UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
CENTRO DE CIÊNCIAS NATURAIS E EXATAS
PROGRAMA DE PÓS – GRADUAÇÃO EM MESTRADO PROFISSIONAL EM MATEMÁTICA EM REDE NACIONAL - PROFMAT

Luciane Gobbi Tonet[1]
Ivana Manfio Cocco[2]

Plano de Aula – Elemento neutro e oposto

I.INFORMAÇÕES GERAIS

1.1. Tema: Elemento neutro e oposto

1.2. Sub-temas:

- Operações distintas da adição e multiplicação usuais;
- Propriedades operacionais no Conjunto dos Números Racionais;
- Resolução de equações envolvendo operações não usuais.

1.3. Objetivo geral: Estudar os conceitos de elemento neutro e oposto no Conjunto dos Números Racionais.

1.4. Objetivo(s) Específico(s):

- Manipular algebricamente algumas operações distintas das usuais;
- Explorar propriedades de determinadas operações;
- Analisar as definições de elemento neutro e oposto relativos a determinada operação, bem como o cálculos de tais elementos;
- Resolver equações que envolvem uma operação não usual.

1.5. Recursos:

- Folha impressa;

[1] Doutora: Universidade Federal de Santa Maria/UFSM, Santa Maria, RS – Brasil. Orientadora.
[2] Mestranda: Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional/UFSM, RS – Brasil. Orientanda.

- Giz;
- Lousa.

1.6. Duração: 09 períodos (50 minutos cada)

1.7. Habilidades presentes na Base Nacional Comum Curricular – BNCC:

- (EF07MA18) Resolver e elaborar problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 1º grau, redutíveis à forma $ax + b = c$, fazendo uso das propriedades de igualdade.
- (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas, utilizando as propriedades das operações.

1.8 Habilidades presentes no Referencial Curricular Gaúcho – RCG:

- (EF06MA14RS – 1) Interpretar e resolver o valor desconhecido numa igualdade, envolvendo adição, subtração, multiplicação ou divisão de números racionais, aplicando o conceito de operações inversas e equivalência entre os termos da igualdade.
- (EF07MA18RS – 2) Descrever e solucionar problemas em linguagem algébrica, representados por equações polinomiais de 1º grau, fazendo uso das propriedades da igualdade.
- (EF08MA06RS – 1) Ler, modelar e expressar situações na forma de expressão algébrica, levantando e testando hipóteses a partir das propriedades das operações e validar a solução no contexto proposto.

II. DESENVOLVIMENTO DAS AULAS:

1º Momento – Introdução às operações distintas das usuais[3]

Inicialmente será distribuído aos alunos o material impresso[4] contendo as atividades. Em seguida, será solicitado que os mesmos formem duplas ou trios para discutirem a questão proposta a seguir.

[3] As resoluções das atividades propostas no 1º Momento encontram-se em COCCO (2020, p. 25).

1) (OBMEP – 2ª fase – 2018 – Nível 3 - ADAPTADA) Sérgio inventou as operações matemáticas # e @ entre os números racionais, como abaixo:

$$a\#b = a^2 + b^2$$

$$a@b = (a + b)^2$$

Por exemplo, $1\#4 = 1^2 + 4^2 = 17$ e $1@(-6) = \left(1 + (-6)\right)^2 = 25$. Utilizando as operações criadas por Sérgio, responda as questões abaixo:

a) Qual o valor de:

- $(-1)\#1$?
- $1\#(-5)$?
- $1\#5$?
- $2\#3$?
- $6\#0$?
- $2@0$?
- $3@2$?
- $2@3$?
- $2@(-3)$?
- $(-1)@1$?

b) Qual é o valor de $(2@3) - (2\#3)$?

Após os alunos concluírem a atividade, será feita uma discussão coletiva na lousa, buscando sanar as dúvidas existentes sobre o exercício. Em seguida, nos seus grupos, os alunos resolverão a questão proposta a seguir.

Ressalta-se que, durante a resolução da atividade, o professor deverá acompanhar o desenvolvimento dos alunos, permitindo que os mesmos percebam o que ocorre com cada uma das operações, em relação à propriedade comutativa.

2) Sejam $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Definimos as operações:

$$a\Delta b = ab$$

$$a\blacksquare b = b^a$$

[4] O material disponível para impressão encontra-se no Apêndice A deste arquivo.

I) Calcule:

a) $1\Delta 3$

b) $3\Delta 1$

c) $(-2)\Delta(-3)$

d) $(-3)\Delta(-2)$

e) $3\Delta 2$

f) $2\Delta 3$

g) $3\blacksquare 5$

h) $2\blacksquare(-1)$

i) $6\blacksquare 1$

j) $1\blacksquare 6$

II) Nos itens (i) e (j), realizamos a operação $\blacksquare$ com os mesmos números, entretanto os resultados obtidos são distintos. O que isso nos permite concluir?

III) E quanto à operação Δ: é comutativa? Justifique![5]

Depois da conclusão do exercício, o professor discutirá a solução do mesmo na lousa. Posteriormente, o professor deverá mediar a resolução da próxima questão, conduzindo os alunos a perceberam a validade das propriedades operacionais em cada item da questão.

Destacamos que os itens (c), (f), (h) e (j) devem ser resolvidos exclusivamente pelo professor na lousa, pois os mesmos consistem em generalizações das propriedades.

3) Em $\mathbb{Q}$, definimos a operação:

$$x * y = x + y - 3$$

a) Calcule:

- $2 * 3$
- $5 * 3$
- $10 * 3$

[5] Matematicamente, não podemos concluir que uma operação é comutativa a partir de um número finito de exemplos. Entretanto, essa prática está de acordo com a abordagem dos livros didáticos para esse nível de ensino.

- $\frac{8}{5} * 3$

b) O que ocorre quando uma das parcelas é 3?

c) Podemos dizer que 3 é o elemento neutro da operação $*$?

d) Calcule:

- $2 * 4$
- $8 * (-2)$
- $3 * 3$
- $5 * 1$

e) Em cada uma das operações realizadas no item (d), obtivemos como resultado o elemento neutro relativo à operação $*$. O que isso significa?

f) Dado um número $a \in \mathbb{Q}$, qual é o elemento oposto de a?

g) Calcule:

- $4 * 5$
- $5 * 4$
- $(-2) * 6$
- $6 * (-2)$

h) Analisando o item anterior, vimos que podemos comutar as parcelas da operação $*$ e o resultado permanece igual. Será que isto é possível para quaisquer números?

i) Calcule:

- $(1 * 6) * 5$
- $1 * (6 * 5)$
- $(9 * 4) * 2$
- $9 * (4 * 2)$

j) Pelo item anterior, vimos que podemos associar de maneiras distintas as parcelas da operação $*$ e mesmo assim obtemos o mesmo resultado. Isto ocorre para quaisquer números racionais?

2º Momento – Resolução de equações envolvendo operações não usuais

Primeiramente, o professor deverá elaborar uma espécie de roteiro, contendo os passos necessários para a resolução de equações que envolvem operações distintas das usuais. Esse roteiro deve ser elaborado a partir das técnicas utilizadas pelos alunos na resolução de equações do 1º grau com uma incógnita.

Passos para a resolução de equações que envolvem operações distintas das usuais

1º) Determinar o elemento neutro da operação, isto é, dado $a \in \mathbb{Q}$, calcularemos qual é o número $\propto \in \mathbb{Q}$, que operado com a resulte no próprio a.

2º) Determinar o elemento oposto da operação, isto é, dado $a \in \mathbb{Q}$, calcularemos qual é o número $a' \in \mathbb{Q}$ que operado com a resulte no elemento neutro.

3º) Resolver a equação dada, usando os elementos dos passos anteriores.

Na sequência, o professor resolverá na lousa os exemplos destacados a seguir, considerando a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

onde $x, y \in \mathbb{Q}$.

Exemplo 1) Determine o conjunto solução da equação $x * 12 = 14$.

- Determinar o elemento neutro da operação $*$.

$$a * \propto = a$$

$$a + \propto -3 = a$$

$$a + \propto (-3 + 3) = a + 3$$

$$a + \propto = a + 3$$

$$\propto + (a - a) = a + 3 - a$$

$$\propto = 3$$

- Determinar o elemento oposto da operação $*$.

$$a * a' = \propto$$
$$a + a' - 3 = 3$$
$$a + a' + (-3 + 3) = 3 + 3$$
$$a + a' = 6$$
$$a' + (a - a) = 6 - a$$
$$a' = 6 - a$$

- Resolver a equação.

Primeiramente, observa-se que o elemento oposto de 12 é $6 - 12 = -6$.

Assim,

$$x * 12 = 14$$
$$x * 12 * (-6) = 14 * (-6\ )$$
$$x * 3 = 14 + (-6) - 3$$
$$x = 5.$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é S= $\{5\}$.

- Processo de verificação:

Sugere-se verificar se, de fato, 5 é solução da equação $x * 12 = 14$. Para isso, deve-se substituir a incógnita pelo valor encontrado como solução e obter como resultado o número 14.

$$5 * 12 = 5 + 12 - 3 = 14.$$

Exemplo 2) Determine o conjunto da equação $2x * 12 = 7 * x$.

- Determinar o elemento oposto de 12.

$6 - 12 = -6$.

- Resolver a equação.

$$2x * 12 = 7 * x$$
$$2x * \big(12 * (-6)\big) = \big(7 * (-6)\big) * x$$
$$2x * 3 = (7 + (-6) - 3) * x$$
$$2x = (-2) * x$$

$$2x * (6 - x) = (-2) * (x * (6 - x))$$
$$2x + (6 - x) - 3 = (-2) * 3$$
$$x + 3 = -2$$
$$x = -5$$

Portanto, o conjunto solução dessa equação é S= $\{-5\}$.

- Processo de verificação:

  Sugere-se verificar se -5 é solução da equação $2x * 12 = 7 * x$. Para isso, deve-se substituir a incógnita pelo número -5 em ambos os membros da igualdade inicial e obter o mesmo resultado em ambas as substituições. Ou seja,

$$2(-5) * 12 = (-10) + 12 - 3 = -1,$$

e, por outro lado,

$$7 * (-5) = 7 + (-5) - 3 = -1.$$

3º Momento – Resoluções de equações por parte dos alunos[6]

Nesse momento, será entregue uma folha[7] aos alunos contendo o exercício a seguir, composto por quatro equações. Os alunos, organizados em duplas ou trios, poderão consultar o material para resolver a atividade. O professor deverá acompanhar a resolução dos alunos, sanando possíveis dúvidas que possam surgir.

1) Considerando a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

a) $5 * m = 0$

b) $x * 23 = 25$

c) $(x - 7) * 5 = 15$

---

[6] As resoluções dos exercícios propostos no 3º Momento encontram-se em COCCO (2020, p. 33).

[7] O material disponível para impressão encontra-se no Apêndice B deste arquivo.

d) $(m+4)*(m+2)=3$

III. AVALIAÇÃO DOS ALUNOS:

Os alunos serão avaliados durante toda a aula nos seguintes critérios: participação, resolução das atividades, comportamento e trabalho em grupo.

IV. REFERÊNCIAS:

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular.** Brasília: MEC, 2017. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=79601-anexo-texto-bncc-reexportado-pdf-2&category_slug=dezembro-2017-pdf&Itemid=30192 . Acesso em 27 de janeiro de 2020.

COCCO, I. M. **Explorando os conceitos de elemento neutro e oposto por meio da resolução de equações no Conjunto dos Números Racionais.** 2020. f.54. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2020.

OBMEP. **Banco de questões.** Disponível em: https://drive.google.com/file/d/1bs3rEHm3sE0ELp1N-oFK7QsR2nDLiUEU/view . Acesso em 21 de outubro de 2019.

RIO GRANDE DO SUL. **Referencial Curricular Gaúcho: Matemática.** Porto Alegre: SEE, 2018. Disponível em: http://portal.educacao.rs.gov.br/Portals/1/Files/1533.pdf . Acesso em 13 de abril de 2020.

APÊNDICE A – ATIVIDADES DO 1º MOMENTO DISPONÍVEIS PARA A IMPRESSÃO

1) (OBMEP – 2ª fase – 2018 – Nível 3 - ADAPTADA) Sérgio inventou as operações matemáticas # e @ entre os números racionais, como abaixo:

$$a\#b = a^2 + b^2$$

$$a@b = (a+b)^2$$

Por exemplo, $1\#4 = 1^2 + 4^2 = 17$ e $1@(-6) = \left(1+(-6)\right)^2 = 25$. Utilizando as operações criadas por Sérgio, responda as questões abaixo:

a) Qual o valor de:

- $(-1)\#1$?
- $1\#(-5)$?
- $1\#5$?
- $2\#3$?
- $6\#0$?
- $2@0$?
- $3@2$?
- $2@3$?
- $2@(-3)$?
- $(-1)@1$?

b) Qual é o valor de $(2@3) - (2\#3)$?

2) Sejam $a, b \in \mathbb{Q} - \{0\}$. Definimos as operações:

$$a\Delta b = ab$$

$$a\blacksquare b = b^a$$

I) Calcule:

a) $1\Delta 3$

b) $3\Delta 1$

c) $(-2)\Delta(-3)$

d) $(-3)\Delta(-2)$

e) $3\Delta 2$

f) $2\Delta 3$

g) $3\blacksquare 5$

h) $2\blacksquare(-1)$

i) $6\blacksquare 1$

j) $1\blacksquare 6$

II) Nos itens (i) e (j), realizamos a operação $\blacksquare$ com os mesmos números, entretanto os resultados obtidos são distintos. O que isso nos permite concluir?

III) E quanto à operação Δ: é comutativa? Justifique.

3) Em $\mathbb{Q}$, definimos a operação:

$$x * y = x + y - 3$$

a) Calcule:

- $2 * 3$
- $5 * 3$
- $10 * 3$
- $\frac{8}{5} * 3$

b) O que ocorre quando uma das parcelas é 3?

c) Podemos dizer que 3 é o elemento neutro da operação $*$?

d) Calcule:

- $2 * 4$
- $8 * (-2)$
- $3 * 3$
- $5 * 1$

e) Em cada uma das operações realizadas no item (d), obtivemos como resultado o elemento neutro relativo à operação $*$. O que isso significa?

f) Dado um número $a \in \mathbb{Q}$, qual é o elemento oposto de a?

g) Calcule:

- $4 * 5$
- $5 * 4$
- $(-2) * 6$
- $6 * (-2)$

h) Analisando o item anterior, vimos que podemos comutar as parcelas da operação $*$ e o resultado permanece igual. Será que isto é possível para quaisquer números?

i) Calcule:

- $(1 * 6) * 5$
- $1 * (6 * 5)$
- $(9 * 4) * 2$
- $9 * (4 * 2)$

j) Pelo item anterior, vimos que podemos associar de maneiras distintas as parcelas da operação $*$ e mesmo assim obtemos o mesmo resultado. Isto ocorre para quaisquer números racionais?

APÊNDICE B – ATIVIDADES DO 3º MOMENTO DISPONÍVEIS PARA IMPRESSÃO

1) Considerando a operação

$$x * y = x + y - 3,$$

resolva as equações:

a) $5 * m = 0$

b) $x * 23 = 25$

c) $(x - 7) * 5 = 15$

d) $(m + 4) * (m + 2) = 3$