UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Processo Seletivo 2025 - EDITAL PRPGP/UFSM Nº 065, DE 30 DE SETEMBRO DE 2024.

Junho 2025 - 3ª Janela

Espelho da Prova de Álgebra Linear

1. (a) **(0,5)** Seja A uma matriz (7×4) com colunas linearmente independentes. Explique por que o sistema $A^T\mathbf{y} = (1,0,1,0)$ sempre tem solução, onde A^T é a transposta de A.

   (b) **(0,5)** Seja A uma matriz (3×3) e sejam dados os seguintes vetores: $\mathbf{x}_1 = (1,1,1/3)$, $\mathbf{x}_2 = (-1,0,2)$, $\mathbf{b}_1 = (3,1,-2)$, $\mathbf{b}_2 = (2,0,3)$ e $\mathbf{b} = (3,5/3,-19/3)$. Sabendo que $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{b}_1$ e $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{b}_2$, o que podemos afirmar sobre a solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

   (c) **(0,5)** Seja $\mathbf{b}$ um vetor (3×1) qualquer, e $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ e A como no item anterior. O que podemos afirmar sobre a solução do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

Espelho da Questão 1.

(a) **(até 0,5)** Avaliar o posto da matriz A. Observar que o posto de A =posto de $A^T = 4$. Como o vetor $A^T\mathbf{y} = (1,0,1,0) \in \mathbb{R}^4$ segue que ele é combinação linear das colunas de A. Portanto, o sistema tem solução.

(b) **(até 0,5)** Observar que $\mathbf{b}$ é combinação linear de $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$, isto é,

$$\mathbf{b} = \alpha_1\mathbf{b}_1 + \alpha_2\mathbf{b}_2,$$

para $\alpha_1 = \frac{5}{3}$ e $\alpha_2 = -1$. Logo

$$\mathbf{x} = \frac{5}{3}\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 = \frac{5}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{1}{3}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{8}{3}\\\frac{5}{3}\\-\frac{13}{9}\end{pmatrix}.$$

Assim, o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução.

(c) **(até 0,5)** Como $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ são linearmente independentes, temos que a dimensão da imagem de A é no mínimo 2. Se $\mathbf{b}$ for combinação linear de $\mathbf{b}_1$ e $\mathbf{b}_2$ então o sistema sempre tem solução. Além disso, se existir $\mathbf{b}_3 \in Im\{A\}$ tal que o conjunto $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ é linearmente independente, então o sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ tem solução para qualquer $\mathbf{b}$.

2. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(2,1) = (3,0,2) \quad \text{e} \quad T(1,2) = (1,1,0).$$

   (a) **(0,75)** Encontre uma transformação linear $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $Ker(P) = Im(T)$.

   (b) **(0,25)** Determine as dimensões de $Ker(T)$ e de $Im(P)$.

   (c) **(0,5)** T é uma transformação linear injetora? T é sobrejetora? O que você pode dizer sobre P? Justifique.

   (d) **(0,25)** Há outras respostas para o item (a)? Quantas?

Espelho da Questão 2.

(a) **(0,25)** Verificar que os vetores correspondentes às imagens dos vetores dados são l.i. e portanto formam uma base da imagem de T.

(0,5) Encontrar P a partir de uma matriz que, multiplicada pelos vetores imagem de T produzem zero.

(b) **(0,25)** Sabendo as dimensões de $Im(T)$ e $ker(P)$, usar o Teorema do Núcleo e da Imagem para encontrar as dimensões dos espaços solicitados.

(c) **(0,25)** Usar as dimensões de $Im(T)$, $ker(T)$, $Im(P)$ e $ker(P)$ obtidas em (b) para responder sobre a injetividade e sobretividade de T. **(0,25)** P.

(d) **(0,25)** Concluir que existem infinitas transformações P em virtude das infinitas soluções encontradas em (a).

3. Sejam $\alpha = \{(1,0,1), (0,1,-1), (0,1,1)\}$ e $\beta = \{v_1, v_2, v_3\}$ bases do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$ tais que a matriz de mudança da base α para a base β seja

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) **(0,75)** Calcule a dimensão do subespaço vetorial gerado pelos vetores u_1, u_2, u_2 e u_4 cujas coordenadas na base β sejam, respectivamente $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, e $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$.
   O vetor $w = (3,1,-2)$ pertence a esse subespaço?

   (b) **(0,5)** Encontre os vetores de β.

   (c) **(0,5)** Encontre, se existir, um vetor w do $\mathbb{R}^3$, tal que cada coordenada na base α somada com sua respectiva coordenada na base β da sempre 2.

Espelho da Questão 3.

(a) **(até 0,15)** Utilizar a notação adequada, sem confundir matriz mudança da base α para β com a matriz mudança da base β para α.

(até 0,25) Estudar o subespaço vetorial de $M_{3\times 1}(\mathbb{R})$ gerado pelas matrizes coordenadas dadas e disso tirar conclusões sobre os vetores geradores em $\mathbb{R}^3$.

(até 0,50) Apresentar os geradores que formam uma base para o 0subespaço em suas coordenadas ou seus vetores correspondentes, calculando assim a dimensão.

(até 0,75) Mostrar com detalhes o porquê do vetor w não pertencer ao subespaço indicado na questão.

(b) **(até 0,25)** Utilizar as colunas da matriz A como sendo as coordenadas dos vetores de α na base desconhecida β de modo a obter um sistema cujos os vetores incógnitas sejam os vetores procurados de β.

(até 0,50) Resolver o sistema de equações obtidos de forma correta obtendo os valores (únicos) para v_1, v_2 e v_3.

(c) **(até 0,25)** Equacionar corretamente o problema : $w]_\alpha + w]_\beta = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(até 0,50) Utilizar a matriz A para expressar $w]_\beta = Aw]_\alpha$, resolvendo corretamente este sistema na obtenção das coordenadas de w na base α e finalmente, encontrar o vetor w.

Espelho da Prova de Análise/Cálculo

1. (a) **(1,25)** Seja $r > 0$. Discuta a convergência da série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\log n)^r}.$$

(b) **(1,25)** Determine o maior $r > 0$ tal que a série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!x^n}{n^n},$$

converge para todo x real com $|x| < r$ e diverge para todo x com $|x| > r$.

Dica: Você pode utilizar o fato que $\lim(1 + \frac{1}{n})^n = e$.

Espelho da Questão 1.

(a) (0,25) Enunciou clara e corretamente o teste da integral.
(0,25) Identificou corretamente a integral imprópria $\int_2^{\infty} \frac{1}{x(\log x)^r}\, dx$.
(0,25) Realizou corretamente a substituição $u = \log x$, obtendo $\int_{\log 2}^{\infty} u^{-r}\, du$.
(0,25) Analisou corretamente os três casos: $r > 1$ (converge), $r = 1$ (diverge), $0 < r < 1$ (diverge).
(0,25) Concluiu corretamente que a série converge se e somente se $r > 1$.

(b) (0,25) Enunciou clara e corretamente o teste da razão para determinar o raio de convergência.
(0,25) Calculou corretamente $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x| \cdot \frac{n^n}{(n+1)^n}$.
(0,25) Reescreveu corretamente como $|x| \cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$.
(0,25) Aplicou corretamente a dica, obtendo $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{|x|}{e}$.
(0,25) Concluiu corretamente que $r = e$.

2. **(1,25)** Suponha que $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são contínuas e periódicas de período $T > 0$. Prove que se

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - g(x)) = 0,$$

então $f(x) = g(x), \forall x \in \mathbb{R}$.

Espelho da Questão 2.

(1,25) Defina $h(x) = f(x) - g(x), x \in \mathbb{R}$. Devemos mostrar que $h \equiv 0$.

Suponha que existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $h(x_0) \neq 0$. Suponha $h(x_0) > 0$ e defina $\varepsilon = h(x_0) > 0$. Por hipótese $\exists M > 0$ tal que

$$x > M \Rightarrow |h(x)| < \varepsilon.$$

Como f e g são períodicas de período $T > 0$ segue que h é periódica de período T. Tome $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 + nT > M$. Então

$$\varepsilon > h(x_0 + nT) = h(x_0) = \varepsilon.$$

Contradição.

3. **(1,25)** Defina $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

Prove que f é derivável em $x = 0$ e calcule $f'(0)$.

Espelho da Questão 3.

(1,25) Dupla aplicação da regra de L'Hospital:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{\operatorname{sen} h}{h} - 1}{h} = \lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} h - h}{h^2} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\cos h - 1}{2h} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{-\operatorname{sen} h}{2} = 0.$$

Espelho da Prova de Probabilidade

1. Uma pesquisa coletou dados sobre o desempenho de candidatos em duas provas distintas: uma de Lógica e outra de Probabilidade. Dos candidatos que passaram na prova de Lógica, 70% passaram também em Probabilidade. Já dos que não passaram em Lógica, 40% passaram em Probabilidade. A proporção de candidatos que passou em Lógica é desconhecida.

   (a) **(1,0)** Os eventos "Passar na prova de Lógica" e "Passar na prova de Probabilidade" podem ser independentes?

   (b) **(1,0)** Suponha agora que os eventos fossem independentes. Derive qual seria a proporção necessária de aprovados em Lógica para manter a independência, dadas as probabilidades condicionais do enunciado. Comente seu resultado.

   Espelho da Questão 1.

   (a) **(até 0,2)** Definir os eventos.
   (até 0,2) Interpretar corretamente as probabilidades condicionais fornecidas: $\mathbb{P}(P \mid L) = 0{,}7$, $\mathbb{P}(P \mid L^c) = 0{,}4$.
   (até 0,6) Usar a fórmula da probabilidade total para expressar $\mathbb{P}(P)$ e discutir que $\mathbb{P}(P \mid L) \neq \mathbb{P}(P)$ e, portanto, P e L não são independentes.

   (b) **(até 0,5)** Usar a fórmula da probabilidade total para expressar a probabilidade de passar na prova de Probabilidade ($\mathbb{P}(P)$) em termos da probabilidade de ser aprovado em Lógica ($\mathbb{P}(L)$): $\mathbb{P}(P) = 0{,}7 \times \mathbb{P}(L) + 0{,}4 \times (1 - \mathbb{P}(L))$.
   (até 0,3) Impor a condição de independência: $\mathbb{P}(P) = P(P|L)$ (ou $P(P) = P(P|L^c)$) e resolver corretamente a equação.
   (até 0,2) Comentar o valor obtido ($\mathbb{P}(L) = 1$ ou $\mathbb{P}(L) = 0$) e a contradição com a definição de independência e as probabilidades condicionais do exercício.

2. Em um teste diagnóstico a sensibilidade (isto é, a probabilidade de resultado positivo dado que o indivíduo está doente) é $\alpha = 0.95$ e a especificidade (probabilidade de resultado negativo dado que o indivíduo está saudável) é $\beta = 0.98$. O teste é aplicado a uma população com prevalência (probabilidade de um individuo na população ter a doença) $\pi = 0.01$. No entanto, deseja-se implementar esse teste em um grupo de triagem, em que apenas pacientes que apresentaram um sintoma específico (chamado aqui de S) são testados. Sabe-se que 70% dos pacientes doentes apresentam o sintoma S e que 20 % dos pacientes saudáveis apresentam o sintoma S.

   (a) **(0,5)** Calcule a probabilidade de um indivíduo da população geral apresentar o sintoma S.

   (b) **(0,5)** Dado que o paciente apresenta o sintoma S, calcule a nova prevalência da doença condicional a S, ou seja, $P(D|S)$.

   (c) **(0,5)** Suponha que o teste será aplicado apenas nos pacientes com sintoma S. Calcule a probabilidade de que um indivíduo com teste positivo e com sintoma S esteja realmente doente.

Espelho da Questão 2.

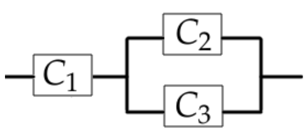
(a) **(até 0,2)** Definir os eventos.

(até 0,3) Aplicar corretamente a fórmula da probabilidade total para a probabilidade de apresentar o sintoma S ($\mathbb{P}(S)$): $\mathbb{P}(S) = \mathbb{P}(S|D) \times \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(S|D^c) \times \mathbb{P}(D^c) =$ 0,205.

(b) **(até 0,5)** Usar corretamente o teorema de Bayes para concluir que $\mathbb{P}(D|S) =$ 0,03415.

(c) **(até 0,5)** Usar corretamente o teorema de Bayes para concluir que $\mathbb{P}(D|T^+ \cap S) =$ 0,6264

3. O diagrama a seguir representa um sistema que permanece em funcionamento enquanto o componente C_1 estiver operante e pelo menos um dos componentes C_2 ou C_3 também estiver funcionando. Seja X_i uma variável aleatória que representa o tempo de vida do componente C_i, para $i = 1, 2$ e 3. Suponha que os X_i's são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas segundo a distribuição exponencial com média 1. Seja $Y = \max(X_2, X_3)$ e $Z = \min(X_1, Y)$.



   (a) **(0,75)** Encontre E$[Z]$ e Var$[Z]$.

   (b) **(0,75)** Encontre a função de densidade da variável aleatória que descreve o tempo de vida do sistema.

Espelho da Questão 3.

(a) **(até 0,15)** Derivar corretamente a distribuição de Y a partir da distribuição do máximo de duas variáveis aleatórias independentes: $F_Y(y) = (1 - \mathrm{e}^{-y})^2$.

(até 0,15) Derivar a distribuição de Z a partir da distribuição do mínimo de duas variáveis aleatórias independentes: $F_Z(z) = 1 - (2\mathrm{e}^{-2z} - \mathrm{e}^{-3z})$.

(até 0,20) Usar a distribuição de Z para calcular $\mathbb{E}[Z] = 2/3$.

(até 0,25) Usar a distribuição de Z para calcular $\mathbb{V}\mathrm{ar}[Z] = 1/3$.

(b) **(até 0,20)** Identificar Z como a variável aleatória que descreve o tempo de vida do sistema.

(até 0,55) Escrever corretamente a densidade de Z: $f_Z(z) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} F_Z(z) = 4\mathrm{e}^{-2z} - 3\mathrm{e}^{-3z}$.