Universidade Federal de Santa Maria

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2010

$3^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Análise na Reta

1. Suponha que $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2 - \frac{1}{n}$. Determine:

   a) a_k b) a_{100} c) $\lim_{k\to\infty} a_k$ d) $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$.

2. A série $\ln\frac{1}{2} + \ln\frac{2}{3} + \ln\frac{3}{4} + ...$ é convergente ou divergente?

3. Obtenha a sequência das reduzidas da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ e mostre que seu limite é 1.

4. Mostre que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(a+n)(a+n+1)} = \frac{1}{a+1}$

5. Mostre que $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = \frac{1}{2}$

   dica: Observe que $\frac{(-1)^n(2n+5)}{(n+2)(n+3)} = (-1)^n\left(\frac{1}{n+2} + \frac{1}{n+3}\right)$

6. Verifique que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = 1 - 3(\ln 2)$, sabendo-se que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2$.

   dica: Observe que $\frac{(-1)^n(n+2)}{n(n+1)} = (-1)^n\left(\frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$

7. Calcule a soma das séries abaixo:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ b) $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e}{\pi}\right)^n$

8. Se (a_n) é uma sequência de termos não-nulos com $a_n \to +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n+1} - a_n)$ diverge e $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_{n+1}}\right)$ converge. Mostre isso.

   O que se pode afirmar sobre o comportamento das séries

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^\lambda} - \frac{1}{(n+1)^\lambda}\right), \lambda > 0 \quad \texttt{e} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \quad ?$$

9. Verifique, entre as séries abaixo, quais as convergentes e quais as divergentes:

   a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4n+1}$ b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+5n}{3n^2+1}$ c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ d) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$

   e) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n}$ f) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ g) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$, com $x \le 1$

   h) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ i) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{\sqrt{n}}$

10. Teste cada uma das séries abaixo, verificando se é convergente ou não.

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^b r^n$ b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{2^n}$

c) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!(1-\cos n^2)}{2.5.8...(3n-1)}$

11. Sabendo-se que $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + ... = \frac{\pi^2}{6}$, mostre que $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + ... = \frac{\pi^2}{8}$.

12. Prove que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente e $a_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ é absolutamente convergente para todo $x \in [-1, 1]$ e

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx) \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

são absolutamente convergentes para todo $x \in \mathbb{R}$.

13. Suponha que $a_n \geq 0$ e $b_n \geq 0$. Prove que, se as séries $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n^2$ são convergentes, então a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ também é convergente.

14. Mostre que se $a_n \geq 0$ e $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ converge, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n}$ converge.
dica: Use o exercício anterior

15. Prove que se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ é uma série convergente de termos positivos, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ é convergente.
dica: use o fato que $a_n \to 0$ e, portanto, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $0 < a_n < 1$ se $n > n_0$.

16. Verifique para quais valores de $x \in \mathbb{R}$, as séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \text{ e } \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

são convergentes.

Obs: As séries acima definem as funções $\sin x$ *e* $\cos x$*, respectivamente.*

17. Considere a série de termos positivos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Mostre que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$ converge (ou diverge) se a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ convergir (ou divergir).

18. Mostre que se $a_n \geq 0$ a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+n^2 a_n}$ é convergente.