
# OFICINA DE MATEMÁTICA: FRACTAIS

Michele Pilato
UFPR
mihpilato@yahoo.com.br

Prof ª Elisangela de Campos
Orientadora-UFPR
elismat@ufpr.br

Fabio da Costa Rosa
UFPR
fabiokinasz@gmail.com

Greicy Kelly Rockenbach da Silva
UFPR
greicyrockenbach@gmail.com

Luana Leal
UFPR
luavrileal@yahoo.com.br

**Resumo:**

Uma das atividades desenvolvidas pelo PIBID-Matemática foi a organização e execução de uma oficina sobre fractais. A elaboração desta oficina começou com um estudo teórico sobre o assunto e sobre as possibilidades do seu ensino, já que não conhecíamos o assunto e nem suas possibilidades de aplicação na escola. Depois de muito estudo e reflexão sobre o tema, foram elaboradas sequencias didáticas para serem desenvolvidas com os alunos do 8º ano do ensino fundamental e do 1º ano do ensino médio. Com o 8º ano foram construídos alguns dos fractais geométricos, como por exemplo, Triângulo de Sierpinski e cartão fractal Degraus Centrais, juntamente com a construção desses fractais foi solicitado o cálculo de comprimento de segmentos, áreas, perímetros e volumes em cada iteração (nível) de construção. Para os alunos do 1º ano do ensino médio foi solicitado que eles se organizassem em grupos, pesquisassem mais sobre o assunto e preparassem uma apresentação para os outros alunos da escola na Semana Cultural e Desportiva. Como os resultados dessas duas experiências foram positivos, uma vez que os alunos destas escolas participaram ativamente de todas as atividades propostas e pareceram compreender os conceitos matemáticos envolvidos, esta oficina foi adaptada para ser trabalhada com os alunos da terceira fase do vestibular do curso de Matemática (Processo Seletivo Estendido, PSE). Nesta oficina foi possível avançar em relação aos conteúdos matemáticos trabalhados, tratando, por exemplo, a dimensão de um fractal. Foram construídos os fractais: Poeira de Cantor, Curva de Peano, Triângulo de Sierpinski e Floco de Neve de Koch. Na sequencia foram abordados o termo geral de uma progressão geométrica relacionando com função exponencial, pois, os níveis de iteração formam uma progressão geométrica. Todo o processo de elaboração, execução, avaliação e a reflexão sobre os resultados foram de grande importância na nossa formação.

**Palavras-chave:** Fractais, Oficinas, Reconhecimento de Padrão.

## INTRODUÇÃO

No decorrer do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID), subprojeto Matemática, os bolsistas têm a oportunidade de explorar o ambiente escolar de várias maneiras, como por exemplo, ministrar algumas aulas supervisionadas pelos professores; aulas de reforço; fazer monitoria em sala de aula; testar sequencias didáticas que são desenvolvidas pelos bolsistas na universidade, enfim diversas atividades relacionando teoria e prática são realizadas. Dentro dessa realidade, uma das propostas elaboradas foi a organização de oficinas, com a finalidade de serem apresentadas na Semana Cultural e Desportiva dos colégios participantes do projeto pelos alunos da escola.

Para uma dessas oficinas foi escolhido o tema Fractais, pois, além de se tratar de belas e ricas imagens, sendo que em alguns casos possuem semelhança com a natureza, o que tende a prender a atenção dos alunos e instiga-los, é possível trabalhar com vários conceitos matemáticos.

O presente trabalho descreve o planejamento e o desenvolvimento da execução dessa oficina sobre Fractais.

## 1. FRACTAIS NO ENSINO

Em meados da década de 60, Benoit Mandelbrot definiu fractais como uma figura feita de partes similares ao todo de alguma forma. No latim o adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, significa quebrar, fragmentar.

Os fractais, portanto, são formas geométricas que podem ser geradas por fórmulas matemáticas complexas e recursivas, ou seja, que repetem continuamente um modelo padrão, logo isto dá uma característica chamada auto similaridade aos fractais. Ao ser ampliado, um fractal revela figuras em escala menor que são proporcionais a figura que o contém.

Como os elementos da natureza possuem irregularidades e complexidades imensas, a geometria euclidiana “clássica” não poderia descrever adequadamente as curvas destes elementos. Assim, para melhor representar esses elementos, é utilizada a Geometria Fractal, que consiste numa extensão da geometria clássica e, além disso, é aliada ao desenvolvimento da informática.

No ensino, Barbosa sugere que,

> Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da “regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades”.
>
> (Barbosa, 2005, pág. 14)

## 2. PLANEJAMENTO DA OFICINA

A oficina começou a ser formulada a partir de estudos teóricos sobre o tema, bem como suas diversas áreas de aplicações. Posteriormente fizemos análise das possibilidades existentes de ensino desse assunto, juntamente com os conteúdos que podem ser explorados. Diante disso, optamos pela seguinte sequencia:

- Uma introdução sobre o que são fractais, com uma explicação, seguido de apresentação de slides e vídeo[1]. Escolhemos iniciar assim, por ser necessário inteirar os alunos com o assunto e apresentar algumas imagens de fractais, pois geralmente este assunto não é visto em sala de aula.
- Construção dos fractais geométricos: Triângulo de Sierpinski, Curva de Peano, Floco de Neve de Koch e o cartão fractal Degraus Centrais. Essa etapa foi trabalhada para obter dos alunos maior envolvimento, já que o resultado das construções é curiosas figuras.
- Juntamente com a construção de cada fractal foi solicitado o preenchimento da respectiva tabela. Em geral, as tabelas consistiam no cálculo de comprimento de segmentos, áreas, perímetros e volumes em cada iteração (nível) de construção, fazendo com que os alunos retomassem alguns conceitos já vistos anteriormente, numa situação de certa forma prática.

## 2.1. EXEMPLO DE ATIVIDADE

No desenvolvimento da oficina todos os fractais foram trabalhados da mesma maneira, ensinando as primeiras iterações da construção de cada fractal no quadro e em seguida eram construídos, em grupos, pelos alunos os fractais na cartolina. Segue o passo a passo da construção do Triangulo de Sierpinski que foi entregue aos alunos:

[1] Vídeo disponível em: <http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/modules/debaser/singlefile.php?id=21118>


1. Construa um triângulo equilátero de 28 cm de lado.

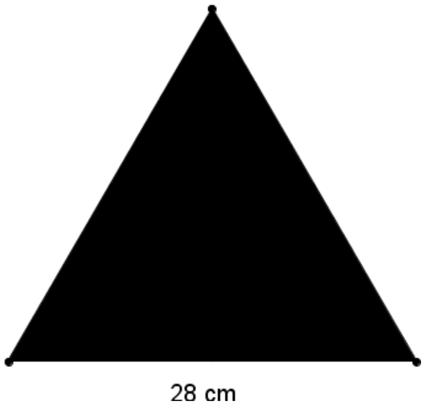


Figura1: triângulo equilátero. Fonte: próprio autor

2. Marque o ponto médio de cada um dos lados do triângulo e em seguida construa segmentos unindo os pontos médios, obtendo, assim, um segundo triângulo interior ao inicial. Cole sobre o mesmo um triângulo branco, como na figura a seguir:

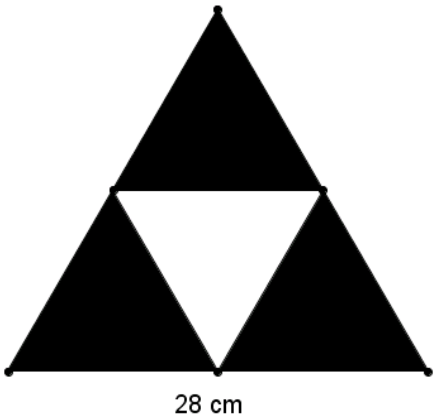


Figura 2: triângulo de Sierpinski- primeiro nível. Fonte: próprio autor

3. Faça esse procedimento mais duas vezes com os triângulos pretos que vão restando.

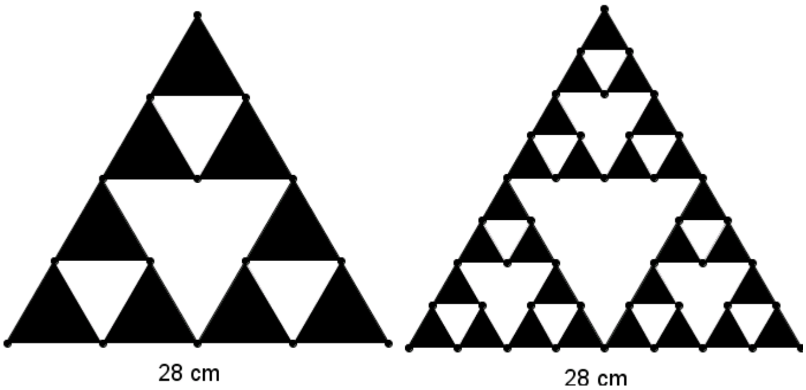


Figura 3: triângulo de Sierpinski- segundo e terceiro nível. Fonte: próprio autor

Concluída a construção, foi solicitado aos alunos que preenchessem a seguinte tabela, correspondente ao fractal.

*Tabela 1 – Tabela corresponde aos dados do Fractal Triângulo de Sierpinski.*

| **Iteração (nível)** | **N° de triângulos** | **Comprimento do lado** | **Perímetro do novo triângulo** | **Área de cada triângulo** | **Área total (parte preta)** |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $1$ | $28$ | $3 \times 28$ | $\frac{(28)^2\sqrt{3}}{4}$ | $\frac{(28)^2\sqrt{3}}{4}$ |
| 1 | $3$ | $14 = \frac{28}{2}$ | $3 \times \frac{28}{2}$ | $\left(\frac{28}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\left(\frac{28}{2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3$ |
| 2 | $9 = 3^2$ | $7 = \frac{28}{2^2}$ | $3 \times \frac{28}{2^2}$ | $\left(\frac{28}{2^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\left(\frac{28}{2^2}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^2$ |
| 3 | $27 = 3^3$ | $7 = \frac{28}{2^2}$ | $3 \times \frac{28}{2^3}$ | $\left(\frac{28}{2^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\left(\frac{28}{2^3}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^3$ |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| N | $3^N$ | $\frac{28}{2^N}$ | $3 \times \frac{28}{2^N}$ | $\left(\frac{28}{2^N}\right) \frac{\sqrt{3}}{4}$ | $\left(\frac{28}{2^N}\right)^2 \frac{\sqrt{3}}{4} \times 3^N$ |

Para finalizar, foram corrigidos os dados da tabela no quadro, incentivando a participação dos alunos.

## 3. DESENVOLVIMENTO DA OFICINA

Com algumas adaptações a oficina foi aplicada em uma turma de 8° ano do ensino fundamental, uma turma do 1° ano do ensino médio e também como mini curso em um evento.

### 3.1. OFICINA PARA O 8° ANO

Esta oficina foi aplicada no Colégio Estadual Hildebrando de Araújo em uma turma do 8° ano.

Foram utilizadas oito aulas para a aplicação, o dobro do previsto, isso ocorreu por uma série de fatores, como dificuldades dos alunos na utilização da régua para a construção dos fractais, aulas reduzidas no primeiro dia, devido a campeonato de jogos que iriam acontecer após o intervalo.

No decorrer das aulas foi possível perceber que os alunos não possuem habilidades em trabalhar com construções, ou seja, parece não estarem habituados em desenvolver atividades que envolvam desenhar usando a régua, por exemplo. Também por esse fato, não conseguimos trabalhar com esses alunos o fractal Floco de Neve.

No preenchimento da tabela, foi necessário retomar os conceitos envolvidos, como área, volume e perímetro. Percebemos que os alunos apresentaram dificuldades em distinguir os diferentes dados a cada iteração. Não foi trabalhado com essa turma o conceito de generalização, por ser inadequada ao nível em que estavam.

Figura 4: foto oficina com o 8° ano. Fonte: próprio autor

### 3.2. OFICINA PARA O 1° ANO

A oficina foi aplicada no Colégio Estadual Professora Maria Aguiar Teixeira.

Para a turma do 1° ano, houve a possibilidade de realizar uma atividade complementar, que consistia em orientar os alunos para que eles pesquisassem mais sobre fractais, e apresentassem os frutos de suas pesquisas e construções para os outros alunos da escola na Semana Cultural e Desportiva.

Na tentativa de realizar a maior parte das atividades propostas foi utilizada uma aula além do planejado, e mesmo assim não foi possível fazer o fractal curva de Peano, nem a tabela correspondente.

Observou-se a falta de ritmo e de atenção dos alunos, visto que para uma parte deles foi necessário tentar três vezes até conseguir obter o fractal esperado. Sobre o preenchimento das tabelas foi possível perceber a dificuldade dos alunos em traduzir suas conclusões em expressões algébricas, bem como a falta de intimidade com frações e suas propriedades.

Apesar de terem encontrado dificuldades, houve grande participação e colaboração por parte dos discentes.


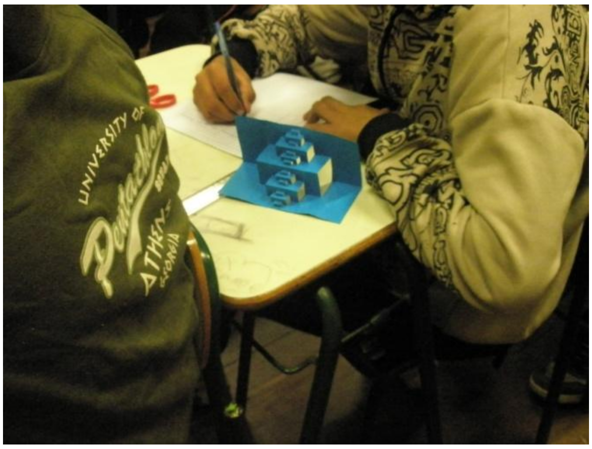

Figura 5: foto oficina com o 1° ano. Fonte: próprio autor

### 3.3 MINICURSO

Como as duas práticas desenvolvidas tiveram resultados positivos, pois os alunos participaram ativamente de todas as atividades propostas e pareceram compreender os conceitos matemáticos envolvidos, foi proposto que fosse oferecido um minicurso para os alunos da terceira fase do vestibular do curso de Matemática (Processo Seletivo Estendido, PSE) no evento Programa de Verão da UFPR.

#### 3.3.1 PLANEJAMENTO

A oficina foi então adaptada, pois neste minicurso era possível avançar em relação aos conteúdos matemáticos trabalhados, tratando, por exemplo, de dimensão fractal.

Como o tempo disponível no minicurso foi de 3 horas, a dinâmica foi feita de forma diferente, planejamos a seguinte sequencia:

- Iniciarmos com um vídeo de Mandelbrot[2] e uma conversa sobre o tema fractais, definições e aplicações.
- Posteriormente os alunos seriam divididos em grupos, sendo que cada grupo construiria um fractal diferente e preencheria uma tabela.

[2] Disponível em: http://www.ted.com/talks/lang/en/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.html

- Em seguida, seriam socializados, todos os fractais construídos pelos grupos: Poeira de Cantor, Curva de Peano, Triângulo de Sierpinski e Floco de Neve de Koch; afim de que todos os participantes tivessem conhecimento dos outros fractais e suas respectivas tabelas.
- Na continuação seriam trabalhados com o termo geral de uma progressão geométrica relacionando com função exponencial, pois no preenchimento da tabela, os níveis de iteração formam uma progressão geométrica. Esse tópico foi relacionado, pois, além de ter sido feito um estudo anteriormente, pelos bolsistas envolvidos, sobre Progressão Geométrica e Progressão Aritmética, achamos conveniente mostrar aos participantes o que havia "por trás" dos dados das tabelas.
- Para concluir o assunto, foi ensinado o conceito de dimensão fractal. Para abordamos esse assunto foi desenvolvido uma complementação do estudo teórico.

A seguir, uma parte do material didático que tratava do tópico dimensão fractal, no qual foi apresentado algumas ideias no minicurso.

A geometria Euclidiana é tratada nas três dimensões que conhecemos: altura, largura e profundidade. A dimensão de um fractal indica o espaço ocupado por ele que está relacionado com o seu grau de aspereza, irregularidade (igual em diferentes escalas) ou fragmentação.

Os fractais, diferente das figuras planas e espaciais da geometria euclidiana, podem apresentar dimensão fracionária. Para explicar o conceito de dimensão fractal, é necessário entender o que é dimensão em primeiro lugar. Obviamente, uma reta tem dimensão 1, um plano tem dimensão 2 e o cubo dimensão 3. Mas o que significa isto?

Dizemos que a reta tem dimensão um porque possui comprimento. O plano tem dimensão 2 porque apresenta comprimento e largura e similarmente o cubo tem dimensão 3 porque possui comprimento, largura e altura. Na verdade esses fatos são verdadeiros, apesar de não se expressarem de maneira matemática rigorosa. É possível observar que podemos quebrar um segmento de reta em 4 partes similares, cada um com um fator de ampliação 4 para chegar ao segmento inicial. Podemos quebrar o mesmo segmento em 7 partes similares, cada um com um fator de ampliação 7. Em geral,


podemos quebrar um segmento em N pedaços similares cada um com um fator de ampliação N.

Com um quadrado é diferente. Nós podemos decompor um quadrado em 4 sub-quadrados similares, cada um com fator de ampliação 2. De forma parecida, podemos quebrar o mesmo quadrado em 9 sub-quadrados, cada um com fator de ampliação 3, ou então em 25 sub-quadrados cada um com fator de ampliação 5. Claramente o quadrado pode ser escrito como $N^2$ cópias similares de si mesmo, cada um com fator de ampliação N da figura original.

Finalmente, podemos decompor um cubo em peças similares, cada um com fator de ampliação N.

Observe que se chamarmos o fator de ampliação de N, o número de figuras similares de P e D de dimensão, então teremos a seguinte igualdade:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{N}^{\boldsymbol{D}}$$

Para escrevermos a variável D em termos das demais é necessário fazer uso de logaritmos, sendo assim depois de alguns cálculos obtemos a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{D} = \frac{\log \boldsymbol{P}}{\log \boldsymbol{N}}$$

Para a poeira de Cantor, por exemplo, na primeira iteração é gerado dois segmentos (P=2), cada um com um fator de ampliação 3 (N=3), sendo assim, na fórmula citada anteriormente obtemos que a dimensão da poeira de Cantor é:

$$\boldsymbol{D} = \frac{\log 2}{\log 3} \cong 0{,}6308$$

Observe que a dimensão da poeira de cantor é maior que zero, que seria a dimensão de um ponto, e menor que um, que seria a dimensão de uma reta, o que condiz com sua forma, pois decorridas infinitas iterações, a poeira de cantor é na verdade um segmento de reta com infinitos furos.

### 3.3.2. APLICAÇÃO DO MINICURSO

O planejamento proposto para esse minicurso foi cumprido e não sofreu alterações, foi apresentado por quatro bolsistas, pois o número de participantes era elevado, com cerca de 50 alunos.

Na construção dos fractais, os participantes foram ágeis e não tivemos atrasos com nenhum grupo. No preenchimento da tabela, os alunos apresentaram somente algumas dificuldades com a generalização no nível “N”.

Percebemos que os participantes ficaram interessados quando foi mostrada a relação entre os níveis de iteração das tabelas com progressão geométrica e com função exponencial, e quando foi ensinado sobre dimensão fractal. Alguns participantes vieram conversar conosco no final, interessados em aprender mais sobre os Fractais.

Figura 6:foto do minicurso. Fonte: próprio autor

## 4. CONSIDERAÇÕES FINAIS

A impressão que temos, durante as vivências realizadas em sala de aula, é que chega tudo pronto ao aluno, num processo em que o professor expõe o conteúdo e propõe atividades no quadro, e os alunos, por sua vez, copiam. A sala de aula torna-se assim, algo desestimulante tanto para o aluno quanto para o professor.

Cabe ao professor, dentro de suas realidades e possibilidades, proporcionar meios aos seus alunos para que a aprendizagem ocorra. Nós como futuros docentes, percebemos que instigar a curiosidade e a criatividade do aluno, são meios eficazes para se obter bons resultados na prática docente, e ao trabalhar Fractais com os alunos, confirmamos ainda mais essas nossas percepções.


Das oficinas aplicadas no colégio, percebemos que os alunos se envolveram com a construção dos fractais propostos, alguns alunos resolveram construir mais níveis que o solicitado, pois ficaram curiosos para verem como ficaria a imagem.

Já os pontos abordados no minicurso ofertado na universidade auxiliaram os participantes, pois, puderam de forma breve, revisar alguns conteúdos como função exponencial que faz parte da ementa da disciplina de funções, disciplina essa que faz parte do processo seletivo estendido para o ingresso no curso de Matemática da UFPR, e por outro lado por ser apresentado como um tema que pode ser usado como possibilidade de ensino, uma vez que os participantes podem optar pelo curso de Licenciatura em Matemática.

A aplicação do minicurso, foi uma experiência, digamos mais avançada, pois além de ministrarmos conteúdos em nível mais elevado, apresentamos e discutimos uma possibilidade de ensino.

Com as três práticas, uma com ensino fundamental, uma com o ensino médio e outra composta pela maioria dos participantes recém-formados no ensino médio (minicurso) notamos que o assunto fractais, se encaixa melhor no ensino médio, por ser possível explorar mais os conteúdos matemáticos envolvidos.

Essas experiências foram importantes contribuições para a formação docente dos bolsistas envolvidos, uma vez que todos passaram pelas etapas de planejamento, organização e execução das oficinas e do minicurso oferecidos.

## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a geometria fractal para sala de aula**. 2° ed. Belo Horizonte: Autentica, 2005.

MANDELBROT, Benoît: **Objetos Fractais**, seguido de Panorama da Linguagem Fractal. Tradução de Carlos Fiolhais e José Luis Malaquias Lima. 1°ed. Lisboa: Gradiva, 1991.

TED. Benoit Mandelbrot: Fractais e a arte da rugosidade. Disponível em: <http://www.ted.com/talks/lang/en/benoit_mandelbrot_fractals_the_art_of_roughness.html>. Acesso em: 03 fev. 2012.