Universidade Federal de Santa Maria
Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2011
Lista 3 - Séries numéricas

1. Suponha que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 - \frac{1}{n}$. Determine:

   a) a_k b) a_{100} c) $\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k$ d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. A série $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + ...$ é convergente ou divergente?

3. Use o critério de comparação para provar que $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente, a partir da convergência de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{n(n+1)}$.

4. Prove que a série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\log n}{n^2}$ converge.

5. Sendo $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$ para todo n, prove que, se as séries $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n^2$ são convergentes, então a série $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n b_n$ também é convergente. Conclua que se $a_n \geq 0$ e $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge, então $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.

6. Prove que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente.
   dica: use o fato que $a_n \to 0$ e, portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n < 1$ se $n > n_0$.

7. Se $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ é absolutamente convergente, então $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n^2$ converge?

8. Verifique se a série dada é convergente e, em caso afirmativo, se absoluta ou condicionalmente convergente.

   a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos 3n}{n^2+1}$ b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$ c) $\sum_{n=1}^{+\infty} n! e^{-n} \sin\frac{1}{n}$ d) $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\log n}$

9. Se uma série é condicionalmente convergente, prove que existem alterações da ordem dos seus termos de modo a tornar sua soma igual a $+\infty$ e a $-\infty$.

10. Efetue explicitamente uma reordenação dos termos da série $1 - 1/2 + 1/3 - 1/4 + 1/5 - ...$de modo que sua soma se torne igual a $1/2$.

11. A série $1 - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} + \frac{2}{4} - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{5} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} + ...$tem termos alternadamente positivos e negativos e seu termo geral tende para zero. Entretanto é divergente. Por que isto não contradiz o Teorema de Leibniz.

12. Obtenha a sequência das reduzidas da série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e mostre que seu limite é 1.

13. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a+1}$

14. Mostre que $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}$

    dica: Observe que $\frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = (-1)^n \left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$

15. Verifique que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = 1 - 3(\ln 2)$, sabendo-se que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

    dica: Observe que $\frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = (-1)^n \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

16. Calcule a soma das séries abaixo:

    a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ b) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

17. Se (a_n) é uma sequência de termos não-nulos com $a_n \to +\infty$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ diverge e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ converge. Mostre isso.

    O que se pode afirmar sobre o comportamento das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{\lambda}} - \frac{1}{(n+1)^{\lambda}}\right), \lambda > 0 \quad \text{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad ?$$

18. Verifique, entre as séries abaixo, quais as convergentes e quais as divergentes:

    a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n+1}$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2+1}$ c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

    e) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ g) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, com $x \leq 1$

    h) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$ j) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

19. Determine se a série $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{\log n}{n}\right)^n$ é convergente usando ambos os testes, de D'Alembert e Cauchy.

20. Sabendo-se que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$, mostre que $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$.

21. Prove que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \text{e} \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

    são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

22. Verifique para quais valores de $x \in \mathbb{R}$, as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{e} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

    são convergentes.

    Obs: As séries acima definem as funções $\sin x$ *e* $\cos x$*, respectivamente.*

23. Considere a série de termos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge (ou diverge) se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir (ou divergir).