Universidade Federal de Santa Maria
Departamento de Matemática
Curso de Verão 2011

Lista 1

Números Naturais

1. Demonstre por indução as seguintes fórmulas:

   (a) $\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = n^2$ (soma dos n primeiros ímpares).

   (b) $\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (soma dos n primeiros quadrados).

   (c) $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$ (soma dos n primeiros cubos).

   (d) $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$

2. **(Desigualdade de Bernoulli)** Mostre que se $r \in \mathbb{R}$ e $r \geq -1$ então

   $$1 + nr \leq (1 + r)^n, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

   (sugestão: use indução).

3. Supondo $q \neq 1$, deduza a fórmula para a soma (dos $n + 1$ primeiros termos da P. G. de razão q)

   $$1 + q + q^2 + ... + q^n$$

   escrevendo $S = 1 + q + q^2 + ... + q^n$, multiplicando essa igualdade por q e resolvendo as duas equações para S. Depois demonstre a fórmula por indução.

4. Deduza uma fórmula para cada uma das expressões abaixo e depois demonstre-as por indução:

   (a) $1^3 + 2^3 + ... + n^3$.

   (b) $1^4 + 2^4 + ... + n^4$.

   (c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + ... + n \cdot (n + 1)$.

   (d) $\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + ... + \frac{1}{n\cdot(n+1)}$.

(e) $\frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + ... + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}$.

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq j \leq n$ defina

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Use indução para mostrar que:

(a) $\binom{n}{0} = 1$.

(b) $\binom{n}{n} = 1$.

(c) $\binom{n}{j} \in \mathbb{N},\ \forall n, j \in \mathbb{N}$ com $0 \leq j \leq n$.

(d) $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j},\ 1 \leq j \leq n$ (relação de Stiffel).

6. **(Binômio de Newton)** Use indução para mostrar que

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

sendo a e b números reais quaisquer (sugestão: faça inicialmente os casos $n = 2, n = 3$ e depois o caso geral usando a relação de Stiffel). Como fica a expressão acima quando $a = b = 1$?

7. Mostre que se $r \in \mathbb{R}$ e $r \geq 0$ então

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)\frac{r^2}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

(sugestão: use indução ou Binômio de Newton).

8. Qual o erro na seguinte demonstração por indução:

Teorema Todas as pessoas têm a mesma idade.

Demonstração: Provaremos por indução que se X é um conjunto com n pessoas então todos os elementos de X têm a mesma idade.

Se $n = 1$ então a afirmação é evidentemente verdadeira. Suponha que a afirmação seja verdadeira para todos os conjuntos com n pessoas. Consideremos um conjunto com $n+1$ pessoas: $\{p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}\}$. Pela hipótese de indução, $p_1, p_2, ..., p_n$ têm a mesma idade e $p_2, ..., p_n, p_{n+1}$ também têm a mesma idade. Logo todos as pessoas $\{p_1, p_2, ..., p_n, p_{n+1}\}$ têm a mesma idade.

Conjuntos Finitos e Infinitos

1. Mostre que os conjuntos abaixo são enumeráveis, estabelecendo uma bijeção entre cada um deles e $\mathbb{N}$.

   (a) $\{2, 4, 6, \ldots\}$.

   (b) $\{1, 3, 5, \ldots\}$.

   (c) $\mathbb{Z}$.

2. O objetivo desse exercício é mostrar que o produto cartesiano de uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.

   (a) Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Mostre que f é uma bijeção (sugestão: para injetividade use unicidade da decomposição em fatores primos; para sobrejetividade, dado $k \in \mathbb{N}$ considere j como o maior natural tal que k é divisível por 2^j; então $k = 2^j \cdot l$ onde l é um número ímpar).

   (b) Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.

   (c) Mostre que $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \ldots \times \mathbb{N}}_{nvezes}$ é enumerável.

   (d) Mostre que se $X_1, X_2, \ldots X_n$ são enumeráveis então $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$ é enumerável.

3. Mostre que o produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis não é enumerável. Mais precisamente, mostre que se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são enumeráveis então não existe função $f : \mathbb{N} \to X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n \times \ldots$ que seja sobrejetora (sugestão: use o método da diagonal de Cantor).

4. O objetivo desse exercício é mostrar que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Mais precisamente, se $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ são enumeráveis então $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ é enumerável .

   (a) Para cada $j \in \mathbb{N}$ considere uma bijeção $f_j : \mathbb{N} \to X_j$. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X$ pondo $f(n, j) = f_j(n)$. Mostre que f é sobrejetora.

   (b) Conclua que X é enumerável.

5. Mostre que $\mathbb{Q}$ é enumerável.

6. Estabeleça uma bijeção entre $(0,1)$ e $\mathbb{R}$ e conclua que $\mathbb{R}$ é não-enumerável.

7. Mostre que todo intervalo não-degenarado da reta é não-enumerável.

Números Reais - Axiomas de Corpo Ordenado

1. Prove as seguintes unicidades:

   (a) **(unicidade do elemento neutro da adição)** Se $x+\theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$.

   (b) **(unicidade do elemento neutro da multiplicação)** Se $xu = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$.

   (c) **(unicidade do inverso aditivo)** Se $x + y = 0$ então $y = -x$.

   (d) **(unicidade do inverso multiplicativo)** Se $xy = 1$ então $y = x^{-1}$.

2. Prove as afirmações abaixo:

   (a) **(cancelamento na adição)** Se $x + y = x + z$ então $y = z$.

   (b) $0x = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$.

   (c) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então $xy \neq 0$.

3. Prove as seguintes regras de manipulação de frações para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:

   (a) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, se $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

   (b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

   (c) $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b}$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.

   (d) $\frac{a}{b}\frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.

   (e) $\frac{1}{1/a} = a$, se $a \neq 0$.

   (f) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$, se $b \neq 0$ e $c \neq 0$.

4. Demonstre as identidades abaixo para $x, y \in \mathbb{R}$:

   (a) $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.

   (b) $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$.

(c) $x^n - y^n = (x-y)\left(x^{n-1} + x^{n-2}y + ... + xy^{n-2} + y^{n-1}\right), n \geq 1.$

5. **(cancelamento na multiplicação)** Se $a, b, c \in \mathbb{R},\ ab = ac$ e $a \neq 0$ então $b = c$.

6. O que há de errado com a seguinte demonstração de que $2 = 1$.
   Tome $x, y \in \mathbb{R}$ com $x = y$, então:

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x-y)(x+y) &= y(x-y) \\ x+y &= y \\ 2y &= y. \end{aligned}$$

   Logo $2 = 1$.

7. **(regra de sinais)** Mostre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale:

   (a) $-(-x) = x$.

   (b) $x(-y) = -(xy)$.

   (c) $(-x)y = -(xy)$.

   (d) $(-x)(-y) = xy$

   (sugestão: use unicidade do inverso aditivo).

8. Mostre que as seguintes propriedades são válidas em qualquer corpo ordenado:

   (a) $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$.

   (b) $x > y$ e z qualquer $\Rightarrow x + z > y + z$.

   (c) $x > y$ e $z > t \Rightarrow x + z > y + t$.

   (d) $x > y$ e $z > 0 \Rightarrow xz > yz$.

   (e) Sejam $x, x', y, y' > 0$. Se $x < x'$ e $y < y'$ então $xy < x'y'$.

   (f) $x > y$ e $z < 0 \Rightarrow xz < yz$.

   (g) $1 > 0$.

   (h) $x \neq 0 \Rightarrow x^2 > 0$.

   (i) $0 < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{a}$.

(j) $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$.

(k) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

9. **(fórmula de Bháskara)** Mostre que dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ tem-se:

   (a) se $b^2 - 4ac \geq 0$ então

   $$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

   (b) Se $b^2 - 4ac < 0$ então $\nexists x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $ax^2 + bx + c = 0$ (sugestão: complete o quadrado).

10. Mostre que $2xy \leq x^2 + y^2, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$ (sugestão: $(x - y)^2 \geq 0$).

11. Mostre que $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^+$. O que significa tal desigualdade?

12. Mostre que $a^2 + ab + b^2 \geq 0, \ \forall a, b \in \mathbb{R}$.

13. Demonstre que $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}, \ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

14. Dados os números reais a, b, c, d entre 0 e 1 prove que

    $$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d.$$

15. Prove que, para x, y e z reais positivos vale

    $$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq 8xyz.$$

16. Mostre que um inteiro p é par se, e somente se, p^2 é par.

17. Mostre que um inteiro p é ímpar se, e somente se, p^2 é ímpar.

18. Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

19. Faça o que se pede.

    (a) Mostre que se $x, y \in \mathbb{Q}$ então $x + y \in \mathbb{Q}$.

    (b) Mostre que se $a \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$ então $1/a \in \mathbb{Q}$.

(c) Mostre que se $x, y \in \mathbb{Q}$ então $xy \in \mathbb{Q}$.

(d) Se x e y são irracionais, pode-se garantir que xy e $x + y$ são irracionais? Justifique.

(e) Mostre que se a é racional diferente de zero e x é irracional então ax e $a + x$ são irracionais.

20. Sejam a e b dois números racionais com $a < b$.

    (a) Mostre que $\frac{a+b}{2}$ também é racional.

    (b) Mostre que $a < \frac{a+b}{2} < b$.

    (c) Conclua que entre dois racionais quaisquer existem infinitos racionais.

21. Mostre que entre dois reais x e y sempre existe um outro real.

22. Sejam a, b, c e d números racionais. Prove que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

23. Demonstre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vale:

    (a) $|xy| = |x||y|$.

    (b) $\left|\frac{1}{y}\right| = \frac{1}{|y|}$, desde que $y \neq 0$.

    (c) $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$, desde que $y \neq 0$.

24. Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$ com $\delta > 0$. Mostre que $|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$.

25. Resolva as equações e inequações abaixo utilizando apenas a noção geométrica de módulo. Depois confira os resultados resolvendo analiticamente.

    (a) $|x - 3| = 8$.

    (b) $|x - 3| < 8$.

    (c) $|x + 4| > 1$

    (d) $|x - 1| < |x - 5|$.

    (e) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.

    (f) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.

26. Mostre que $|x-y| \geq ||x|-|y||\,,\ \forall x, y \in \mathbb{R}$.

27. Dados dois números $x, y \in \mathbb{R}$ definimos $\max\{x, y\}$ como o maior dentre os números x e y. Mais precisamente

$$\max\{x,y\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y, \\ y, & \text{se } x < y. \end{cases}$$

A definição de $\min\{x, y\}$ é análoga. Mostre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

   (a) $\max\{x,y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}$.

   (b) $\min\{x,y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}$.

Números Reais - Axioma do Supremo

1. Considere o subconjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; a < x < b\}$ de $\mathbb{R}$. Mostre que:

   (a) A não tem elemento máximo.

   (b) A não tem elemento mínimo.

   (c) $\inf A = a$ e $\sup A = b$.

2. Encontre o ínfimo e o supremo, em $\mathbb{Q}$, do conjunto $A = \left\{\frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N}\right\}$.

3. Mostre que se $A = (a, b)$ então A não tem elemento máximo nem elemento mínimo. Mostre também que $\inf A = a$ e $\sup A = b$.

4. Dê exemplos de:

   (a) um conjunto que não possui elemento máximo, mas possui supremo,

   (b) um conjunto não limitado que possui supremo,

   (c) um conjunto não limitado, que não tem elemento mínimo mas tem ínfimo.

5. Mostre que se um subconjunto de $\mathbb{R}$ tem elemento máximo (mínimo) então esse elemento é o supremo (ínfimo).

6. Mostre que o supremo (e o ínfimo) de um conjunto, quando existe, é único.

7. Dado um conjunto A de números reais defina

$$-A = \{-a; a \in A\}.$$

Mostre que se A é limitado inferiormente (superiormente) e não-vazio então $-A$ é limitado superiormente (inferiormente) e não-vazio. Conclua que todo subconjunto de números reais limitado inferiormente e não-vazio tem ínfimo.

8. Se A e um subconjunto limitado e não-vazio de números reais então

$$\sup(-A) = -\inf A \quad \text{e} \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

9. Sejam A e B subconjuntos de $\mathbb{R}$ com $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$.

   (a) Prove que se B é limitado inferiormente então A é limitado inferiormente e $\inf A \geq \inf B$.

   (b) Prove que se B é limitado superiormente então A é limitado superiormente e $\sup A \leq \sup B$.

   (c) Dê exemplo de dois conjuntos $A \subset B$ com $A \neq B$, satisfazendo $\inf A = \inf B$ e $\sup A = \sup B$.

10. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Mostre que $c = \sup A$ se, e somente se, valem ambas as condições: **(i)** c é cota superior de A e **(ii)** $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$ tal que $c - \epsilon < a \leq c$.

11. Dados dois conjuntos A e B de números reais defina

$$A + B = \{a + b;\ a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Prove que:

   (a) se A e B são limitados superiormente e não-vazios então $A + B$ é limitado superiormente e não-vazio. Além disso

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

   (b) Se A e B são limitados inferiormente e não-vazios então $A + B$ é limitado inferiormente e não-vazio. Além disso

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

12. Considere $X \subset \mathbb{R}$ com $X \neq \emptyset$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se **limitada superiormente** quando sua imagem $f(X)$ é um conjunto limitado superiormente. Neste caso, define-se o **supremo de** f, e escreve-se $\sup_{x \in X} f$ ou $\sup f$, como o supremo do conjunto $f(X)$. As definições de função limitada inferiormente, função limitada e $\inf f$ são análogas. Demonstre as seguintes afirmações a respeito das funções $f, g : X \to \mathbb{R}$:

   (a) $(f+g)(X) \subset f(X) + g(X)$. Dê um exemplo em que não ocorre a igualdade.

   (b) Se f e g são limitadas superiormente (inferiormente) então $f+g : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente (inferiormente).

   (c) Mostre que se f e g são limitadas superiormente então $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.

   (d) Mostre que se f e g são limitadas inferiormente então $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.

   (e) Dê exemplos mostrando que se pode ter $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$.

   (f) Mostre que a vale a igualdade nos ítens (c) e (d) quando uma das funções, f ou g, é constante.

13. Considere $f, g : X \to \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}$, com $X \neq \emptyset$.

   (a) Mostre que se f e g são não-negativas e limitadas superiormente então $fg : X \to \mathbb{R}$ é limitada superiormente e $\sup(fg) \leq \sup f \sup g$.

   (b) Dê exemplos mostrando que pode ocorrer $\sup(fg) < \sup f \sup g$.

   (c) Enuncie e demonstre resultado análogo ao ítem (a) para ínfimo.

14. Considere dois conjuntos não-vazios $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que para todo $a \in A$ e todo $b \in B$ tem-se $a \leq b$. Mostre que

   (a) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.

   (b) $\sup A \leq \inf B$.

   (c) $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \epsilon$.