

Lista 1

Números Naturais

1. Demonstre por indução as seguintes fórmulas:

(a) $\sum_{j=1}^n (2j - 1) = n^2$ (soma dos n primeiros ímpares).

(b) $\sum_{j=1}^n j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ (soma dos n primeiros quadrados).

(c) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2$ (soma dos n primeiros cubos).

(d) $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$

2. **(Desigualdade de Bernoulli)** Mostre que se $r \in \mathbb{R}$ e $r \geq -1$ então

$$1 + nr \leq (1 + r)^n, \forall n \in \mathbb{N}$$

(sugestão: use indução).

3. Supondo $q \neq 1$, deduza a fórmula para a soma (dos $n + 1$ primeiros termos da P. G. de razão q)

$$1 + q + q^2 + \dots + q^n$$

escrevendo $S = 1 + q + q^2 + \dots + q^n$, multiplicando essa igualdade por q e resolvendo as duas equações para S . Depois demonstre a fórmula por indução.

4. Deduza uma fórmula para cada uma das expressões abaixo e depois demonstre-as por indução:

(a) $1^3 + 2^3 + \dots + n^3$.

(b) $1^4 + 2^4 + \dots + n^4$.

(c) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n + 1)$.

(d) $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n \cdot (n+1)}$.

$$(e) \frac{3}{1^2 \cdot 2^2} + \frac{5}{2^2 \cdot 3^2} + \dots + \frac{2n+1}{n^2 \cdot (n+1)^2}.$$

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ e $0 \leq j \leq n$ defina

$$\binom{n}{j} = \frac{n!}{j!(n-j)!}.$$

Use indução para mostrar que:

(a) $\binom{n}{0} = 1$.

(b) $\binom{n}{n} = 1$.

(c) $\binom{n}{j} \in \mathbb{N}$, $\forall n, j \in \mathbb{N}$ com $0 \leq j \leq n$.

(d) $\binom{n}{j-1} + \binom{n}{j} = \binom{n+1}{j}$, $1 \leq j \leq n$ (relação de Stiffel).

6. (**Binômio de Newton**) Use indução para mostrar que

$$(a+b)^n = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a^j b^{n-j},$$

sendo a e b números reais quaisquer (sugestão: faça inicialmente os casos $n = 2, n = 3$ e depois o caso geral usando a relação de Stiffel). Como fica a expressão acima quando $a = b = 1$?

7. Mostre que se $r \in \mathbb{R}$ e $r \geq 0$ então

$$(1+r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)\frac{r^2}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

(sugestão: use indução ou Binômio de Newton).

8. Qual o erro na seguinte demonstração por indução:

Teorema Todas as pessoas têm a mesma idade.

Demonstração: Provaremos por indução que se X é um conjunto com n pessoas então todos os elementos de X têm a mesma idade.

Se $n = 1$ então a afirmação é evidentemente verdadeira. Suponha que a afirmação seja verdadeira para todos os conjuntos com n pessoas. Consideremos um conjunto com $n + 1$ pessoas: $\{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}\}$. Pela hipótese de indução, p_1, p_2, \dots, p_n têm a mesma idade e p_2, \dots, p_n, p_{n+1} também têm a mesma idade. Logo todas as pessoas $\{p_1, p_2, \dots, p_n, p_{n+1}\}$ têm a mesma idade.

Conjuntos Finitos e Infinitos

- Mostre que os conjuntos abaixo são enumeráveis, estabelecendo uma bijeção entre cada um deles e \mathbb{N} .
 - $\{2, 4, 6, \dots\}$.
 - $\{1, 3, 5, \dots\}$.
 - \mathbb{Z} .
- O objetivo desse exercício é mostrar que o produto cartesiano de uma quantidade finita de conjuntos enumeráveis é enumerável.
 - Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ pondo $f(1, n) = 2n - 1$ e $f(m + 1, n) = 2^m(2n - 1)$. Mostre que f é uma bijeção (sugestão: para injetividade use unicidade da decomposição em fatores primos; para sobrejetividade, dado $k \in \mathbb{N}$ considere j como o maior natural tal que k é divisível por 2^j ; então $k = 2^j \cdot l$ onde l é um número ímpar).
 - Mostre que $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ é enumerável.
 - Mostre que $\underbrace{\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \dots \times \mathbb{N}}_{n\text{vezes}}$ é enumerável.
 - Mostre que se X_1, X_2, \dots, X_n são enumeráveis então $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ é enumerável.
- Mostre que o produto cartesiano enumerável de conjuntos enumeráveis não é enumerável. Mais precisamente, mostre que se $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ são enumeráveis então não existe função $f : \mathbb{N} \rightarrow X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n \times \dots$ que seja sobrejetora (sugestão: use o método da diagonal de Cantor).
- O objetivo desse exercício é mostrar que a união enumerável de conjuntos enumeráveis é enumerável. Mais precisamente, se $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ são enumeráveis então $X = \bigcup_{j=1}^{\infty} X_j$ é enumerável.
 - Para cada $j \in \mathbb{N}$ considere uma bijeção $f_j : \mathbb{N} \rightarrow X_j$. Defina $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow X$ pondo $f(n, j) = f_j(n)$. Mostre que f é sobrejetora.
 - Conclua que X é enumerável.
- Mostre que \mathbb{Q} é enumerável.

6. Estabeleça uma bijeção entre $(0, 1)$ e \mathbb{R} e conclua que \mathbb{R} é não-enumerável.
7. Mostre que todo intervalo não-degenerado da reta é não-enumerável.

Números Reais - Axiomas de Corpo Ordenado

1. Prove as seguintes unicidades:
 - (a) **(unicidade do elemento neutro da adição)** Se $x + \theta = x$ para algum $x \in \mathbb{R}$ então $\theta = 0$.
 - (b) **(unicidade do elemento neutro da multiplicação)** Se $xu = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$ então $u = 1$.
 - (c) **(unicidade do inverso aditivo)** Se $x + y = 0$ então $y = -x$.
 - (d) **(unicidade do inverso multiplicativo)** Se $xy = 1$ então $y = x^{-1}$.
2. Prove as afirmações abaixo:
 - (a) **(cancelamento na adição)** Se $x + y = x + z$ então $y = z$.
 - (b) $0x = 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - (c) Se $x \neq 0$ e $y \neq 0$ então $xy \neq 0$.
3. Prove as seguintes regras de manipulação de frações para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$:
 - (a) $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$, se $b \neq 0$ e $c \neq 0$.
 - (b) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
 - (c) $\frac{1}{ab} = \frac{1}{a} \frac{1}{b}$, se $a \neq 0$ e $b \neq 0$.
 - (d) $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ac}{bd}$, se $b \neq 0$ e $d \neq 0$.
 - (e) $\frac{1}{1/a} = a$, se $a \neq 0$.
 - (f) $\frac{a/b}{c/d} = \frac{ad}{bc}$, se $b \neq 0$ e $c \neq 0$.
4. Demonstre as identidades abaixo para $x, y \in \mathbb{R}$:
 - (a) $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.
 - (b) $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.

$$(c) \quad x^n - y^n = (x - y)(x^{n-1} + x^{n-2}y + \dots + xy^{n-2} + y^{n-1}), n \geq 1.$$

5. **(cancelamento na multiplicação)** Se $a, b, c \in \mathbb{R}$, $ab = ac$ e $a \neq 0$ então $b = c$.
6. O que há de errado com a seguinte demonstração de que $2 = 1$.
Tome $x, y \in \mathbb{R}$ com $x = y$, então:

$$\begin{aligned} x^2 &= xy \\ x^2 - y^2 &= xy - y^2 \\ (x - y)(x + y) &= y(x - y) \\ x + y &= y \\ 2y &= y. \end{aligned}$$

Logo $2 = 1$.

7. **(Regra de sinais)** Mostre que $\forall x, y \in \mathbb{R}$ vale:

- (a) $-(-x) = x$.
- (b) $x(-y) = -(xy)$.
- (c) $(-x)y = -(xy)$.
- (d) $(-x)(-y) = xy$

(sugestão: use unicidade do inverso aditivo).

8. Mostre que as seguintes propriedades são válidas em qualquer corpo ordenado:

- (a) $x > y$ e $z > t \Rightarrow x + z > y + t$.
- (b) Sejam $x, x', y, y' > 0$. Se $x < x'$ e $y < y'$ então $xy < x'y'$.
- (c) $1 > 0$.
- (d) $0 < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{a}$.
- (e) $a < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < 0$.
- (f) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

9. **(fórmula de Bháskara)** Mostre que dados $a, b, c \in \mathbb{R}$ com $a \neq 0$ tem-se:

(a) se $b^2 - 4ac \geq 0$ então

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou } x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

(b) Se $b^2 - 4ac < 0$ então $\nexists x \in \mathbb{R}$ satisfazendo $ax^2 + bx + c = 0$ (sugestão: complete o quadrado).

10. Mostre que $2xy \leq x^2 + y^2$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ (sugestão: $(x - y)^2 \geq 0$).

11. Mostre que $\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y)$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^+$. O que significa tal desigualdade?

12. Mostre que $a^2 + ab + b^2 \geq 0$, $\forall a, b \in \mathbb{R}$.

13. Demonstre que $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \leq \frac{x^2+y^2}{2}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

14. Dados os números reais a, b, c, d entre 0 e 1 prove que

$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d.$$

15. Prove que, para x, y e z reais positivos vale

$$(x^2 + 1)(y^2 + 1)(z^2 + 1) \geq 8xyz.$$

16. Mostre que um inteiro p é par se, e somente se, p^2 é par.

17. Mostre que um inteiro p é ímpar se, e somente se, p^2 é ímpar.

18. Mostre que $\sqrt{2}$ é irracional.

19. Faça o que se pede.

(a) Mostre que se $x, y \in \mathbb{Q}$ então $x + y \in \mathbb{Q}$.

(b) Mostre que se $a \in \mathbb{Q}$ e $a \neq 0$ então $1/a \in \mathbb{Q}$.

(c) Mostre que se $x, y \in \mathbb{Q}$ então $xy \in \mathbb{Q}$.

(d) Se x e y são irracionais, pode-se garantir que xy e $x + y$ são irracionais? Justifique.

(e) Mostre que se a é racional diferente de zero e x é irracional então ax e $a + x$ são irracionais.

20. Sejam a e b dois números racionais com $a < b$.
- (a) Mostre que $\frac{a+b}{2}$ também é racional.
 - (b) Mostre que $a < \frac{a+b}{2} < b$.
 - (c) Conclua que entre dois racionais quaisquer existem infinitos racionais.

21. Mostre que entre dois reais x e y sempre existe um outro real.

22. Sejam a, b, c e d números racionais. Prove que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d.$$

23. Demonstre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ vale:

- (a) $\left| \frac{1}{y} \right| = \frac{1}{|y|}$, desde que $y \neq 0$.
- (b) $\frac{|x|}{|y|} = \frac{|x|}{|y|}$, desde que $y \neq 0$.

24. Sejam $a, x, \delta \in \mathbb{R}$ com $\delta > 0$. Mostre que $|x-a| < \delta \Leftrightarrow a-\delta < x < a+\delta$.

25. Resolva as equações e inequações abaixo utilizando apenas a noção geométrica de módulo. Depois confira os resultados resolvendo analiticamente.

- (a) $|x - 3| = 8$.
- (b) $|x - 3| < 8$.
- (c) $|x + 4| > 1$
- (d) $|x - 1| < |x - 5|$.
- (e) $|x - 1| + |x - 2| > 1$.
- (f) $|x - 1| + |x + 1| < 1$.

26. Dados dois números $x, y \in \mathbb{R}$ definimos $\max\{x, y\}$ como o maior dentre os números x e y . Mais precisamente

$$\max\{x, y\} = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq y, \\ y, & \text{se } x < y. \end{cases}$$

A definição de $\min\{x, y\}$ é análoga. Mostre que para todo $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$(a) \max\{x, y\} = \frac{x+y+|x-y|}{2}.$$

$$(b) \min\{x, y\} = \frac{x+y-|x-y|}{2}.$$

Números Reais - Axioma do Supremo

1. Considere o subconjunto $A = \{x \in \mathbb{Q}; a < x < b\}$ de \mathbb{R} . Mostre que:
 - (a) A não tem elemento máximo.
 - (b) A não tem elemento mínimo.
 - (c) $\inf A = a$ e $\sup A = b$.
2. Encontre o ínfimo e o supremo, em \mathbb{Q} , do conjunto $A = \{\frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N}\}$.
3. Mostre que se $A = (a, b)$ então A não tem elemento máximo nem elemento mínimo. Mostre também que $\inf A = a$ e $\sup A = b$.
4. Dê exemplos de:
 - (a) um conjunto que não possui elemento máximo, mas possui supremo,
 - (b) um conjunto não limitado que possui supremo,
 - (c) um conjunto não limitado, que não tem elemento mínimo mas tem ínfimo.
5. Mostre que se um subconjunto de \mathbb{R} tem elemento máximo (mínimo) então esse elemento é o supremo (ínfimo).
6. Mostre que o supremo (e o ínfimo) de um conjunto, quando existe, é único.
7. Dado um conjunto A de números reais defina

$$-A = \{-a; a \in A\}.$$

Mostre que se A é limitado inferiormente (superiormente) e não-vazio então $-A$ é limitado superiormente (inferiormente) e não-vazio. Conclua que todo subconjunto de números reais limitado inferiormente e não-vazio tem ínfimo.

8. Se A é um subconjunto limitado e não-vazio de números reais então

$$\sup(-A) = -\inf A \quad \text{e} \quad \inf(-A) = -\sup A.$$

9. Sejam A e B subconjuntos de \mathbb{R} com $A \subset B$ e $A \neq \emptyset$.
- Prove que se B é limitado inferiormente então A é limitado inferiormente e $\inf A \geq \inf B$.
 - Prove que se B é limitado superiormente então A é limitado superiormente e $\sup A \leq \sup B$.
 - Dê exemplo de dois conjuntos $A \subset B$ com $A \neq B$, satisfazendo $\inf A = \inf B$ e $\sup A = \sup B$.
10. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado superiormente e não-vazio. Mostre que $c = \sup A$ se, e somente se, valem ambas as condições: **(i)** c é cota superior de A e **(ii)** $\forall \epsilon > 0, \exists a \in A$ tal que $c - \epsilon < a \leq c$.

11. Dados dois conjuntos A e B de números reais defina

$$A + B = \{a + b; a \in A \text{ e } b \in B\}.$$

Prove que:

- se A e B são limitados superiormente e não-vazios então $A + B$ é limitado superiormente e não-vazio. Além disso

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B.$$

- Se A e B são limitados inferiormente e não-vazios então $A + B$ é limitado inferiormente e não-vazio. Além disso

$$\inf(A + B) = \inf A + \inf B.$$

12. Considere $X \subset \mathbb{R}$ com $X \neq \emptyset$. Uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ chama-se **limitada superiormente** quando sua imagem $f(X)$ é um conjunto limitado superiormente. Neste caso, define-se o **supremo de f** , e escreve-se $\sup_{x \in X} f$ ou $\sup f$, como o supremo do conjunto $f(X)$. As definições de função limitada inferiormente, função limitada e $\inf f$ são análogas. Demonstre as seguintes afirmações a respeito das funções $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$:

- $(f + g)(X) \subset f(X) + g(X)$. Dê um exemplo em que não ocorre a igualdade.

- (b) Se f e g são limitadas superiormente (inferiormente) então $f + g : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada superiormente (inferiormente).
 - (c) Mostre que se f e g são limitadas superiormente então $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$.
 - (d) Mostre que se f e g são limitadas inferiormente então $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$.
 - (e) Dê exemplos mostrando que se pode ter $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$.
 - (f) Mostre que vale a igualdade nos itens (c) e (d) quando uma das funções, f ou g , é constante.
13. Considere $f, g : X \rightarrow \mathbb{R}$ definidas em $X \subset \mathbb{R}$, com $X \neq \emptyset$.
- (a) Mostre que se f e g são não-negativas e limitadas superiormente então $fg : X \rightarrow \mathbb{R}$ é limitada superiormente e $\sup(fg) \leq \sup f \sup g$.
 - (b) Dê exemplos mostrando que pode ocorrer $\sup(fg) < \sup f \sup g$.
 - (c) Enuncie e demonstre resultado análogo ao item (a) para ínfimo.
14. Considere dois conjuntos não-vazios $A, B \subset \mathbb{R}$ tais que para todo $a \in A$ e todo $b \in B$ tem-se $a \leq b$. Mostre que
- (a) A é limitado superiormente e B é limitado inferiormente.
 - (b) $\sup A \leq \inf B$.
 - (c) $\sup A = \inf B$ se, e somente se, para cada $\epsilon > 0$ existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $b - a < \epsilon$.