Universidade Federal de Santa Maria

Programa de Pós-Graduação em Matemática - Verão 2010

$6^{\underline{a}}$ Lista de Exercícios de Análise na Reta

1. Qual o valor de L que torna a função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-8}{x-2}, & se \quad x \neq 2 \\ L, & se \quad x = 2 \end{cases}$ contínua?

2. Considere a função $f(x) = \begin{cases} x^2 sen\left(\frac{1}{x}\right), & se \quad x \neq 0 \\ 0, & se \quad x = 0 \end{cases}$.
   a) f é contínua em 0?
   b) Existe o limite $\lim\limits_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0}$?

3. Se $f : X \to \mathbb{R}$ é continua em X, a função $|f|$ também o é. Prove.

4. Suponha que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função que satisfaz $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e todo $x \in \mathbb{R}$. Mostre que f é contínua.

5. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua. Se $f(x) = 0$ para todo $x \in X$ então $f(x) = 0$ para todo $x \in \overline{X}$. Prove isso.

6. Prove que se $f : X \to \mathbb{R}$ é descontínua no ponto $a \in X$ existem $\epsilon > 0$ e sequência de pontos $x_n \in X$ tais que $x_n \to a$ e $|f(x_n) - f(a)| \geq \epsilon$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Prove que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua se, e somente se, para todo $X \subset \mathbb{R}$, tem-se $f\left(\overline{X}\right) \subset \overline{f(X)}$.

8. Sejam $f, g : X \to \mathbb{R}$ contínuas. Prove que se X é aberto então o conjunto $A = \{x \in X; f(x) \neq g(x)\}$ é aberto e se X é fechado então o conjunto $F = \{x \in X; f(x) = g(x)\}$ é fechado.

9. Mostre que se $f : X \to \mathbb{R}$ é contínua em a e $f(a) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que $f(x) > 0$, $\forall x \in X \cap (a - \delta, a + \delta)$. Interprete geometricamente.

10. Uma função $f : X \to \mathbb{R}$ diz-se *semi-contínua superiormente* (scs) no ponto $a \in X$ quando, para cada $c > f(a)$ dado, existe $\delta > 0$ tal que
    $$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < c.$$
    Defina função *semi-contínua inferiormente* (sci) no ponto a. Prove que f é contínua no ponto a se, e somente se, é scs e sci messe ponto. Prove que se f é scs no ponto a, g é sci no ponto a e $f(a) < g(a)$ então existe $\delta > 0$ tal que
    $$x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < g(x).$$

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função **contínua** e que satisfaz
    $$f(x + y) = f(x) + f(y), \quad \forall x, y \in \mathbb{R}.$$
    Prove que f é linear, ou seja, $f(x) = ax$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

    dicas: Mostre que $f\left(\frac{m}{n}\right) = \frac{m}{n} f(1)$, $\forall m, n \in \mathbb{Z}$ e, portanto, $f(r) = rf(1)$, $\forall r \in \mathbb{Q}$.
    Finalize a demonstração utilizando a densidade de $\mathbb{Q}$ em $\mathbb{R}$ e a continuidade da f.

12. Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} g(x), & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 0, & se \quad x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$, onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua que satisfaz
    $$xg(x) > 0, \quad \forall x \neq 0.$$
    a) Calcule $g(0)$;
    b) Estude a continuidade de f em todos os pontos da reta.

13. Prove que a função $f(x) = \begin{cases} x, & se \quad x \in \mathbb{Q} \\ 1 - x, & se \quad x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$ é contínua em $x = \frac{1}{2}$ e somente nesse ponto.

14. Seja f uma função contínua num intervalo , onde ela é sempre diferente de zero. Prove que f é sempre positiva ou sempre negativa.

15. Sejam f e g funções contínuas num intervalo $[a, b]$, tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Prove que existe c entre a e b tal que $f(c) = g(c)$.

16. $I \subset \mathbb{R}$ intervalo aberto e $f : I \to \mathbb{R}$ contínua $\Rightarrow f(I)$ aberto. Verdadeiro ou falso?

17. Mostre que o polinômio $p(x) = x^6 + x^4 - 4$ possui uma raiz no intervalo $[0, \sqrt{2}]$.
dica: utilize o teorema do valor intermediário.

18. Seja $f : [0, 1] \to [0, 1]$ uma função contínua, cujos domínio e contra-domínio são o intervalo $[0, 1]$. Mostre que f tem um ponto fixo, isto é, existe $x_0 \in [0, 1]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

19. Uma função $f : A \to \mathbb{R}$ é *Lipschitziana* se existe $M > 0$ tal que

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|\,, \quad \forall x, y \in A.$$

a) Relembre a definição de função *uniformemente contínua*;
b) Mostre que toda função Lipschitziana é uniformemente contínua e, portanto, contínua;
c) Mostre que toda função polinomial de grau um $f(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é Lipschitziana;
d) Mostre que $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, é contínua, mas não é uniformemente contínua. Agora, a restrição $f : [a, +\infty) \to \mathbb{R}$ desta função ao intervalo $[a, +\infty)$, $a > 0$ qualquer, é Lipschitziana e, portanto, uniformemente contínua.

20. Seja $f : A \to \mathbb{R}$ uma função *Holder-contínua*, isto é, existem $\alpha > 0$ e $M > 0$ tais que

$$|f(x) - f(y)| \leq M\,|x - y|^{\alpha}\,, \quad \forall x, y \in A.$$

Mostre que f é uniformemente contínua.

21. Se toda função contínua $f : X \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua, prove que o conjunto X é fechado porém não necessariamente compacto.