Universidade Federal de Santa Maria

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2010

$4^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Análise na Reta

1. Mostre que:
a) 1 é ponto interior de $A = (0, 2)$;
b) $A = \{1, 2, 3\}$ não tem pontos interiores;
c) De modo geral, se A tem um número finito de elmentos, então A não tem ponto interior.

2. O Conjunto $\mathbb{Q}$, dos números Racionais, possui ponto interior?

3. Mostre que:
a) -1 é aderente ao conjunto $A = (-1, 0)$;
b) π é aderente ao conjunto $A = (\frac{\pi}{2}, \pi)$;
c) a e b são aderentes ao conjunto $A = (a, b)$.

4. Qual o fecho dos seguintes conjuntos:
a) $A = [0, 1)$;
b) $A = (0, 1) \cup (2, 3)$;
c) $A = \mathbb{Q}$.

5. Mostre que $\frac{3}{2}$ não é ponto de acumulação do conjunto $A = (0, 1)$.

6. Os pontos 1, 2 e 3 são pontos de acumulação do conjunto $A = \{1, 2, 3\}$?

7. Mostre que todo ponto de acumulação é de aderência. Dê um contra-exemplo mostrando que a recíproca não é verdadeira.

8. Dê exemplos de conjuntos que tenham infinitos pontos de aderência, mas não tenham nenhum ponto de acumulação.

9. Dê exemplos de:
a) Conjunto limitado que não é compacto;
b) Conjunto fechado que não é compacto;
c) Conjunto que não é aberto nem fechado.

10. Seja $A \subset \mathbb{R}$ limitado e não-vazio. Mostre que $a = \inf A$ e $b = \sup A$ são aderentes a A. Conclua que se A é compacto então possui elemento mínimo e elemento máximo. Pode-se garantir que $a = \inf A$ e $b = \sup A$ são pontos de acumulação de A ?

11. Dada uma sequência decrescente $X_1 \supset X_2 \supset \cdots \supset X_n \supset \cdots$ de conjuntos compactos não-vazios, mostre que existe (pelo menos) um número real x que pertence a todos os X_n.

12. Dê exemplo de uma sequência decrescente de conjuntos fechados não-vazios $F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$ e uma sequência decrescente de conjuntos limitados não vazios $L_1 \supset L_2 \supset \cdots \supset L_n \supset \cdots$ tais que $\bigcap F_n = \emptyset$ e $\bigcap L_n = \emptyset$.

13. Sejam X, Y conjuntos disjuntos e não-vazios, com X compacto e Y fechado. Prove que existem $x_0 \in X$ e $y_0 \in Y$ tais que $|x_0 - y_0| \leq |x - y|$ para quaisquer $x \in X, y \in Y$