UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Processo Seletivo 2025-1 - EDITAL PRPGP/UFSM Nº 065, DE 30 DE SETEMBRO DE 2024.

Fevereiro 2025

Espelho da Prova de Álgebra Linear

1. Sejam c uma constante real e $A_c = \begin{bmatrix} 3 & 6 & 3 & 3c \\ 2 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & c \\ 3 & 6 & 2 & c^2+2 \end{bmatrix}$.

   (a) **(0,5)** Encontre os valores c_1 e c_2 de c que fazem com que a matriz A_c tenha posto 2.

   (b) **(0,5)** Qual a nulidade de A_c para $c \notin \{c_1, c_2\}$? Justifique sua resposta.

   (c) **(0,5)** Considere $c_1 \leq c_2$ e as matrizes A_{c_1} e A_{c_2} como no item (a). Encontre o subespaço do $\mathbb{R}^4$ que representa o conjunto solução do sistema $A_{c_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = A_{c_2} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_3 \\ x_2 \\ x_1 \end{bmatrix}$.
   Qual a dimensão deste subespaço? Justifique sua resposta.

   (a) **(até 0,5)** Escalonamento correto ou caso use determinantes, para encontrar o posto, o calculo dos determinantes de quarta e todos os de terceira ordem das matrizes reduzidas feitos corretamente.

   (b) **(até 0,5)** Calcular a nulidade usando o conceito de dimensão ou justificar plenamente o por quê do posto ser 3 para os outros casos, usando determinantes ou escalonando.

   (c) **(até 0,5)** Montar e resolver o sistema corretamente. Apresentar uma base para o subespaço solução e com isso obter a dimensão desse subespaço.

---

2. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ das matrizes reais $A_{3\times 2}$. Seja S, o subespaço de $\mathbb{M}_{3\times 2}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \ A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \text{ e } A_3 = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 4 & -2 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

   (a) **(0,75)** Encontre uma base e a dimensão de S.

(b) **(0,75)** A matriz

$$B = \begin{bmatrix} \frac{5}{6} & -\frac{1}{6} \\ \frac{2}{3} & 3 \\ \frac{5}{2} & \frac{5}{3} \end{bmatrix}$$

pertence a S? Justifique sua resposta. Em caso afirmativo, determine as coordenadas de B na base de S encontrada no item (a).

(a) **(até 0,75)** Mostrar que $\alpha = \{A_1, A_2, A_3\}$ é linearmente dependente. Extrair de α, um subconjunto linearmente independente β, base de S. Observar que β tem dois elementos e concluir que dim $S = 2$

(b) **(até 0,75)** Escrever B como combinação linear dos elementos de β. Resolver o sistema linear com seis equações e duas incógnitas resultante, concluir que $B \in S$ e indicar as coordenadas de B com relação a β.

---

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x, y, z) = (2x - 3y + z, x - 2y + z, x - 3y + 2z)$.

(a) **(0,6)** Determine os autovalores e autovetores de T.

(b) **(0,4)** Determine o núcleo de T, a imagem de T e suas dimensões.

(c) **(0,4)** T é uma transformação linear injetora? T é sobrejetora? Justifique.

(d) **(0,6)** Se β é uma base qualquer do $\mathbb{R}^3$ os autovalores e autovetores de $[T]_\beta$ são os mesmos encontrados no item (a). Justifique.

(a) **(até 0,6)** Cálculo correto do polinômio característico, dos autovalores e dos autovetores.

(b) **(até 0,2)** Cálculo correto do núcleo de T e sua dimensão.
(até 0,2) Cálculo correto da imagem de T e sua dimensão.

(c) **(até 0,2)** Responder se a transformação linear é injetora, usando o item (b).
(até 0,2) Responder se a transformação linear é sobrejetora, usando o item (b) ou o Teorema da dimensão.

d) **(até 0,3)** Responder se os autovalores são os mesmos, justificando através da definição de matrizes semelhantes ou matriz mudança de base.
(até 0,3) Responder se os autovetores são os mesmos, justificando através da definição de autovalor e o correspondente autovetor.

Espelho da Prova de Análise/Cálculo

1. **(2,0)** Mostre que uma constante positiva t satisfaz $e^x > x^t$ para todo $x > 0$ se e somente se $t < e$.

   (até $1,0$) Demonstrou corretamente que se $0 < t < e$, então vale $e^x > x^t$ para todo $x > 0$, por exemplo através da determinação do valor mínimo atingido por $\frac{e^x}{x^t}$ ou do logaritmo desta última, para $x \in (0, +\infty)$.

   (até $1,0$) Demonstrou corretamente que se $e < t$, então existe um x tal que $e^x \leq x^t$, por exemplo $x = e$.

---

2. **(1,5)** Determine o limite

$$\lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{\pi}{2^2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{2^3}\right)\cdots\cos\left(\frac{\pi}{2^n}\right).$$

   Dica: Utilize a relação $\text{sen}(2x) = 2\text{sen}x\cos x$.

   (até $0,75$) Utilizou a relação dada para simplificar o produto do enunciado a

$$\frac{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right)}{2^{n-1}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2^n}\right)}$$

   (até $0,75$) Mostrou que o limite desta expressão quando $n \to \infty$ vale $\frac{2}{\pi}$, justificando esta conclusão por exemplo como uma conseqüência de $\lim_{x\to 0}\frac{\text{sen}x}{x} = 1$.

---

3. **(1,5)** Suponha que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ seja contínua no intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Dados $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, mostre que existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}.$$

   (até 0,75) Sem perda de generalidade podemos supor

$$f(x_1) \leq f(x_2) \leq f(x_3).$$

   Então

$$f(x_1) \leq \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3} \leq f(x_3).$$

   (até 0,75) Pelo Teorema do Valor Intermediário existe $x_0 \in [a, b]$ tal que

$$f(x_0) = \frac{f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)}{3}.$$

Espelho da Prova de Probabilidade

1. Classifique como verdadeiro ou falso, justificando adequadamente a sua resposta.
   (a) **(1,0)** Se $P(A|B) \geq P(A)$ então $P(B^c|A) \leq P(B^c)$. (B^c denota o evento complemento de B).
   (b) **(0,5)** Se $P(A) = \alpha$ e $P(B) = \beta$, então $P(A|B) \geq (\alpha + \beta - 1)/\beta$.

   (a) **(até 0,5)** Escrever corretamente a definição de probabilidade condicional para reescrever a hipóteses como : $P(B|A) \geq P(B)$.

   (até 0,5) Realizar os cálculos corretos e usar adequadamente as propriedades da probabilidade de eventos complementares para concluir que $P(B^c|A) \leq P(B^c)$.

   (b) **(até 0,1)** Usar a definição de probabilidade condicional para ver que $P(A \cap B) = \beta P(A|B)$.

   (até 0,1) Usar os axiomas de Kolmogorov e a propriedade da união de dois eventos arbitrários para verificar que $\alpha + \beta - P(A \cap B) \leq 1$.

   (até 0,3) Realizar as substituições adequadas para concluir que $P(A|B) \geq (\alpha + \beta - 1)/\beta$.

---

2. **(2,0)** Seja X uma variável aleatória seguindo uma distribuição Weibull com função de distribuição acumulada dada por

$$F_X(x) = 1 - \mathrm{e}^{-(\lambda x)^\theta}, \quad x \geq 0.$$

Determine a densidade da variável aleatória $Y = \exp\{-X\}$ e a sua mediana.

(até 1,0) Encontrar a função de distribuição acumulada (fda) da variável aleatória Y em função da fda de X e derivar para encontrar a densidade de Y como $f_Y(y) = \theta\lambda^\theta(-\ln(y))^{\theta-1}\mathrm{e}^{-(\lambda(-\ln(y)))^\theta} \cdot \frac{1}{y}, \quad 0 \leq y \leq 1$. Alternativamente o método jacobiano pode ser utilizado.

(até 1,0) Inverter a fda de Y encontrada no item anterior e realizar os cálculos corretos para encontrar a mediana $\tilde{Y}$ de Y como $\tilde{Y} = \exp\left\{-\frac{(-\ln(0.5))^{1/\theta}}{\lambda}\right\}$.

---

3. Sejam A, B e C eventos de um mesmo espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Prove, ou dê um contra exemplo, para as afirmações:

(a) **(0,75)** Se A e B são independentes, então $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

(b) **(0,75)** Se $P(B|A^c) = P(B|A)$, então A e B são independentes (A^c denota o evento complemento de A).

(a) **(até 0,75)** Escrever um contraexemplo para mostrar que a afirmação é falsa. Um contraexemplo possível: Seja $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, com os eventos A, B e C assim definidos: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3\}$, $C = \{\omega_2, \omega_4\}$. Seja $P(\omega_i) = 1/4$, $\forall\ \omega_i$ com $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. É possível verificar que A e B são independentes e $P(A \cap B \mid C) \neq P(A \mid C)P(B \mid C)$.

(b) **(até 0,35)** Usar corretamente a definição de probabilidade condicional para reescrever a hipóteses como $\frac{P(A^c \cap B)}{P(A^c)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$.

(até 0,4) Realizar a álgebra correta e usar o critério de independência para dois eventos aleatórios para concluir que, sob a hipóteses, $P(A)P(B) = P(A \cap B)$.