Universidade Federal de Santa Maria
Departamento de Matemática
Curso de Verão 2011

Lista 6

Continuidade

1. Qual o valor de L que torna a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & \text{se } x \neq 2, \\ L, & \text{se } x = 2 \end{cases}$$

contínua? Justifique sua resposta.

2. Quais das funções apresentadas no exercício 13 da Lista 5 são contínuas em $x = 0$? Justifique sua resposta.

3. **(continuidade e desigualdades)** Suponha que as funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ sejam contínuas no ponto $a \in X$.

   (a) Mostre que se $f(a) > 0$ então existe $\delta > 0$ tal que

   $$x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > 0.$$

   (b) A conclusão do item anterior é válida mesmo que f não seja contínua em a?

   (c) No item (i), podemos substituir a hipótese $f(a) > 0$ por $f(a) \geq 0$ e concluir que $f(x) \geq 0$?

   (d) Mostre que se $f(a) > g(a)$ então existe $\delta > 0$ tal que

   $$x \in X,\ |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > g(x).$$

   (e) Mostre que se $f(x) \geq 0, \forall x \in X \setminus \{a\}$ então $f(a) \geq 0$.

   (f) A conclusão do item anterior é válida mesmo que f não seja contínua em a?

   (g) Mostre que se $f(x) \geq g(x), \forall x \in X \setminus \{a\}$ então $f(a) \geq g(a)$.

4. **(regras para contrução de funções contínuas)** Suponha que $a \in X$ e que as funções $f, g : X \to \mathbb{R}$ sejam contínuas no ponto a. Mostre que:

(a) $f+g$ é contínua em a.

(b) $f-g$ é contínua em a.

(c) $f \cdot g$ é contínua em a.

(d) $\frac{f}{g}$ é contínua em a, caso $g(a) \neq 0$.

(e) $|f|$ é contínua em a.

(f) $\sqrt{f}$ é contínua em a, caso $f(x) \geq 0, \forall x \in X$.

(g) $\max(f,g)$ é contínua em a (a função $\max(f,g)$ é definida por $\max(f,g)(x) = \max(f(x), g(x)),\ x \in X$.

(h) $\min(f,g)$ é contínua em a.

(i) Se $h : Y \to \mathbb{R}$ é tal que $f(X) \subset Y$ e h é contínua em $f(a)$ então $h \circ f$ é contínua em a.

5. Dê um exemplo de duas funções descontínuas cuja composição seja contínua.

6. Dê um exemplo de função que seja descontínua em todos os pontos de seu domínio, mas que $|f|$ seja contínua em todos os pontos.

7. Mostre que todo polinômio é uma função contínua. Conclua que toda função racional é contínua.

8. Prove que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ se } x \in \mathbb{Q}, \\ 1-x, \text{ se } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

é contínua em $x = \frac{1}{2}$ e somente nesse ponto.

9. Para cada número $a \in \mathbb{R}$ encontre uma função que seja contínua apenas em a.

10. Encontre uma função que seja descontínua apenas nos pontos $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ e em 0.

11. Faça o que se pede.

(a) Mostre que toda função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pode ser escrita da forma $f = g + h$, sendo g uma função par e h uma função ímpar.

(b) Mostre que se f é contínua então g e h também são funções contínuas.

12. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função **contínua** e que satisfaz

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Prove que f é linear, ou seja, existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$

(sugestão: mostre que $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$, ou seja, $f(r) = rf(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$;
finalize a demonstração utilizando a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e a continuidade da f).

14. Mostre que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para cada aberto $A \subset \mathbb{R}$ tem-se que $f^{-1}(A)$ é aberto. Dê exemplo de uma função contínua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e de um conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}$ tal que $f(A)$ não seja aberto.

15. Se $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas prove que

$$A = \{x \in \mathbb{R}; f(x) \neq g(x)\}$$

é um conjunto aberto e que

$$F = \{x \in \mathbb{R}; f(x) = g(x)\}$$

é um conjunto fechado.

16. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$. Prove isso.

17. Mostre que se duas funções contínuas $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são iguais em todos os pontos de $\mathbb{Q}$ então f e g são iguais em todos os pontos de $\mathbb{R}$.