"/> Dilatações e propriedades 4 perguntas Praticar

5º ENCONTRO/AULA 4 – Escala

Inicialmente será proposto a realização das Atividades 17 e 18 em grupos de quatro participantes. Após cada grupo deverá organizar a apresentação de um exercício previamente sorteado. A apresentação desse exercício será no final da aula e ficará a cargo de um dos componentes do grupo, indicado aleatoriamente pela professora.

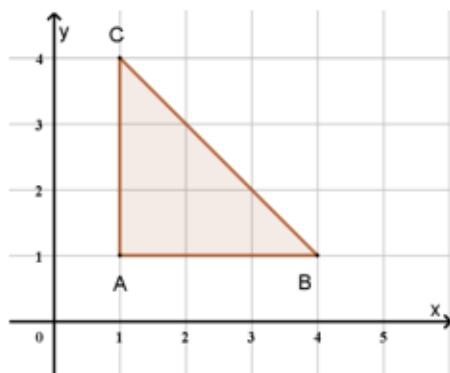
AULA

Atividade 17: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre Propriedades e definições das transformações: Aprender e Praticar.

Propriedades e definições das transformações

Aprender	Praticar
<ul style="list-style-type: none"><input checked="" type="checkbox"/> Definir rotações com precisão▶ Como identificar o tipo de transformação	<ul style="list-style-type: none"><input checked="" type="checkbox"/> Sequências de transformações 4 perguntas Praticar<input checked="" type="checkbox"/> Definição de transformações 4 perguntas Praticar

Atividade 18: Considere o triângulo ABC, a seguir.



- Aplique nele uma dilatação de centro em A e escala 2. Repita mudando a escala.
- Aplique nele uma transformação de centro em A e escala segundo fatores os 1 e 2 nas direções dos eixos OX e OY, respectivamente. Repita, mudando apenas a escala na direção do eixo OY.
- Descreva as mudanças observadas.
- Qual é a relação entre a área do triângulo inicial e a área dos triângulos após as transformações?

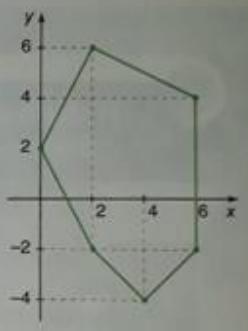
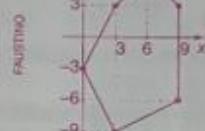
Antes do término deste encontro devem ser encaminhadas a Atividades 19, para o momento Pós-aula/Aula 5 e as Atividades 20 e 21, para o momento Pré-aula/Aula 6, para serem realizadas antes do próximo encontro.

PÓS-AULA

Atividade 19:

(UFG-GO) Um polígono convexo de n vértices pode ser representado por uma matriz $F_{2 \times n}$, cujas colunas são formadas pelas coordenadas cartesianas dos vértices do polígono. Assim, a matriz $F_{2 \times 6}$, abaixo, representa o polígono da figura ao seu lado.

$$F_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$



A computação gráfica utiliza-se de transformações geométricas para realizar movimentos de figuras e objetos na tela do computador. Essas transformações geométricas podem ser representadas por uma matriz $T_{2 \times 2}$. Efetuando-se a multiplicação de matrizes $T_{2 \times 2} \cdot F_{2 \times 6}$, obtém-se uma matriz que representa a figura transformada, que pode ser uma simetria, translação, rotação ou dilatação da figura original. Considerando a transformação geométrica representada pela matriz

$$T_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

construa no plano cartesiano o polígono obtido ao se aplicar a transformação $T_{2 \times 2}$ ao polígono representado pela matriz $F_{2 \times 6}$ dada anteriormente.

Fonte: (PAIVA, 2015, p. 77).

PRÉ-AULA

Atividade 20: Pesquise sobre objetos que possam ser construídos aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.

Sugestões:

Escher (obras): <https://www.youtube.com/watch?v=uOrMnL8l1hU>

Escher e a Geometria – Nova Escola: <https://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY>

Desvendando a técnica de Escher: <https://www.youtube.com/watch?v=zZ2wrNdYchw>

Simetrizador: http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/simetrizador.htm

Braço robótico hidráulico: <https://www.youtube.com/watch?v=rNVURoYums>

Máquina de agarrar bichinhos de pelúcia: <https://www.youtube.com/watch?v=xfCb8MRvVu0>

Atividade 21: Pesquise e liste problemas comunitários ou particulares que possam ser solucionados aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.

6º ENCONTRO/AULA 5 – Aplicando aprendizagens

Este será o último encontro e será destinado a apresentação de situações, como por exemplo, de protótipos e painéis de pintura, que podem ser criados pelos estudantes, com base nas aprendizagens adquiridas e que tenham alguma função social na comunidade a qual os estudantes pertençam.

Inicialmente os alunos serão convidados a expor os resultados das Atividades 20 e 21. Após os alunos serão orientados a planejar, em grupos, a criação de um protótipo que sirva para solucionar algum dos problemas comunitários ou particulares apontados por eles na Atividade 21, tendo por base a pesquisa realizada na Atividade 20.

Em particular, pode ser proposta a atividade 22.

AULA

Atividade 22: Crie um modelo de painel, em seguida afira as medidas do local onde será pintado e calcule o fator de escala.

Sugestão: Use o software Shapari, Ilustrator ou GeoGebra.

Neste caso, os alunos irão criar modelos de painéis para serem pintados na parede ou muro para revitalizar/embelezar as áreas de convivência da escola. Os modelos podem ser desenhados em papel ou construídos com o auxílio de softwares, podem ser apresentados a direção da escola como proposta para pintura do painel no ambiente escolar juntamente com o orçamento para execução. Para finalizar esta aula cada grupo deve expor para turma o modelo de painel criado.

Observações: As resoluções das atividades propostas na Khan Academy podem ser encontradas junto aos exercícios no item obter ajuda e as demais atividades desta sequência didática encontram-se em ZANCHETTIN (2020).

As atividades em sequência estão apresentadas, neste texto, no APÊNDICE A – ATIVIDADES, após as referências.

3 AVALIAÇÃO

Os alunos serão avaliados nos três momentos da sala de aula invertida. Na Pré-aula, através do desempenho na plataforma Khan Academy, observando constantemente os relatórios de aprendizagem fornecidos. Na Aula, acompanhando o desenvolvimento das atividades propostas, mediando as relações nos trabalhos em grupos e analisando as discussões da turma durante a socialização das aprendizagens. Por fim, corrigindo e fornecendo feedback das atividades desenvolvidas no momento Pós-aula.

4 REFERÊNCIAS

BRASIL. Base Nacional Comum Curricular. Brasília: MEC. 2018. Disponível em: <<http://portal.mec.gov.br/conselho-nacional-de-educacao/base-nacional-comum-curricular-bncc>> Acesso em: 29 set. 2020.

DANTE, L. R. Matemática: Contexto & Aplicações. v. 2. 3. ed. São Paulo: Ática, 2017.

GEOGEBRA. Portal GeoGebra, 2020. Disponível em: <www.geogebra.mat.br>. Acesso em: 29 set. 2020.

KHAN ACADEMY. Brasil, 2020. Disponível em: <<https://pt.khanacademy.org/khan-for-educators>> Acesso em: 29 set. 2020.

PAIVA, M. Matemática Paiva. v. 3. 3. ed. São Paulo: Moderna, 2015.

ZANCHETTIN, L. Transformações Geométricas e Matrizes: uma proposta de ensino com base na sala de aula invertida. 2020. 90 p. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2020.

APÊNDICE A – ATIVIDADES

AULA 1 - Geometria de coordenadas e matrizes

PRÉ-AULA

Atividade 1: Pesquise e registrar no caderno o significado dos seguintes conteúdos no contexto matemático.

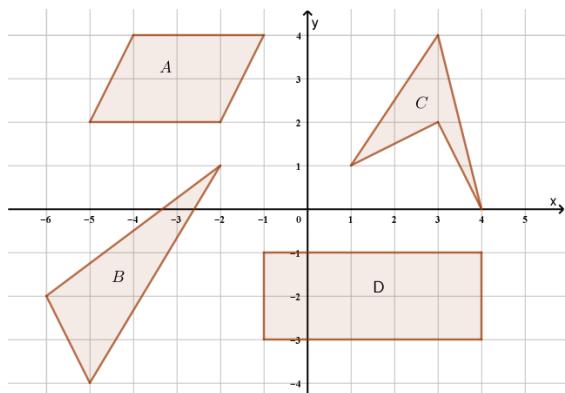
- Matrizes:
- Geometria de coordenadas:
- Transformações geométricas:

AULA

Atividade 2: Construa um polígono, com software GeoGebra, descreva os vértices por pares ordenados e represente os vértices do polígono por meio de uma matriz.

Atividade 3: Resolva os exercícios:

1- Escreva a matriz correspondente aos vértices de cada polígono a seguir.



2 - Use papel quadriculado para construir um plano cartesiano e represente nele os polígonos correspondentes as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

Atividade 4: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Introdução a transformações rígidas, Aprender e Praticar.

Introdução a transformações rígidas

Aprender

- ▶ Introdução às transformações rígidas
- ▶ Introdução às translações
- ▶ Introdução às rotações

Praticar



Identificação de transformações

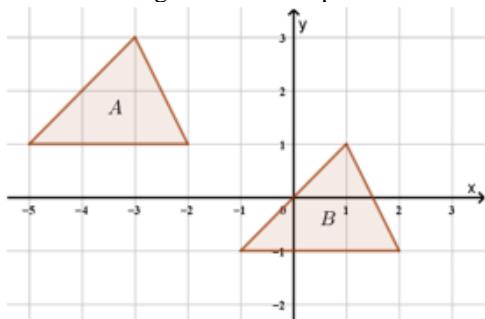
4 perguntas

Praticar

PÓS-AULA

Atividade 5: Resolva o exercício.

Observe os triângulos A e B no plano cartesiano abaixo:



- i) escreva os pares ordenados que descrevem os vértices de cada polígono;
- ii) escreva a matriz 2×3 de cada polígono;
- iii) identifique a transformação aplicada no triângulo A para obter o triângulo B;
- iv) compare os pares ordenados e as matrizes desses triângulos e descreva as propriedades observadas.

AULA 2 – Translação e adição de matrizes

PRÉ-AULA

Atividade 6: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Translações: Aprender e Praticar.

Translações

Aprender

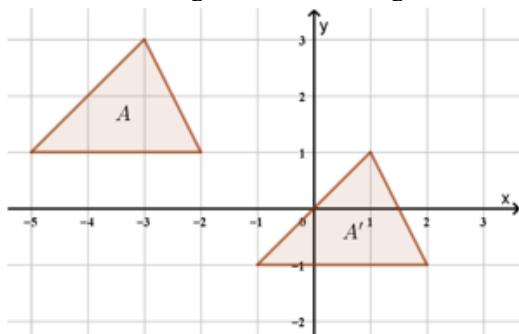
- Translação de formas
- Determinação de translações
- Determinação de translações
- Translação de formas
- Problema de translação
- Propriedades das translações
- Revisão sobre translações

Praticar

- | | |
|---|--------------------------|
| <input type="checkbox"/> Translação de pontos
4 perguntas | Praticar |
| <input type="checkbox"/> Determine translações
4 perguntas | Praticar |
| <input type="checkbox"/> Translação de formas
4 perguntas | Praticar |

AULA

Atividade 7: Na figura abaixo o triângulo A sofreu uma translação dando origem ao triângulo A'.



- i) Descreva a translação.
- ii) Represente a translação por uma matriz coluna.
- iii) Escreva as matrizes correspondentes aos triângulos A e A'.
- iv) Compare as matrizes dos triângulos A e A' e escreva as propriedades observadas.

Atividade 8: Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 87), estabeleça a relação entre a translação e a adição de matrizes.

PÓS-AULA

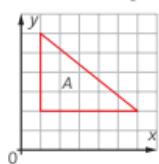
Atividade 9: Resolva os exercícios 49 e 50 do livro Matemática Contexto & Aplicações (DANTE, 2017, p. 88). Para o exercício 50, use malha quadriculada ou GeoGebra.

Exercícios

49. Escreva o que significa cada uma das translações dada pelas matrizes:

a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \end{pmatrix}$

50. Copie o diagrama abaixo em uma malha quadriculada. Translade o triângulo A de acordo com cada matriz coluna dada e desenhe o triângulo transladado.



a) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo B.

b) $\begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo C.

c) $\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo D.

d) $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$, dando origem ao triângulo E.

e) Em cada caso, escreva a adição de matrizes correspondentes.

AULA 3 – Rotação, reflexão e multiplicação de matrizes

PRÉ-AULA

Atividade 10: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Rotação: Aprender e Praticar.

Rotações

Aprender

- Rotação de formas
- Determinar rotações
- Determinar rotações
- Rotação de formas
- Revisão sobre rotações
- Rotação de formas: centro ≠ (0,0)

Praticar

- Rotação de pontos
4 perguntas [Praticar](#)
- Determine rotações
4 perguntas [Praticar](#)
- Rotacione formas
4 perguntas [Praticar](#)
- Rotacione formas: centro ≠ (0,0)
4 perguntas [Praticar](#)

Atividade 11: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o título Reflexão: Aprender e Praticar.

Reflexões

Aprender

- Reflexão de figuras: eixo de simetria diagonal
- Determinar reflexões (avançado)
- Reflexão de formas
- Revisão sobre reflexões

Praticar

Reflexão de pontos

4 perguntas

[Praticar](#)

Determine reflexões

4 perguntas

[Praticar](#)

Determinar reflexões (avançado)

4 perguntas

[Praticar](#)

Refletá formas

4 perguntas

[Praticar](#)

Reflexões avançadas

4 perguntas

[Praticar](#)

AULA

Atividade 12:

- i) Construa, com GeoGebra, um polígono no primeiro quadrante do plano cartesiano e faça a rotação de 180° no sentido anti-horário em torno da origem $(0,0)$.
- ii) Escrever as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
- iii) Repita os itens i) e ii) mudando apenas o ângulo de rotação.
- iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações p. 89 e 90, estabeleça a relação entre a rotação e a multiplicação de matrizes.

Atividade 13:

- i) Construa, com GeoGebra, um polígono no plano cartesiano e faça a reflexão dele em torno do eixo y.
- ii) Escrever as matrizes correspondentes de cada polígono e descreva propriedades observadas.
- iii) Repita os itens i) e ii) refletindo o polígono em torno do eixo x.
- iv) Com auxílio de textos do livro Matemática Contexto & Aplicações p. 88 e 89, estabeleça a relação entre a reflexão e a multiplicação de matrizes.

Atividade14: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre o Visão geral sobre transformações rígidas: Praticar.

Visão geral sobre transformações rígidas

Aprender

Não há vídeos ou artigos disponíveis nesta lição

Praticar

Calcule medidas usando transformações rígidas

4 perguntas

[Praticar](#)

Transformações rígidas: propriedades preservadas

4 perguntas

[Praticar](#)

Transformações de figuras

4 perguntas

[Praticar](#)

PÓS-AULA

Atividade 15: Faça os exercícios 50 a 53 com GeoGebra ou com uma malha quadriculada.

Exercícios

51. Faça o que se pede para cada matriz a seguir:

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \quad N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix} \quad Z = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 & -4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

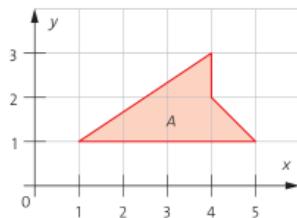
- a) Marque os pares ordenados em um plano cartesiano e ligue os pontos, em ordem, para formar uma figura.
b) Efetue uma reflexão das figuras em relação ao eixo x e escreva a matriz de cada figura refletida.

- c) Constate que a matriz da figura refletida pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura pela matriz:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

52. Repita o exercício anterior, usando uma reflexão em relação ao eixo y .

53. Considere a figura A e uma rotação de 90° no sentido anti-horário em torno da origem $(0, 0)$, originando uma figura D .



a) Obtenha a matriz associada à figura D .

b) Desenhe em um mesmo plano cartesiano as figuras A e D .

c) Verifique que a matriz associada pode ser obtida pelo produto $\begin{pmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

54. Faça o que se pede para cada matriz a seguir.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 4 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Coloque os pares ordenados de cada matriz no plano cartesiano e ligue os pontos em ordem para formar uma figura.

b) Na matriz A aplique uma rotação de 90° , em B uma rotação de 180° e em C uma rotação de 270° , no sentido anti-horário, em torno da origem $(0, 0)$.

c) Em todos os casos escreva a matriz associada à figura final e desenhe-as em um mesmo plano cartesiano.

d) Verifique que a matriz associada pode ser obtida multiplicando-se a matriz associada à figura inicial por $\begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$.

Fonte: (Dante, 2017, p. 90).

AULA 4 – Escala

PRÉ-AULA

Atividade 16: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre Dilatação: Aprender e Praticar.

Dilatações

Aprender

- Como realizar dilatações
- Dilatação de formas: como contrair
- Dilatação de formas: expansão

Praticar

- Dilatação de pontos**
4 perguntas Praticar
- Dilatações: fator de escala**
4 perguntas Praticar
- Dilatações: centro**
4 perguntas Praticar
- Dilatação de triângulos**
4 perguntas Praticar
- Dilatações e propriedades**
4 perguntas Praticar

AULA

Atividade 17: Acesse o endereço <https://pt.khanacademy.org/math/geometry-home/transformations> e faça as atividades sobre Propriedades e definições das transformações: Aprender e Praticar.

Propriedades e definições das transformações

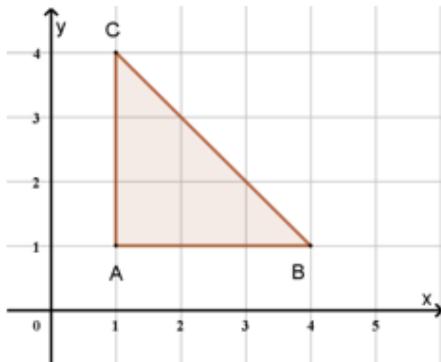
Aprender

- Definir rotações com precisão
- Como identificar o tipo de transformação

Praticar

- Sequências de transformações
4 perguntas [Praticar](#)
- Definição de transformações
4 perguntas [Praticar](#)

Atividade 18: Considere o triângulo ABC, a seguir.



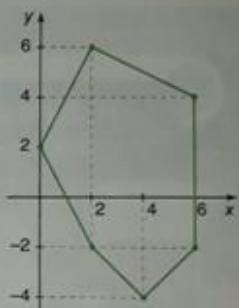
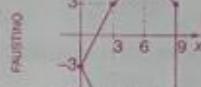
- i) Aplique nele uma dilatação de centro em A e escala 2. Repita mudando a escala.
- ii) Aplique nele uma transformação de centro em A e escala segundo fatores os 1 e 2 nas direções dos eixos OX e OY, respectivamente. Repita, mudando apenas a escala na direção do eixo OY.
- iii) Descreva as mudanças observadas.
- iv) Qual é a relação entre a área do triângulo inicial e a área dos triângulos após as transformações

PÓS-AULA

Atividade 19:

(UFG-GO) Um polígono convexo de n vértices pode ser representado por uma matriz $F_{2 \times n}$, cujas colunas são formadas pelas coordenadas cartesianas dos vértices do polígono. Assim, a matriz $F_{2 \times 6}$, abaixo, representa o polígono da figura ao seu lado.

$$F_{2 \times 6} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 6 & 6 & 4 & 2 \\ 2 & 6 & 4 & -2 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$



A computação gráfica utiliza-se de transformações geométricas para realizar movimentos de figuras e objetos na tela do computador. Essas transformações geométricas podem ser representadas por uma matriz $T_{2 \times 2}$. Efetuando-se a multiplicação de matrizes $T_{2 \times 2} \cdot F_{2 \times 6}$, obtém-se uma matriz que representa a figura transformada, que pode ser uma simetria, translação, rotação ou dilatação da figura original. Considerando a transformação geométrica representada pela matriz

$$T_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

construa no plano cartesiano o polígono obtido ao se aplicar a transformação $T_{2 \times 2}$ ao polígono representado pela matriz $F_{2 \times 6}$ dada anteriormente.

Fonte: (PAIVA, 2015, p. 77).

AULA 5 – Aplicando aprendizagens

PRÉ-AULA

Atividade 20: Pesquise sobre objetos que possam ser construídos aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.

Sugestões:

Escher (obras): <https://www.youtube.com/watch?v=uOrMnL811hU>

Escher e a Geometria – Nova Escola: <https://www.youtube.com/watch?v=6aRFy73cZxY>

Desvendando a técnica de Escher: <https://www.youtube.com/watch?v=zZ2wrNdYchw>

Simetrizador: http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/simetrizador.htm

Braço robótico hidráulico; <https://www.youtube.com/watch?v=-rNVURoYUms>

Máquina caseira de agarrar bichinhos de pelúcia: <https://www.youtube.com/watch?v=xfCb8MRvVu0>

Atividade 21: Pesquise e liste problemas comunitários ou particulares que possam ser solucionados aplicando os conhecimentos adquiridos sobre Geometria das Transformações.

AULA

Atividade 22: Crie um modelo de painel, em seguida afira as medidas do local onde será pintado e calcule o fator de escala.

Sugestão: Use o software Shapari, Ilustrator ou GeoGebra.