Universidade Federal de Santa Maria

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2010

$1^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Análise na Reta

1. Mostre que um inteiro p é par se, e somente se, p^2 é par.

2. Mostre que se um inteiro p é ímpar, então p^2 é ímpar.

3. Mostre que a equação $x^2 = 2$ não possui solução em $\mathbb{Q}$.

4. Usando indução, prove que:
   (i) $1 + 2 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$;
   (ii) $1 + 3 + 5 + ... + (2n-1) = n^2$.

5. Prove, por indução, que
$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^n dx = n!$$

6. Mostre que as seguintes propriedades são válidas em qualquer corpo ordenado:
   a) $x \in P$ se, e só se, $x > 0$
   b) $x > y$ e $y > z \Rightarrow x > z$
   c) $x > y$ e $z > t \Rightarrow x + z > y + t$
   d) $x > y$ e $z > 0 \Rightarrow xz > yz$
   e) $x > y$ e z qualquer $\Rightarrow x + z > y + z$
   f) Se $F \neq \{0\}$, então $0 < 1$
   g) $0 < a \Rightarrow 0 < \frac{1}{a}$
   h) $0 < a < b \Rightarrow 0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.

7. Mostre que
$$\sqrt{xy} \leq \frac{1}{2}(x + y), \qquad \forall \quad x, y \in \mathbb{R}^+.$$
   O que significa tal desigualdade?

8. Mostre que
$$a^2 + ab + b^2 \geq 0, \qquad \forall \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

9. Prove a desigualdade de Bernoulli: "se $r \in \mathbb{R}$ e $r > -1$, então
$$1 + nr \leq (1 + r)^n, \quad \forall n \in \mathbb{N}".$$
   dica: prove por indução.

10. Prove a desigualdade: "se $r \in \mathbb{R}$, $r \geq 0$, então
$$(1 + r)^n \geq 1 + nr + n(n-1)\frac{r^2}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}".$$

11. Sejam a e b dois números Racionais com $a < b$.
    a) Mostre que $\frac{a+b}{2}$ também é Racional.
    b) Mostre que $a < \frac{a+b}{2} < b$.
    c) Conclua que entre dois racionais quaisquer existem infinitos racionais.

12. Mostre que entre dois reais x e y sempre existe um outro real.

13. Dados a, b, c e d números reais entre 0 e 1, prove que
$$(1 - a)(1 - b)(1 - c)(1 - d) > 1 - a - b - c - d.$$

14. Prove que, para x, y e z positivos,

$$(x^2+1)(y^2+1)(z^2+1) \geq 8xyz.$$

15. Sejam a racional diferente de zero, e x irracional. Prove que ax e $a+x$ são irracionais. Se x e y são irracionais, pode-se garantir que $x.y$ e $x+y$ são irracionais?

16. Sejam a, b, c e d números racionais. Prove que

$$a + b\sqrt{2} = c + d\sqrt{2} \Leftrightarrow a = c \ \text{ e } \ b = d.$$

17. Seja $A = \{x \in \mathbb{Q}; a < x < b\}$. Mostre que:
i) A não tem elemento máximo
ii) A não tem elemento mínimo
iii) $\inf A = a$ e $\sup A = b$.

18. Encontre o Ínfimo e o Supremo, em $\mathbb{Q}$, do conjunto $A = \{\frac{1}{2^n}; n \in \mathbb{N}\}$.

19. Mostre que se $A = (a, b)$ então A não tem elemento máximo nem elemento mínimo. Mostre também que $\inf A = a$ e $\sup A = b$.

20. Dê exemplos de:
a) Conjunto que não possui elemento máximo, mas possui supremo.
b) Conjunto não limitado que possui supremo.
c) Conjunto não limitado, que não tem elemento mínimo mas tem ínfimo.

21. Mostre que se um conjunto tem elemento máximo (mínimo) então esse elemento é o supremo (ínfimo).

22. Mostre que o Supremo (e o Ínfimo) de um conjunto, quando existe, é único.

23. Sejam A e B conjuntos numéricos limitados. Prove que se $A \subset B$ então

$$\inf A \geq \inf B \qquad e \qquad \sup A \leq \sup B.$$

24. Dados dois conjuntos numéricos limitados A e B, defina

$$A + B = \{a + b/ \quad a \in A, \quad b \in B\}.$$

Prove que

$$\sup(A+B) = \sup A + \sup B \qquad e \qquad \inf(A+B) = \inf A + \inf B.$$

25. Seja A um conjunto numérico limitado e $-A = \{-a/ \quad a \in A\}$. Mostre que

$$\sup(-A) = -\inf A \qquad e \qquad \inf(-A) = -\sup A.$$

26. Seja $X \subset \mathbb{R}$. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ chama-se *limitada* quando sua imagem $f(X)$ é um conjunto limitado. Neste caso, define-se o $\sup\limits_{x \in X} f$ (ou $\sup f$), como o supremo do conjunto $f(X)$.
a) Prove que a soma de duas funções limitadas $f, g : X \to \mathbb{R}$ é uma função limitada;
b) Mostre que $(f+g)(X) \subset f(X) + g(X)$;
c) Conclua que $\sup(f+g) \leq \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) \geq \inf f + \inf g$;
d) Dê exemplos mostrando que se pode ter $\sup(f+g) < \sup f + \sup g$ e $\inf(f+g) > \inf f + \inf g$.

27. Usando valor absoluto, escreva expressões para os seguinte conjuntos:
a) o conjunto dos pontos cuja distância a 2 é menor ou igual a 4;
b) o conjunto dos pontos cuja distância a -3 é menor do que 5;
c) o conjunto dos pontos cuja distância a 6 é maior do que 3.

28. Descreva, através de intervalos, o conjunto

$$\{x \in \mathbb{R}; \quad |x-2| < |x-6|\}.$$

29. Prove, por indução, que

$$|a_1 + a_2 + ... + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + ... + |a_n|,$$

quaisquer que sejam os reais $a_1, a_2, ..., a_n$.

30. Mostre que se $a < x < b$, então $|x| < |a| + |b|$.

31. Verifique que $f : \mathbb{R} \to (-1, 1)$, definida por $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$, é uma bijeção de $\mathbb{R}$ sobre o intervalo $(-1, 1)$.

32. Considere os conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - |x|}{x-3} \leq 0\right\} \text{ e } B = \{x \in [-1, 1]; \arcsin x \geq 0\}.$$

Caracterize, através de intervalos, os conjuntos A e B e determine, se existirem, $\inf A$, $\max A$, $\sup A \bigcap B$, $\min A \bigcap B$ e $\max B \bigcap (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$.