Universidade Federal de Santa Maria
Departamento de Matemática
Curso de Verão 2011

Lista 8

Derivadas

1. Dê exemplo de função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $x = 2$ que não é derivável em $x = 2$.

2. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^3, & x < 0 \\ x^2, & x \geq 0 \end{cases}$$

   é derivável. A função f' é derivável?

3. Considere as funções definidas em $\mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0, \\ 0, & se \quad x = 0. \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0, \\ 0, & se \quad x = 0. \end{cases}$$

$$h(x) = \begin{cases} x^3 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0, \\ 0, & se \quad x = 0. \end{cases}$$

   (a) Faça um esboço do gráfico de cada uma delas.
   (b) Quais dessas funções são contínuas em $x = 0$?
   (c) Quais dessas funções são deriváveis em $x = 0$?
   (d) Quais dessas funções são de classe C^1?
   (e) Quais dessas funções são de classe C^2?

4. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e derivável então f' é ímpar.

5. Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar e derivável então f' é par.

6. **(Teorema do Valor Médio)** Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Mostre isso e interprete geometricamente o resultado.

7. Mostre que se $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função contínua no intervalo I e $f'(x) = 0$, $\forall x \in \mathrm{int}(I)$, então f é constante.

8. A conclusão do Exercício 7 é válida mesmo caso I não seja um intervalo?

9. Se $f, g : I \to \mathbb{R}$ são contínuas no intervalo I, deriváveis em $\mathrm{int}(I)$ e $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in \mathrm{int}(I)$ então existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f = g + c$.

10. Mostre que $\mathrm{sen}^2\, x + \cos^2 x = 1$, $\forall x \in \mathbb{R}$, usando derivadas.

11. Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função satisfazendo

$$|f(x)| \leq x^2(1 - x^2), \quad \forall x \in [-1, 1].$$

   (a) Mostre que f é derivável em $x = 0$ e calcule $f'(0)$.

   (b) Suponha, adicionalmente, que f seja contínua e três vezes derivável em $(-1, 1)$. Mostre que existe $c \in (-1, 1)$ tal que $f'''(c) = 0$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 satisfazendo $f(x) \geq x^2$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que para todo $d \in \mathbb{R}$ existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $f'(c) = d$ (faça um desenho para verificar que o resultado é plausível).

13. Seja $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Mostre que:

   (a) $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ não-decrescente em (a, b);

   (b) $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ não-crescente em (a, b);

   (c) $f'(x) > 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ crescente em (a, b);

   (d) $f'(x) < 0$, $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ decrescente em (a, b).

14. Suponha que $f'(x) > g'(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$ e $f(a) = g(a)$ para algum $a \in \mathbb{R}$. Mostre que $f(x) > g(x)$ para $x > a$ e $f(x) < g(x)$ para $x < a$. Mostre que a conclusão não é verdadeira sem a hipótese $f(a) = g(a)$.

15. Mostre que a equação $\operatorname{sen} x = x$ tem uma única solução.

16. Mostre que a equação $x^2 = \cos x$ tem exatamente duas soluções.

17. O objetivo desse exercício é usar o Teorema de Rolle para dar uma demonstração interessante do Teorema Fundamental da Álgebra, a saber: todo polinômio de grau n tem no máximo n raízes reais.

    (a) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável então entre duas raízes de f existe pelo menos uma raiz de f'.

    (b) Mostre que se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável e tem n raízes distintas então f' tem pelo menos $n-1$ raízes distintas.

    (c) Demonstre o Teorema Fundamental da Álgebra por indução sobre n.

18. Prove que dois polinômios de grau m e n, respectivamente, interceptam-se em, no máximo, $\max(m, n)$ pontos.

19. Dê um exemplo de um polinômio p :

    (a) que tenha um ponto crítico que não seja ponto de máximo local nem de mínimo local;

    (b) para o qual existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p'(c) = p''(c) = 0$ e c é ponto de máximo local;

    (c) para o qual existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p'(c) = p''(c) = 0$ e c é ponto de mínimo local;

    (d) para o qual existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $p'(c) = p''(c) = 0$ e c não é ponto de máximo local nem ponto de mínimo local.

20. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

    (a) Faça um esboço do gráfico de f.

    (b) Prove que 0 é um ponto de mínimo local de f.

    (c) Prove que $f'(0) = f''(0) = 0$.

21. **(uma função que não é crescente mas que tem derivada positiva)** Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

   (a) Esboce o gráfico das funções $\frac{x}{2} + x^2$ e $\frac{x}{2} - x^2$ no mesmo sistema de coordenadas.

   (b) Use o item anterior para esboçar o gráfico de f.

   (c) Mostre que f não é crescente em toda vizinhança da origem.

   (d) Mostre que f é derivável em 0 e que $f'(0) = \frac{1}{2}$.

   (e) Dos itens anteriores segue que $f'(0) > 0$ mas f não é crescente em toda vizinhança da origem. Isso contradiz o Exercício 13 ?

22. Suponha que f é uma função com derivada crescente (ou decrescente) em todo um intervalo I. Prove que qualquer tangente ao gráfico de f só toca esse gráfico no ponto de tangência.

23. **(Teorema do Valor Médio Generalizado - Teorema do Valor Médio de Cauchy)** Se f, g são funções contínuas em $[a, b]$ e deriváveis em (a, b) então existe $c \in (a, b)$ tal que

$$(f(b) - f(a))g'(c) = f'(c)(g(b) - g(a)).$$

   Mostre isso. Observe que se g é a função identidade então temos o Teorema do Valor Médio (sugestão: aplique o Teorema de Rolle à função $h(x) = (f(b) - f(a))g(x) - (g(b) - g(a))f(x))$.

24. Construa uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável, que seja crescente em $(-\infty, -1) \cup (2, +\infty)$, decrescente em $(-1, 2)$ e que seu gráfico corte o eixo y no ponto 3.

25. Suponha que $f : I \to \mathbb{R}$ é uma função de Hölder no intervalo I, isto é, existem $\alpha, c > 0$ tais que $|f(y) - f(x)| \leq c|y - x|^{\alpha}, \forall x, y \in I$. Mostre que se $\alpha > 1$ então f é constante.

26. Prove que se f é contínua no intervalo $[a, b]$, com derivada limitada em (a, b) então f é Lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua.

27. Calcule

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x}{\tan x}$.

(b) $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x}$.

(c) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x - 1}{x^2}$.

28. O que há de errado na seguinte aplicação da Regra de L'Hospital:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{3x^2 + 1}{2x - 3} = \lim_{x\to 1} \frac{6x}{2} = \frac{6}{2} = 3?$$

Fatorando os polinômios verifica-se facilmente que o limite é, na realidade, igual a -4.