UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Processo Seletivo 2025-1 - EDITAL PRPGP/UFSM Nº 065, DE 30 DE SETEMBRO DE 2024.

Dezembro 2024

Espelho da Prova de Álgebra Linear

1. **(1,5)** Considere o sistema linear

$$\begin{cases} 3x + 5y + 12z = -3, \\ x + y + 4z = -6, \\ 2x + az = b, \end{cases}$$

onde a e b são constantes reais. Determine os valores de a e b, se possível, para que o sistema seja:

(a) Possível e determinado.

(b) Possível e indeterminado.

(c) Impossível.

Considerando o sistema na forma $Ax = b$ e, para
p_a: posto da matriz ampliada;
p_c: posto da matriz dos coeficientes;
n: número de variáveis do sistema.

a) **(até 0,5)** Determinar os valores de a e b para os quais determinante da matriz A é diferente de zero ou paro os quais $p_a = p_c = p$ e $n - p = 0$

b) **(até 0,5)** Determinar os valores de a e b para os quais $p_a = p_c = p$ e $n > p$.

c) **(até 0,5)** Determinar os valores de a e b para os quais $p_a \neq p_c$.

---

2. **(2,0)**

(a) O subconjunto S do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$ definido por:

$$S = \{p(x) \in P_2(\mathbb{R}) / \int_{-1}^{1} p(x)dx + p'(0) = 0\}$$

forma um subespaço vetorial? $P_2(\mathbb{R})$ é o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a dois (2). Justifique sua resposta.

(b) Em caso afirmativo, encontre uma base e a dimensão de S.

(até 0,75) Mostrar que S é fechado para a soma;

(até 0,5) Mostrar que S é fechado para a multiplicação por escalar;

(até 0,5) Encontrar os polinômios geradores de S, justificar que são linearmente independentes e exibir a base de S;

(até 0,25) Determinar a dimensão de S, justificando o valor encontrado.

---

3. **(1,5)** Seja $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear que possui exatamente dois autovalores $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = \frac{1}{2}$ cujos autoespaços correspondentes sejam $V_{\lambda_1} = \{(a, b, a, 0) : a, b \in \mathbb{R}\}$ e $V_{\lambda_2} = \{(0, a, b, a) : a, b \in \mathbb{R}\}$.

   (a) Qual o conjunto solução do sistema $T(x, y, z, t) = (1, 1, 1, 1)$?

   (b) Mostre que T é uma bijeção e encontre a representação matricial de T^{-1} na base canônica do $\mathbb{R}^4$.

   (c) Encontre os autovalores e respectivos autovetores de T^{-1}, verificando se T^{-1} é diagonalizável.

(até 0,5) Calcular as dimensões dos auto espaços, apresentando bases para estes e, perceber que

$$dimV_{\lambda_1} + dimV_{\lambda_2} = dim\mathbb{R}^4.$$

Usar isso para resolver o sistema $T(X) = (1, 1, 1, 1)$.

(até 0,25) Usando o teorema do núcleo e imagem e o fato de $kerT = V_0 = 0$, é imediato do fato de 0 não ser autovalor de T e, disto concluir que T é injetora e também sobrejetora.

(até 0,25) Justificar que os autovalores de T^{-1} são do tipo $\mu = \frac{1}{\lambda}$ para $\lambda \neq 0$ e que seus auto espaços $V_{mu} = V_\lambda$. Concluir disso que T^{-1}, é diagonalizável e assim apresentar a representação matricial diagonal $[T^{-1}]_\alpha^\alpha$, para α base de autovalores de T^{-1}.

(até 0,5) Usar

$$[T^{-1}]_{can}^{can} = [I]_{can}^{\alpha}[T^{-1}]_\alpha^\alpha[I]_\alpha^{can},$$

onde can é a base canônica do $\mathbb{R}^4$. Com isso achar a representação matricial de T^{-1} na base canônica.

Espelho da Prova de Análise

1. **(1,5)** Calcule a soma da série

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right).$$

(até 1,0) Para cada $N \in \mathbb{N}$ temos

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\tfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right) &= \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(2n+1) - \ln(2n-1)\right) + \sum_{n=1}^{N} \left(\ln(n) - \ln(n+1)\right) \\ &= \ln(2N+1) - \ln(N+1).\end{aligned}$$

Então (série telescópica)

(até 0,5)

$$\sum_{n=1}^{N} \ln\left(\frac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right) = \ln\left(\frac{2N+1}{N+1}\right), N \in \mathbb{N}.$$

Fazer $N \to +\infty$

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\tfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right) = \lim_{N\to+\infty} \ln\left(\tfrac{2N+1}{N+1}\right).$$

Pela continuidade do logaritmo

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{+\infty} \ln\left(\tfrac{n(2n+1)}{(n+1)(2n-1)}\right) &= \ln\left(\lim_{N\to+\infty} \tfrac{2N+1}{N+1}\right) \\ &= \ln 2.\end{aligned}$$

---

2. **(2,0)** Denote por $\mathbb{R}^+$ o conjunto dos números reais ≥ 0. Defina uma função $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \text{ irracional} \\ p \operatorname{sen}\left(\frac{1}{q}\right) & \text{se } x = \frac{p}{q} \text{ com } \operatorname{mdc}(p,q) = 1 \ (p,\, q \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

Em quais pontos f é contínua? Justifique.

(até 0,5) Observar que para uma sequência $\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ de números racionais diferentes de x mas tendendo a x, vale $q_n \to \infty$.

(até 0,5) Na situação acima, argumentar que $\lim_n p_n \operatorname{sen}(1/q_n) \to x$, por exemplo recordando que $\lim_{t\to 0} \frac{t}{\operatorname{sen}(t)} = 1$.

(até 0,5) Concluir corretamente que f é contínua nos irracionais positivos e em 0.

(**até 0,5**) Concluir corretamente que f é descontínua nos racionais positivos.

---

3. **(1,5)** Mostre que a equação

$$\frac{3x^2}{2} + x \operatorname{sen}(x) + \cos(x) - 2 = 0, x \in \mathbb{R},$$

tem exatamente duas soluções reais.

(até 1,0) Definir $f(x) = \frac{3x^2}{2} + x\,\text{sen}(x) + \cos(x) - 2 = 0, x \in \mathbb{R}$. f é uma função par e $f(0) \neq 0$, então basta mostrar que existe exatamente uma solução de $f(x) = 0$ quando $x \in (0, +\infty)$.

Como $f(0) < 0$ e $f(\pi) > 0$, do Teorema do Valor Intermediário segue que existe uma solução de $f(x) = 0$ no interavalo $(0, \pi)$.

(até 0,5) Para mostrar que não existem outras soluções em $(0, +\infty)$: calcular a derivada de f, para provar que $f'(x) > 0$, para todo $x \in (0, +\infty)$ e então podemos concluír que f é crescente em $(0, +\infty)$.

Espelho da Prova de Probabilidade

1. **(2,0)** Sejam A e B dois eventos de um mesmo espaço amostral Ω de um experimento aleatório, em que:
$$P(A) = \frac{2}{5}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(B|A) = \frac{3}{4}.$$
Calcule a probabilidade de A complementar condicionada à ocorrência de B complementar, isto é, $P(\overline{A}|\overline{B})$.

   (até 0,5) Escrever corretamente a definição de probabilidade condicional: $P(\bar{A}|\bar{B}) = P(\bar{A} \cap \bar{B})/P(\bar{B})$.

   (até 0,5) Usar as Leis de De Morgan para concluir que $P(\bar{A}|\bar{B}) = [1 - P(A \cup B)]/P(\bar{B})$.

   (até 0,5) Utilizar corretamente as propriedades da função de probabilidade para concluir que $P(\bar{A}|\bar{B}) = [1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B)]/P(\bar{B})$.

   (até 0,5) Realizar os cálculos corretos para concluir que $P(\bar{A}|\bar{B}) = 4/5$.

---

2. **(2,0)** Considere a seguinte função:
$$f(x, y) = \begin{cases} xy + k, & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$
Determine o valor da constante k para que $f(x, y)$ seja uma função de densidade conjunta de um vetor aleatório (X, Y) e calcule o valor esperado de X.

   (até 0,5) Escrever corretamente as condições necessárias para que $f(x, y)$ seja uma função de densidade conjunta: (i) $f(x, y) \geq 0$ e (ii) $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1$.

   (até 0,5) Calcular corretamente a integral acima, resolver a equação e concluir que $k = 3/4$.

   (até 0,5) Definir corretamente o valor esperado de X para o vetor aleatório (X, Y): $E(X) = \int_0^1 \int_0^1 x f(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

(até 0,5) Calcular corretamente a integral acima para concluir que $E(X) = 13/24$.

---

3. **(1,0)** Seja Ω um conjunto de quatro pontos, com os eventos A, B e C assim definidos: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$, $C = \{\omega_2, \omega_4\}$. Seja $P(\omega_i) = 1/4$, $\forall\ \omega_i$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Mostre que os eventos A, B e C são independentes dois a dois, mas não são conjuntamente independentes.

   (**até 0,3**) Escrever o critério de independência para dois eventos aleatórios. Sejam eles A e B: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

   (**até 0,3**) Escrever o critério de independência conjunta para três eventos aleatórios, A, B e C: $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.

   (**até 0,4**) Realizar corretamente os cálculos para concluir que os eventos são independentes dois a dois dado que $P(A)P(B) = P(A \cap B) = 1/4$ (similarmente para A, C e B, C), mas não conjuntamente independentes, dado que $P(A \cap B \cap C) = 1/4 \neq P(A)P(B)P(C) = 1/8$.