Universidade Federal de Santa Maria

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2010

$5^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Análise na Reta

1. Mostre que o limite de uma função f num ponto a, quando existe, é único, isto é, se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} f(x) = M$ então $L = M$.

2. Mostre, pela definição, que $\lim_{x\to\sqrt{2}} \frac{x^2-2}{x-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

3. Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ a função de Dirichlet. Mostre que, qualquer que seja o número real a, não existe $\lim_{x\to a} f(x)$. *Este é um exemplo clássico de função que não possui limite (e não é contínua) em nenhum ponto.*
Pondo $g(x) = (x-a)f(x)$, o que se pode afirmar sobre o $\lim_{x\to a} f(x)$?

4. Seja $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1-x, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$. Para quais valores de a existe $\lim_{x\to a} f(x)$? Nos pontos onte existe tal limite, qual é o seu valor?

5. Seja f uma função limitada, isto é, existe $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$, $\forall x \in D_f$. Mostre que:
(i) $\lim_{x\to 0} xf(x) = 0$
(ii) Se $\lim_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = 0$

6. Analise o limite, quando $x \to 0$, das funções $f(x) = sen\left(\frac{1}{x}\right)$ e $g(x) = xsen\left(\frac{1}{x}\right)$.

7. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases}$.
a) f é contínua em 0?
b) Existe o limite $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$?

8. Suponha que $f, g : X \to \mathbb{R}$ são tais que $\lim_{x\to a} f(x) = L$ e $\lim_{x\to a} g(x) = M$. Mostre que se $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in X - \{a\}$, então $L \leq M$.

9. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $a \in X'$. Mostre que se existe $\lim_{x\to a} f(x)$ então f é limitada numa vizinhança de a, isto é, existem $\delta > 0$ e $K > 0$ tais que
$$x \in X, 0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq K.$$

10. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X'$ e $Y = f(X - \{a\})$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L$ então $L \in \overline{Y}$. Prove isso.

11. Sejam $f : X \to \mathbb{R}$, $g : Y \to \mathbb{R}$ com $f(X) \subset Y$, $a \in X'$ e $b \in Y' \cap Y$. Se $\lim_{x\to a} f(x) = b$ e $\lim_{y\to b} g(y) = c$, prove que $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$, contanto que $c = g(b)$ ou então que $f(x) \neq b$ se $x \neq a$.

12. Seja $f : \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x + \frac{x}{|x|}$. Existe $\lim_{x\to 0} f(x)$? Esboce o gráfico da f.

13. Seja $f(x) = |x-2|\left(\frac{x-1}{x-2}\right)$. Existe o $\lim_{x\to 2} f(x)$? Esboce o gráfico da f.

14. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções definidas por $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$; $g(x) = \begin{cases} 0, & se \quad x \neq 0 \\ 1, & se \quad x = 0 \end{cases}$.
Mostre que $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ e $\lim_{y\to 0} g(y) = 0$, porém não existe $\lim_{x\to 0} g(f(x))$.

15. A função $I : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, conhecida como *parte inteira de* x, é definida da seguinte forma: Para cada $x \in \mathbb{R}$, existe único inteiro n tal que $n \leq x < n+1$; põe-se $I(x) = n$. Estude o limite $\lim_{x\to a} I(x)$, para $a \in \mathbb{R}$. Esboce o gráfico de I, isto ajudará na análise.