Universidade Federal de Santa Maria
Departamento de Matemática
Curso de Verão 2012

Lista 2

Sequências de Números Reais

1. Dê o termo geral de cada uma das seguintes sequências:

   (a) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...)$

   (b) $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...)$

   (c) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, ...)$

   (d) $(1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, ...)$

2. Dê exemplos de:

   (a) Sequência (a_n) tal que $a_n \in (0, \frac{1}{10}), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0$.

   (b) Sequência (a_n) tal que $a_n \in (\frac{7}{10}, 1), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 1$.

   (c) Sequência que não seja monótona, e que seja convergente para 0.

   (d) Sequência (a_n) tal que $a_n \in (-10, -9), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to -9$.

   (e) Sequência (a_n) tal que $a_n \in (-1, -\frac{3}{5}), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to -1$.

3. Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, prove, se falsa, dê um contra-exemplo.

   (a) Toda sequência convergente é limitada.

   (b) Toda sequência limitada é convergente.

   (c) Toda sequência crescente não é convergente.

   (d) Se (b_n) e (c_n) são subsequências da sequência (a_n), com $b_n \to L$ e $c_n \to L$, então $a_n \to L$.

   (e) Se (a_n) possui uma subsequência convergente, então (a_n) é convergente.

   (f) Se (a_n) possui subsequência convergente, então (a_n) é limitada.

   (g) Se (a_n) é uma sequência monótona que possui uma subsequência convergindo para L, então (a_n) também converge para L.

(h) Se (a_n) é monótona e possui subsequência limitada então (a_n) é limitada.

(i) Se (a_n) é uma sequência crescente, então ela não é limitada superiormente.

(j) Se $a_n \to L$ e $L > 0$, então $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.

(k) Se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e $a_n \to L$, então $L > 0$.

(l) Se $a_n \to L$ e $k \in \mathbb{R}$, então a sequência $(b_n) = (ka_n)$ converge para kL.

(m) Se $a_n < b_n$, para todo natural n, e $a_n \to a$ e $b_n \to b$ então $a < b$.

4. Mostre que o limite de uma sequência, quando existe, é único.

5. Conjecture sobre o limite de cada uma das sequências. Depois, mostre cada um deles pela definição.

   (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+5}$

   (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5}$

   (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$

   (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sen(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ qualquer.

6. Mostre que se $a_n \to L$ e $L > M$ (*respect.* $L < M$), então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow a_n > M \quad (\textit{respect. } n > n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

7. Sejam (a_n), (b_n) e (c_n) três sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, com $a_n \to L$ e $c_n \to L$. Mostre que $b_n \to L$.

8. Mostre que a sequência $a_n = (-1)^n$ não é convergente.

9. Mostre que se $a_n \to L$ então $|a_n| \to |L|$. A recíproca é verdadeira?

10. Mostre que se (a_n) é limitada e $b_n \to 0$ então $a_n b_n \to 0$. Se (a_n) for uma sequência qualquer o resultado continua válido?

11. Mostre que se $a_n \to a$ e $a_n \geq 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$, então $\sqrt{a_n} \to \sqrt{a}$.

12. Em cada um dos ítens abaixo, construa uma sequência que tenha a propriedade indicada.
    (a) duas subsequências convergentes, cada uma delas para cada um dos números 0 e 1.
    (b) três subsequências convergentes, cada uma, para cada um dos números 0, 1 e 2.
    (c) para cada $j \in \mathbb{N}$, uma sequência que tenha exatamente j valores de aderência.
    (d) uma sequência que tenha um conjunto infinito enumerável de valores de aderência.
    (e) uma sequência cujo conjunto dos valores de aderência seja igual a $\mathbb{R}$.

13. Prove que:
    (a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.
    (b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = +\infty$.
    (c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$.
    (d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+h} - \sqrt{n}\right) = 0$.

14. Mostre que a sequência $a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right)$ converge e que seu limite está entre $\frac{1}{2}$ e 1.

15. **(soma da PG infinita)** Mostre que se $|q| < 1$ então a sequência $a_n = 1 + q + q^2 + \ldots + q^n$ converge para $\frac{1}{1-q}$.

16. Se $p > 0$ mostre que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$.

17. Estude a convergência da sequência (a^n) para diferentes valores de a: $a > 1, a = 1, 0 \leq a < 1, -1 < a < 0, a = -1$ e $a < -1$ (sugestão: caso $a > 1$ escreva $a = 1 + h$ e use a Desigualdade de Bernoulli; caso $0 < a < 1$ faça o mesmo com o número $1/a$).

18. O objetivo desse exercício é mostrar que se $p > 0$ então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{p} = 1$.

    (a) Suponha $p > 1$ e considere $x_n = \sqrt[n]{p} - 1$. Aplique a Desigualdade de Bernoulli aos números $1 + x_n$ para mostrar que $x_n \to 0$.

    (b) Se $0 < p < 1$ aplique a conclusão do item anterior a $1/p$.

19. O objetivo desse exercício é mostrar que $\sqrt[n]{n} \to 0$.

    (a) Defina $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Como $x_n \geq 0$ use o Binômio de Newton para mostrar que $n = (1 + x_n)^n \geq \frac{n(n-1)}{2} x_n^2$.

    (b) Conclua que $x_n \to 0$.

20. Mostre que $\sqrt[n]{n^2 + n} \to 1$.

21. Mostre que se $a, b \geq 0$ então $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$.

22. Escolha $0 < a_1 < b_1$ e defina

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}, \quad b_n = \frac{a_n + b_n}{2}.$$

    (a) Mostre que cada uma das sequências (a_n) e (b_n) é convergente.

    (b) Mostre que ambas têm o mesmo limite.

23. **(número e)** Faça o que se pede.

    (a) Mostre que $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ é convergente e denote seu limite pela letra e.

    (b) Mostre que $2 \leq e < 3$.

    (c) Mostre que e é irracional (curiosidade: $e = 2,7\ 1828\ 1828\ 45\ 90\ 45\ldots$).

    (d) Considere a sequência (b_n) dada por $b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Faça o que se pede.

    (e) Usando o Binômio de Newton mostre que (b_n) é crescente e que $b_n < a_n, \forall n \geq 2$. Conclua que (b_n) é convergente e que $\lim b_n \leq e$.

    (f) Mostre que para $n > p$ vale

$$b_n \geq 1+1+\frac{1}{2!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)+\ldots+\frac{1}{p!}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\ldots\left(1 - \frac{p-1}{n}\right).$$

(g) Fixando p e fazendo $n \to \infty$ demonstre que $\lim b_n \geq a_p, \forall p \in \mathbb{N}$.

(h) Conclua que $\lim b_n = e$.

24. Seja (a_n) a sequência definida indutivamente por: $a_1 = \sqrt{2}$ e $a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}$, para $n > 1$.

    (a) Escreva os 5 primeiros termos dessa sequência.

    (b) Mostre, por indução, que $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

    (c) Mostre que (a_n) é crescente (sugestão: verifique que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$, para $n \geq 1$, então $a_{n+1} > a_n$).

    (d) Conclua, pelos itens anteriores, que (a_n) é convergente e calcule seu limite.

25. Generalize o exercício anterior considerando a sequência $a_1 = \sqrt{a}$ e $a_{n+1} = \sqrt{a + a_n}$, onde $a > 0$.

    (a) Sejam $p = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ e $q = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Verifique que p e q são raízes da equação $r^2 - r - a = 0$. Conclua que $pq = -a$ e $p + q = 1$. Verifique também que $a + p = p^2$, $a + q = q^2$ e $q < 0$.

    (b) Mostre, por indução, que $a_n < p$, $\forall n \geq 1$. Depois, mostre que (a_n) é crescente (sugestão: $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (p - a_n)(-q + a_n) > 0$).

    (c) Finalmente, conclua que (a_n) é convergente e calcule seu limite.

26. Qual o valor de $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + ...}}}}$?

27. **(Aproximações sucessivas da raiz quadrada)** Seja $a > 0$ e (a_n) definida indutivamente por $a_1 = a$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, para $n > 1$.

    (a) Usando o fato de que $\left(x - \frac{a}{x}\right)^2 \geq 0$ obtenha $\left(x + \frac{a}{x}\right)^2 \geq 4a$. Use isso para mostra que $x_{n+1} \geq a, \forall n \in \mathbb{N}$.

    (b) Mostre que $a_{n+2} \leq a_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

    (c) Mostre que (a_n) é convergente e calcule seu limite.

28. Dizemos que (a_n) é uma **sequência de Cauchy** quando para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$m, n > n_0 \Rightarrow |a_m - a_n| < \epsilon.$$

(a) Mostre que toda sequência convergente é de Cauchy.

(b) Mostre que se uma sequência de Cauchy tem uma subsequência convergente então a sequência é convergente.

(c) Mostre que toda sequência de Cauchy é limitada.

(d) Conclua que uma sequência é convergente se, e somente se, a sequência é de Cauchy.

29. **(Sequência de Fibonacci e número áureo)**
A sequência (a_n) definida por

$$a_1 = a_2 = 1 \quad e \quad a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$$

é chamada **Sequência de Fibonacci**.

O **número áureo** ϕ é definido como a raiz positiva da equação $x = \frac{1}{x-1}$, ou seja,

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

O objetivo desse exercício é verificar que a sequência de Fibonacci 'tende' a ser uma P.G. cuja razão é o número áureo, mais precisamente, definindo (x_n) por $x_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}$ tem-se que $x_n \to \phi$. Mostre que:

(a) $\phi = 1 + \frac{1}{\phi}$.

(b) $x_{n+1} = 1 + \frac{1}{x_n}, \ \forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n \geq 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

(c) $|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|x_{n+1} - x_n|, \ \forall n \in \mathbb{N}$ e conclua que

$$|x_{n+2} - x_{n+1}| \leq \frac{1}{2^{n-2}}|x_2 - x_1|, \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

(d) (x_n) é uma sequência de Cauchy.

(e) $x_n \to \phi$.