ATIVIDADES COM O GEOGEBRA: INTRODUÇÃO AO CONCEITO DE DERIVADA

Paula Gabrieli Santos de Assumpção
Curso de Especialização em Educação Matemática - UFSM
paulinha_gaby@yahoo.com.br

Inês Farias Ferreira
Departamento de Matemática- UFSM
inesfferreira10@gmail.com

Resumo

O presente artigo enfoca parte da pesquisa decorrente do trabalho de monografia do Curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Federal de Santa Maria. Este apresenta como proposta uma sequência de ensino que visa contribuir no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de cálculo diferencial e integral. O conteúdo abordado refere-se às noções básicas envolvidas no conceito de derivada, utilizando como ferramenta didática o *software* de geometria dinâmica, *GeoGebra*. Para tanto, foram elaboradas atividades fundamentadas em alguns princípios da teoria dos campos conceituais. Durante a elaboração e reflexão desta proposta pode-se constatar que o recurso tecnológico escolhido, aplicativo *GeoGebra*, apresenta diversas ferramentas que possibilitam explorar e discutir de forma concomitante aspectos geométricos e algébricos envolvidos no tema que será abordado.

Palavras-chave: Derivada; *GeoGebra*; Sequência Didática.

1. Introdução

Nos últimos anos, a rápida evolução tecnológica vem ocasionando mudanças em toda sociedade, devido à inserção de seus recursos e benefícios em diversas situações do cotidiano. Diante disto, surge a necessidade da educação adequar-se a esta realidade, isto é, ela precisa estar atenta às transformações e aos novos instrumentos que os recursos tecnológicos podem oferecer. Pensando nessa perspectiva, este artigo apresenta parte de uma proposta de ensino, resultado de uma pesquisa realizada como trabalho de monografia do Curso de Especialização em Educação Matemática da Universidade Federal de Santa Maria. Nesta proposta são abordadas algumas noções básicas envolvidas no conceito de derivada, conteúdo este presente nas disciplinas de cálculo diferencial e integral através da elaboração de uma sequência didática utilizando-se o *software GeoGebra*. Para a elaboração das atividades utilizou-se como referência a teoria dos

campos conceituais, na qual pauta-se que o desenvolvimento cognitivo em sua essência é a conceitualização.

2. Tecnologia e Educação Matemática

Com a integração de recursos tecnológicos em sala de aula aumentam-se as pesquisas e estudos que englobam esta realidade. Diante disto, buscou-se um levantamento de algumas potencialidades que estes podem oferecer nas aulas de matemática.

Em relação ao uso de recursos tecnológicos disponíveis através da informática, Bovo (2004) menciona como possibilidades do uso da mídia informática para a sala de aula a visualização gráfica, investigação ou experimentação, simulação, possibilidade de formulação de hipóteses, e também da eliminação do tempo excessivo gasto em cálculos, enfatizando-se a discussão e estratégia.

Ainda, Gontijo (2008) diz que a aprendizagem não se restringe aos aspectos conceituais, relacionados ao objeto de conhecimento: matemática ou aspectos técnicos, relativos ao manuseio do uso do computador e seus recursos, mas também ao aspecto social, onde alunos e professores se colocam em posição interativa, diferentemente da posição tradicional onde o professor ocupa o lugar do saber e o aluno o de receptor de informações.

Nesse sentido é possível evidenciar que existem outras formas de conceber o ensino, diferentes do que estamos acostumados a presenciar, conforme descreve Richit (2005):

> A construção do conhecimento não se sustenta apenas na prática repetitiva de exercícios, na qual o aluno, muitas vezes, não tem a possibilidade de refletir e conjecturar sobre temas abordados nas atividades de sala de aula ou investigar propriedades e conceitos inerentes a estes conteúdos, a prática docente demanda novas reflexões. (RICHIT, 2005, p. 27).

O uso do recurso tecnológico no processo de ensino e aprendizagem envolve uma mudança comportamental, tanto no professor quanto no aluno. Nessa perspectiva, Moran (2007) diz que o professor além de conhecer a área específica, precisa aprender a ensinar a partir da organização de ações para facilitar a aprendizagem do aluno.

Quanto ao papel do professor, Bittar (2010) diz que a intervenção do mesmo é fundamental, cabe a ele escolher e preparar atividades coerentes com suas escolhas teórico metodológicas. E também conhecer as tecnologias disponíveis e estudá-las como mais um recurso didático para o processo de aprendizagem. Dessa forma pretende-se que a aprendizagem torne-se mais significativa, proporcionando interação entre os alunos e a máquina, construindo conhecimentos, permitindo a e estes vivenciarem situações que, muitas vezes, não tinham sentido, ou tinham outro sentido no ambiente do papel e lápis.

Além disso, o papel do aluno junto a essa abordagem de ensino também se modifica. Segundo Moran (2000), o aluno nesse processo assume papel de aprendiz ativo e participante (não mais passivo e repetidor), de sujeito de ações que levem a aprender e a mudar seu comportamento. Ainda, Richit (2005) afirma que nesta perspectiva é concedido ao aluno autonomia para conduzir sua aprendizagem, a qual pode acontecer quando este cria atividades ou desenvolve projetos de trabalho, ao invés de apenas reproduzir longas listas de exercícios ou atividades fechadas, sugeridas pelo professor.

3. O Ensino de Cálculo

Nos últimos anos a disciplina de cálculo diferencial e integral desenvolvida em inúmeros Cursos Superiores é objeto de pesquisa em muitos estudos, devido às dificuldades encontradas pelos alunos em alguns conteúdos presentes na mesma, acarretando elevados índices de reprovação e desistência. Diante disto, buscaram-se através de pesquisa bibliográfica possíveis causas desta problemática.

O pesquisador Melo (2002) afirma que os conceitos de cálculo diferencial e integral, na maioria das vezes, tem sido "ensinados e aprendidos" por meio de aulas que valorizam a memorização, a aplicação de técnicas, regras.

Também Marin (2009 apud KOGA (1998), PALIS (1995) e NASSER (2004)) levanta algumas causas para estes problemas na aprendizagem da disciplina de cálculo. Dentre as causas indicadas, citam-se: o fato do cálculo diferencial e integral ser uma disciplina de transição entre o ensino médio e ensino superior; na maioria das vezes está no primeiro semestre do curso e possui

grande número de alunos em sala; muitos alunos possuem uma formação precária proveniente do ensino médio prejudicando seu desempenho; a carga horária é insuficiente. E, por fim, a grande quantidade de matéria a ser exposta, faz com que a aula siga um ritmo acelerado, havendo pouco espaço para o aluno pensar e questionar.

Dessa forma, para que o ensino de Cálculo Diferencial não se torne apenas um apanhado de fórmulas e técnicas que valorizem apenas as práticas de memorização e repetição neste estudo optou-se pela utilização do computador como ferramenta auxiliar no processo de ensino e aprendizagem. Segundo Valente (1993), quando o computador é visto como ferramenta ele não é caracterizado como instrumento que ensina o aprendiz, mas uma ferramenta com a qual o aluno desenvolve algo e com isto, o aprendizado ocorre pelo fato de se estar executando uma tarefa através do computador.

4. O Aplicativo *GeoGebra*

Na pesquisa foi utilizado o aplicativo de geometria dinâmica, *GeoGebra*, por este apresentar características relevantes para o estudo proposto, dentre elas: por ser multi plataforma (*Linux* ou *Windows*); apresentar versão em português; suas representações geométricas e algébricas estarem interconectadas; apresentar comandos específicos envolvendo o conteúdo de derivadas e, ter a possibilidade de gerar *applets* que funcionam através de qualquer navegador com *plugin* Java instalado.

5. Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais é uma tendência teórica dentro da didática da matemática que teve forte influência francesa, foi desenvolvida por Gerard Vergnaud, doutor Honoris Causa da Universidade de Genebra, sendo um dos fundadores da Escola Francesa de Didática da Matemática.

O pesquisador Moreira (2002) resume esta teoria como cognitivista neopiagetiana que oferece um referencial ao estudo de desenvolvimento cognitivo e da aprendizagem de

competências complexas, particularmente aquelas implicadas nas ciências e na técnica, levando em conta os próprios conteúdos do conhecimento e a análise conceitual de seu domínio.

Para definição de campo conceitual, na visão de Vergnaud, encontramos em Moreira (2002, p.2) como sendo "um conjunto informal e heterogêneo de problemas e situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição".

Seguindo este pensamento, Carvalho Jr (2008) afirma que:

> (...) para Vergnaud, o processo de desenvolvimento cognitivo, pode ser fortemente dependente das situações a serem enfrentadas pelo sujeito, tem como cerne a construção de conceitos, ou seja, a conceitualização. A conceitualização é um processo longo que requer uma diversificação das situações. (CARVALHO JR, 2008, p.213).

A partir de uma breve análise acerca da teoria dos campos conceituais procurou-se relacioná-la no estudo do conceito de derivada afim de interligá-lo com outros conceitos, como por exemplo: estudo de funções, noções de geometria analítica (equação e inclinação da reta). Também encontrou-se forte relação do assunto com outras áreas do conhecimento que se utilizam da derivada como ferramenta para resolver problemas sobre fenômenos que envolvem taxa de variação. Por exemplo, na física, o conceito de derivada está presente para definir a velocidade instantânea como taxa de variação da distância percorrida em relação ao tempo.

Como já mencionado anteriormente, este artigo descreve de forma sucinta a proposta de uma sequência didática envolvendo o conceito de derivada através de atividades (situações) criadas através do *software GeoGebra* e que englobam este campo conceitual.

A seguir serão descritas três atividades tratando de reta tangente, velocidade instantânea e função derivada, respectivamente.

6. Algumas Atividades Propostas

6.1. Atividade 1 - Inclinação e equação das retas secante e tangente

A partir do gráfico das funções $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{2}{x}$ e $h(x) = \sqrt{x}$, dois pontos distintos *P* e *Q* pertencentes a ele, sendo *P* o ponto de tangência, o aluno movimentará o ponto *Q* sobre a

função de tal forma que se aproxime de *P* tanto pelo lado esquerdo quanto pelo direito. Em ambos os lados obterá o valor da inclinação e a correspondente equação da reta secante que passa por *P* e *Q* (figura 1). Sendo que, em um momento nesta manipulação o ponto *Q* irá coincidir com o ponto *P*, onde sugere-se ao professor explorar a indeterminação que ocorre em termos algébricos e questionar quanto ao desaparecimento da reta secante (figura 2). Durante a atividade pode-se propor os seguintes questionamentos relativos à reta secante:

- Qual a relação existente entre sua inclinação e o coeficiente angular e, entre a interseção com o eixo das ordenadas e o seu coeficiente linear?

- Qual é o comportamento do coeficiente angular da reta quando o ponto *Q* se aproxima do ponto *P*?

Por fim, o aluno visualizará a inclinação e a equação da reta tangente à curva em *P* (figura 3). E, complementando pode ser discutido se os itens anteriores são válidos no ponto de tangência *P*.

Espera-se que a atividade leve o aluno concluir que, à medida que o ponto *Q* se aproxima do ponto *P* a inclinação da reta secante se aproxima mais do valor da inclinação da reta tangente.

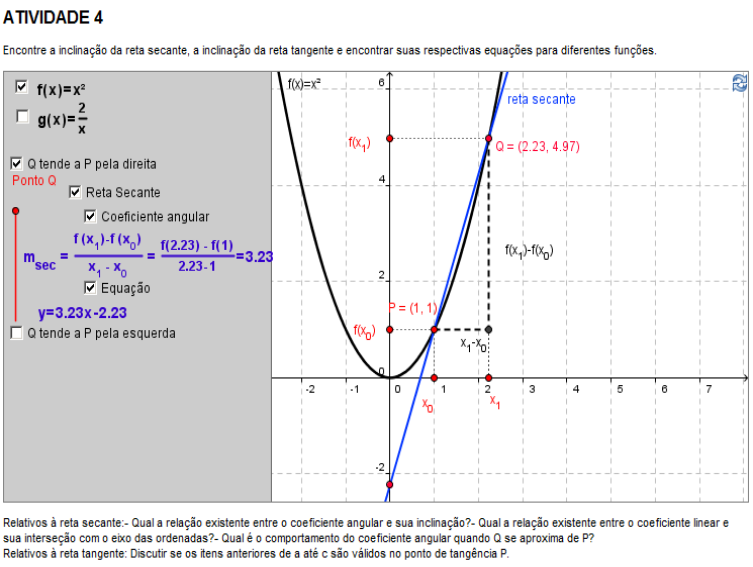

Figura 1 – Equação e inclinação da reta secante de $f(x) = x^2$.

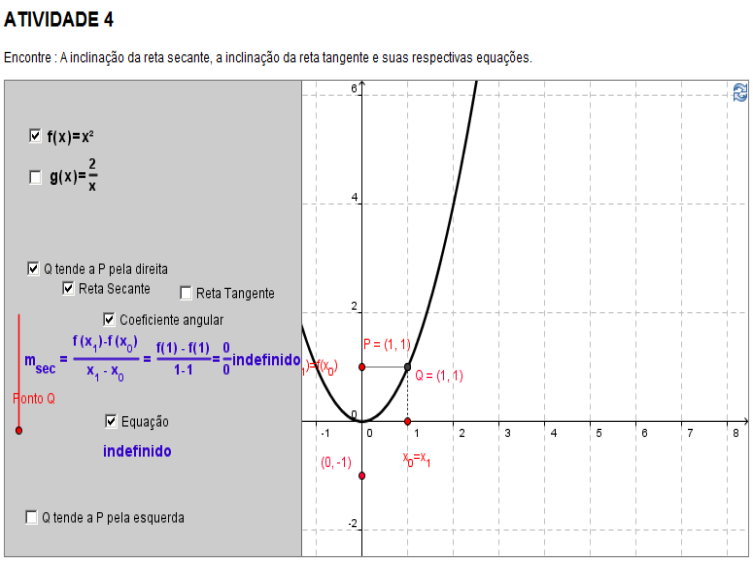

Figura 2- Imagem do *applet* quando os pontos Q e P coincidem.

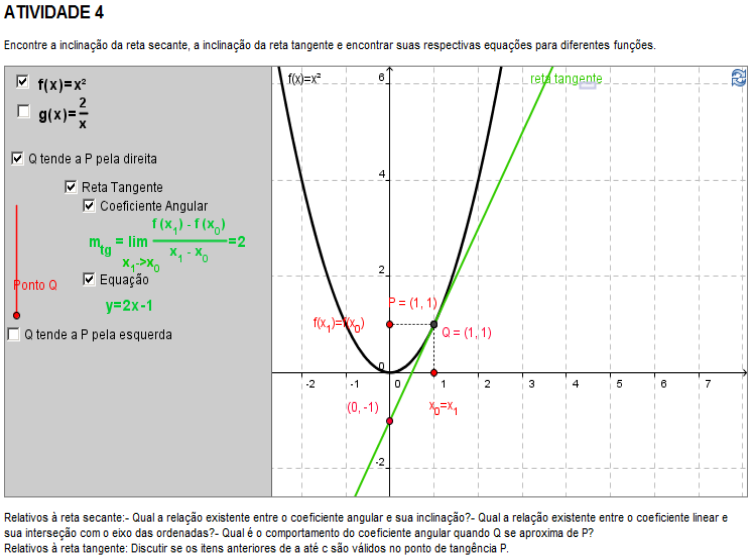

Figura 3- Equação e inclinação da reta tangente.

6.2. Atividade 2 – Velocidade instantânea

A partir do gráfico que representa a trajetória de uma bola arremessada para cima seguindo o comportamento da função $f(x) = -x^2+8x$, onde x representa o tempo em segundos e,

f(x), representa a altura da bola em relação ao chão em metros, será proposta uma análise sobre a velocidade instantânea da bola quando o tempo é de 2 segundos. Pretende-se verificar que não é possível o cálculo da velocidade instantânea da mesma forma que é calculada a velocidade média, pois quando o tempo é de 2 segundos não se tem intervalo de tempo. Para isto, tem-se sobre o gráfico da função dois pontos distintos $P = (2, f(2))$ e Q, sendo que ponto P é fixo e o ponto Q poderá ser movimentado sobre o gráfico da função, tanto pela direita como pela esquerda de P. Assim, será calculado o valor das velocidades médias em intervalos de tempo de amplitudes cada vez menores. Nas figuras 4 e 5 é mostrado para dois casos.

Espera-se que o aluno perceba que, quanto menor o intervalo de tempo acrescentado aos 2 segundos, a sequência encontrada para a velocidade média estará cada vez mais próxima de 4m/s. Em termos de limite, se o intervalo de tempo se aproximar de zero, a velocidade se aproximará de 4m/s, e está será a velocidade instantânea da bola quando o tempo for de 2 segundos.

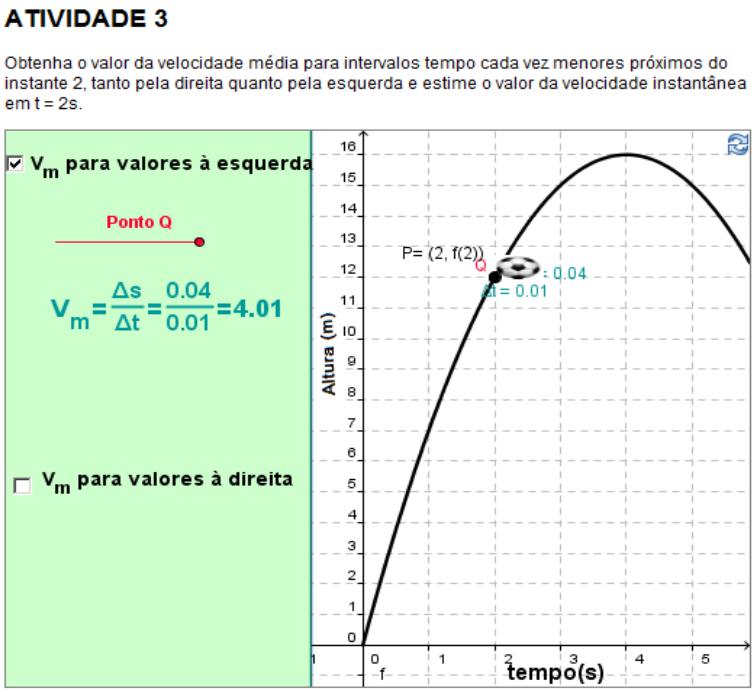

Figura 4- Velocidade média para uma variação de tempo de 0,1 segundos.

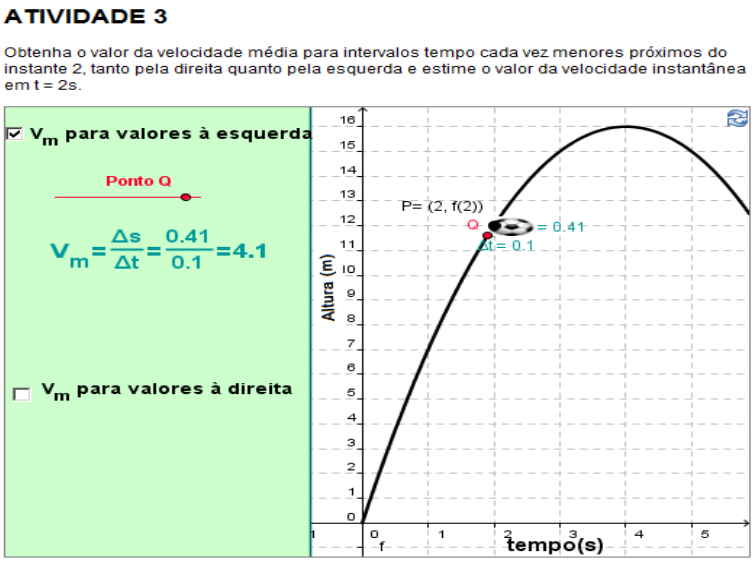

Figura 5 - Velocidade média para uma variação de tempo de 0,01 segundos.

6.3. Atividade 3 – Gráfico da função derivada

A partir do gráfico de uma função quadrática (podendo variar os valores de seus coeficientes *a*, *b* e *c* através de seletores) o aluno visualizará a reta tangente à função em um ponto P, sua inclinação e o valor da derivada em P, para isto é disponibilizado as caixas: "reta tangente", "inclinação" e "valor da derivada em P" (figura 6).

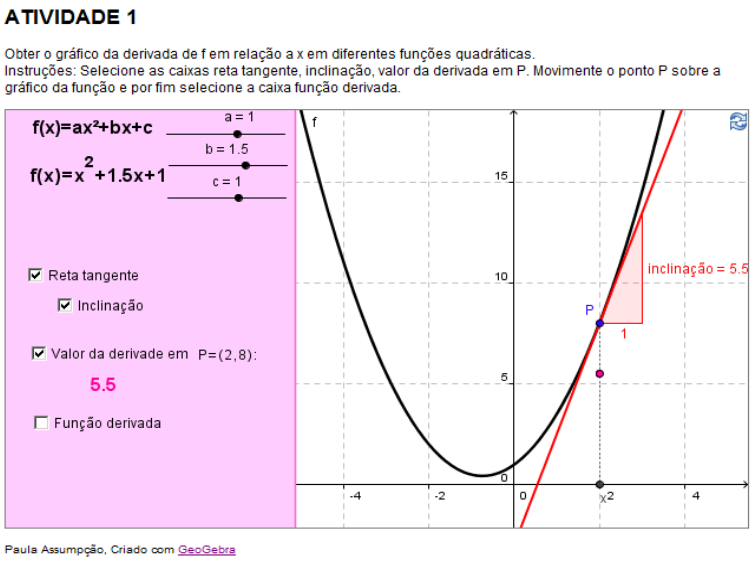

Figura 6 – Gráfico da função $f(x) = x^2 + 1{,}5x + 1$, da reta tangente em $P=(2,f(2))$ e do valor da derivada em P.

O aluno arrastará o ponto de tangência sobre o gráfico da função e assim será determinado o valor da derivada em diversos pontos de seu domínio (figura 7). Deste modo, o conjunto de todos os pontos $(x, f'(x))$ formará o gráfico da derivada de f em relação a x e, para finalizar se selecionada a caixa "função derivada", automaticamente aparecerá o gráfico e a lei desta função (figura 8).

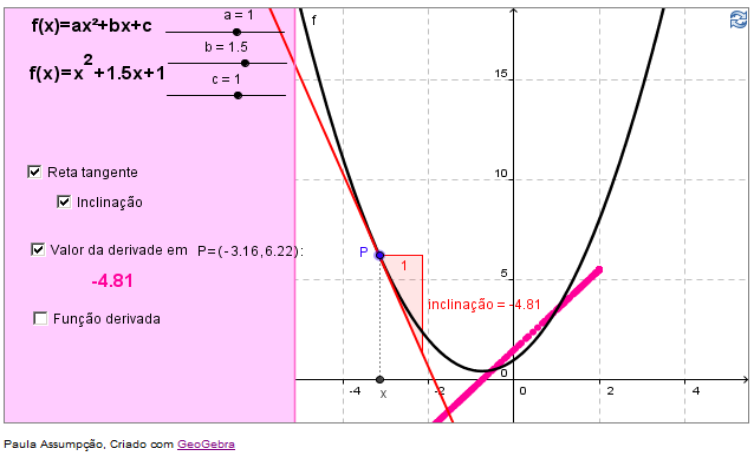

Figura 7 - Imagem do *applet* após movimentado o ponto P.

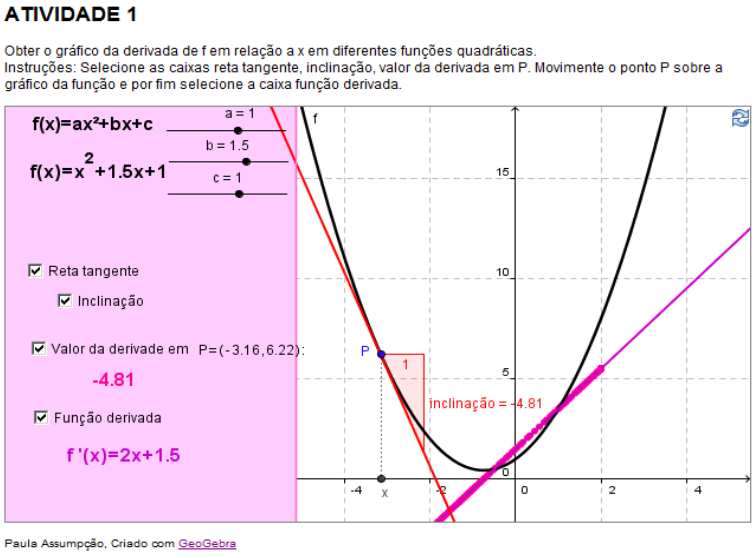

Figura 8 - Gráfico da função derivada da função $f(x) = x^2+1,5x+1$ em relação a x.

7. Considerações Finais

A partir desta pesquisa observou-se que os recursos tecnológicos, em particular o *software GeoGebra*, podem ser considerados como ferramentas favoráveis no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, no caso deste trabalho no estudo de derivada. Destaca-se também que foi possível através do aplicativo, de forma concomitante, discutir aspectos geométricos e algébricos envolvidos, complementando-se um ao outro.

Com base na Teoria dos Campos Conceituais buscou-se desenvolver atividades que possam favorecer o aluno a construir um campo conceitual a partir da interação dele com a sequência didática, onde ele atua como sujeito ativo, envolvendo-se em uma série de ações para desenvolver as atividades e buscar algum resultado.

Pretende-se que esta pesquisa sirva como reflexão e estímulo para professores de matemática, em particular docentes da disciplina de cálculo diferencial, afim de que possam inserir em sua prática docente recursos tecnológicos, elaborando suas próprias propostas.

Referências Bibliográficas

BITTAR, M. A Escolha do Software Educacional e a Proposta Didática do Professor: Estudo de Alguns Exemplos em Matemática. In: Beline, W.; Costa, N.M.L. (Org.). *Educação Matemática, Tecnologia e Formação de Professores: algumas reflexões*. Campo Mourão: editora Fecilcam, 2010, p. 215-243.

BOVO, A.A. *Formação Continuada de Professores de Matemática para o Uso da Informática na Escola: Tensões entre Proposta e Implementação.* 2004. 358f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2004.

CARVALHO JR, G.D.; AGUIAR JR, O. Os Campos Conceituais de Vergnaud como Ferramenta para o Planejamento Didático. In: *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*. v. 25, p. 207-227, 2008. **Anais eletrônicos...** Florianópolis, SC. UFSC, 2008. Disponível em: <http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/fisica/article/view/6061/5632> Acesso em: 10 mar. 2010.

GONTIJO, F.L. *Uma Experiência com Software Educativo na Escola: a Tecnologia e a Prática Pedagógica em Discussão*. Separata de: **Revista Educação e Tecnologia**, Belo Horizonte, v.13, n.2, p. 96-100, 2008.

MELO, J.M.R. *Conceito de Integral: Uma Proposta Computacional para seu Ensino e Aprendizagem.* 2002. 180f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

MARIN, D. *Professores de Matemática que Usam a Tecnologia de Informação e Comunicação no Ensino Superior***,** 2009, 164f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2009.

MORAN, J.M.; MASSETTO, M.T. ; BEHRENS, M.A. *Novas Tecnologias e Mediação Pedagógica*. 14. ed. Campinas: Papirus, 2000.

MORAN, J.M. *A Educação que Desejamos: Novos Desafios e como Chegar Lá*. 3. ed. Campinas: Papirus, 2007.

MOREIRA, M.A. A Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, o Ensino de Ciências e a Pesquisa nesta Área**.** In: *Investigação em Ensino de Ciências*, v.7, n.1, 2002.

RICHIT, A. *Projetos em Geometria Analítica Usando Software de Geometria Dinâmica: Repensando a Formação Inicial Docente em Matemática***.** 2005. 215f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

VALENTE, J.A. *Computadores e Conhecimento: Repensando a Educação.* Campinas: editora da UNICAMP, 1993.