Universidade Federal de Santa Maria

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2010

$2^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Análise na Reta

1. Mostre que o limite de uma sequência, quando existe, é único.

2. Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, prove, se falsa, dê um contra-exemplo.
   a) Se $(a_n)$ é uma sequência crescente, então ela não é limitada superiormente.
   b) Toda sequência limitada é convergente.
   c) Se $a_n \to L$ e $L > 0$, então $a_n > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   d) Se $a_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$, e $a_n \to L$, então $L > 0$.
   e) Se $a_n \to L$ e $k \in \mathbb{R}$, então a sequência $(b_n) = (ka_n)$ converge para $kL$.
   f) Se $a_n < b_n$, para todo natural $n$, e $a_n \to a$ e $b_n \to b$ então $a < b$.

3. Mostre que se $a_n \to L$ e $L > M$ (*respect.* $L < M$ ), então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$n > n_0 \Rightarrow a_n > M \quad (\texttt{respect.} \quad n > n_0 \Rightarrow a_n < M).$$

4. Sejam $(a_n)$, $(b_n)$ e $(c_n)$ três sequências tais que $a_n \leq b_n \leq c_n$, com $a_n \to L$ e $c_n \to L$. Mostre que $b_n \to L$.

5. Estude a convergência da sequência $(a^n)$ para diferentes valores de $a$: $a > 1$, $a = -1$, $a = 1$, $0 < a < 1$, $a < -1$ e $-1 < a < 0$.

6. Estude a convergência da sequência $(\sqrt[n]{n})$.

7. Prove que:
   a) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + ... + \frac{n}{n^2}\right) = \frac{1}{2}$.

   b) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n+1}} + \frac{1}{\sqrt{n+2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = +\infty$.

   c) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + ... + \frac{1}{(2n)^2}\right) = 0$.

   d) $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+h} - \sqrt{n}\right) = 0$.

8. Mostre que a sequência $a_n = \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + ... + \frac{1}{2n}\right)$ converge e que seu limite está entre $\frac{1}{2}$ e 1.

9. Dê o termo geral de cada uma das seguintes sequências:
   a) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, ...)$
   b) $(1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, ...)$
   c) $(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{24}, \frac{1}{120}, ...)$
   d) $(1, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, ...)$

10. Dê exemplos de:
    a) Sequência $(a_n)$ tal que $a_n \in (0, \frac{1}{10}), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 0$.
    b) Sequência $(a_n)$ tal que $a_n \in (\frac{7}{10}, 1), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to 1$.
    c) Sequência que não seja monótona, e que seja convergente para 0.
    d) Sequência $(a_n)$ tal que $a_n \in (-10, -9), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to -9$.
    e) Sequência $(a_n)$ tal que $a_n \in (-1, -\frac{3}{5}), \forall n \in \mathbb{N}$ e $a_n \to -1$.

11. Conjecture sobre o limite de cada uma das sequências. Depois, mostre cada um deles pela definição.

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2n^2}{n^2+5}$ b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{3n\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+5}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1}$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{sen(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ qualquer.

12. Diga se a afirmação é verdadeira ou falsa. Se verdadeira, prove, se falsa, dê um contra-exemplo.
a) Toda sequência convergente é limitada;
b) Toda sequência crescente não é convergente;
c) Se $(b_n)$ e $(c_n)$ são subsequências da sequência $(a_n)$, com $b_n \to L$ e $c_n \to L$, então $a_n \to L$;
d) Se $(a_n)$ possui uma subsequência convergente, então $(a_n)$ é convergente;
e) Se $(a_n)$ possui subsequência convergente, então $(a_n)$ é limitada;
f) Se $(a_n)$ é monótona e possui subsequência limitada então $(a_n)$ é limitada;
g) Se $(a_n)$ é uma sequência monótona que possui uma subsequência convergindo para $L$, então $(a_n)$ também converge para $L$.

13. Mostre que se $(y_n)$ é uma sequência limitada e $x_n \to 0$, então $x_n y_n \to 0$. Se $(y_n)$ for uma sequência qualquer, o resultado continua válido?

14. Mostre que se $a_n \to L$ então $|a_n| \to |L|$. A recíproca é verdadeira?

15. Construa uma sequência que tenha três subsequências convergindo, cada uma, para cada um dos números 0, 1 e 2. Pode uma sequência ter infinitos valores de aderência?

16. Seja $(a_n)$ a sequência definida indutivamente por: $a_1 = \sqrt{2}$ e $(a_{n+1}) = \sqrt{2 + a_n}$, para $n > 1$.
a) Dê os 5 primeiros termos dessa sequência;
b) Mostre, por indução, que $a_n < 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$;
c) Mostre que $(a_n)$ é crescente. ( verifique, para isso, que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (2 - a_n)(1 + a_n) > 0$, para $n \geq 1$), ou seja, $a_{n+1} > a_n$;
d) Conclua, pelos itens anteriores, que $(a_n)$ é convergente e calcule seu limite.

17. Generalize o exercício anterior considerando a sequência $a_1 = \sqrt{a}$ e $(a_{n+1}) = \sqrt{a + a_n}$, onde $a > 0$. dica: Sejam $p = \frac{1+\sqrt{1+4a}}{2}$ e $q = \frac{1-\sqrt{1+4a}}{2}$. Verifique que $p$ e $q$ são raízes da equação $r^2 - r - a = 0$. Conclui-se, facilmente, que $pq = -a$ e $p + q = 1$. Verifique também que $a + p = p^2$, $a + q = q^2$ e $q < 0$. Mostre, por indução, que $a_n < p$, $\forall n \geq 1$. Depois, mostre que $(a_n)$ é crescente ( observe, para isso, que $a_{n+1}^2 - a_n^2 = (p - a_n)(-q + a_n) > 0$ ). Finalmente, conclua que $(a_n)$ é convergente e calcule seu limite.

18. Qual o valor de $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + ...}}}}$ ?

19. (*Aproximações sucessivas da raiz quadrada.*) Seja $a > 0$ e $(a_n)$ definida indutivamente por $a_1 = a$ e $a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right)$, para $n > 1$. Mostre que $(a_n)$ é convergente e calcule seu limite.

20. Mostre que $a_n = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{n!}$ é convergente e $2 \leq \lim a_n < 3$.
*obs: Por definição,* $e = \lim a_n$.

21. Considere, como na 1ª Lista de Exercícios, os conjuntos

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - |x|}{x - 3} \leq 0\right\} \text{ e } B = \{x \in [-1, 1]; \arcsin x \geq 0\}.$$

Diga se cada afirmação é verdadeira ou falsa, justificando sua resposta.

a) Toda sequência monótona de termos em $A$ é convergente;
b) Toda sequência crescente de termos em $A$ é convergente;
c) Se $x_n = (-1)^n a_n$, onde $(a_n)$ é uma sequência de termos em $A \cap \mathbb{R}^+$, então $(x_n)$ tem, pelo menos, dois pontos de aderência, $l_1$ e $l_2$, tais que $l_1 < 0$ e $l_2 > 0$.

22. Mostre que a sequência $a_n = (-1)^n$ não é convergente.