UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDITAL PRPGP/UFSM Nº 030, DE 29 DE SETEMBRO DE 2025.

Processo Seletivo 2026 - 1ª Janela.

Espelho da Prova Escrita - Seleção 2 - Fevereiro 2026

Espelho da Prova de Álgebra Linear

1. **(1,6)** Para cada uma das afirmações a seguir, determine se é **Verdadeira (V)** ou **Falsa (F)**. Se a afirmação for verdadeira, apresente uma prova. Se for falsa, um contraexemplo.

   (a) **(0,4)** Todo sistema linear possível e indeterminado admite soluções que formam um subespaço vetorial.

   (b) **(0,4)** Seja $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ uma matriz diagonalizável. Se o sistema homogêneo $Ax = 0$ possui apenas a solução trivial, então $A = I$.

   (c) **(0,4)** Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e $T : V \to V$ uma transformação linear tal que $T^2 = T$. Então
   $$V = \ker(T) \oplus \operatorname{Im}(T).$$

   (d) **(0,4)** Seja $T : V \to W$ uma transformação linear entre espaços vetoriais reais de dimensão finita. Se $\dim V = \dim W$, então T é uma transformação linear injetora se, e somente se, é sobrejetora.

   Espelho da Questão 1

   (a) **(0,1)** A afirmação é falsa.
   (até 0,3) Apresentar um contraexemplo correto.

   (b) **(0,1)** A afirmação é falsa.
   (até 0,3) Apresentar um contraexemplo correto.

   (c) **(0,1)** A afirmação é verdadeira.
   (até 0,15) Provar que
   $$V = \ker(T) + \operatorname{Im}(T).$$
   (até 0,15) Provar que
   $$\ker(T) \cap \operatorname{Im}(T) = \{\mathbf{0}\}.$$

   (d) **(0,1)** A afirmação é verdadeira, e se usando as hipóteses:
   (até 0,15) Provar que se a transformação é injetora então é sobrejetora.
   (até 0,15) Provar que se a transformação é sobrejetora então é injetora.

2. **(1,4)** Seja $P_2(\mathbb{R})$ o espaço vetorial real dos polinômios de grau menor ou igual a 2. Considere a transformação linear
$$T : P_2(\mathbb{R}) \longrightarrow P_2(\mathbb{R}), \qquad T(p)(x) = p(x) - p(0).$$

(a) **(0,4)** Determine explicitamente o núcleo $\ker(T)$ e a imagem $\mathrm{Im}(T)$.

(b) **(0,5)** Calcule $\dim(\ker(T))$ e $\dim(\mathrm{Im}(T))$ e verifique o Teorema da Dimensão.

(c) **(0,5)** Considere a base ordenada $\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}$ do espaço vetorial $P_2(\mathbb{R})$. Determine a matriz de T na base $\mathcal{B}$.

Espelho da Questão 2

(a) **(até 0,2)** Determinar corretamente o núcleo $\ker(T)$.

(até 0,2) Determinar corretamente a imagem $Im(T)$.

(b) **(até 0,2)** Determinar corretamente uma base para o núcleo de T, e concluir sobre a sua dimensão.

(até 0,2) Determinar corretamente uma base para a imagem de T, e concluir sobre a sua dimensão.

(até 0,1) Verificar o Teorema da dimensão.

(c) **(até 0,4)** Determinar corretamente o valor de T em cada vetor da base dada e escrever o resultado como combinação linear da base.

(até 0,1) Expressar corretamente a matriz de T na base β.

3. **(2,0)** Sejam $a \in \mathbb{R}$ fixado, e $T_a : \mathbb{R}^4 \to R^4$ dada por

$$T_a(x, y, z, t) = (x\,(a+2) + ay + (2a-4)\,z, -2x + (4-2a)\,z, x + y + az, -x - y + (2-a)\,z + 2t)\,.$$

(a) **(0,5)** Encontre a representação matricial de T_a na base

$$\alpha = \{(0,0,0,1), (-1,1,0,0), (1,0,0,0), (2,-2,1,-1)\}.$$

(b) **(0,5)** Mostre que o polinômio característico $p(\lambda)$ de T é dado por $p(\lambda) = (\lambda-2)^2\,(\lambda-a)^2$.

(c) **(0,5)** Encontre os autovalores de T_a e seus respectivos autoespaços descrevendo-os como sub-
espaços do $\mathbb{R}^4$, apresentando uma base e calculando a dimensão de cada um deles.

(d) **(0,5)** Justifique por que, seja qual for o valor real de a, não existe uma base do espaço vetorial $\mathbb{R}^4$ formada somente por autovetores de T_a.

Espelho da Questão 3

(a) **(até 0,5)** Apresentar todas as etapas dos cálculos, incluindo o sistema que fornece a matriz que representa o operador na base dada.

(b) **(até 0,5)** Saber que o polinômio característico é um invariante linear que independe da base escolhida e com isso usar o item b. para facilitar as contas, usando técnicas de determinantes para obtê -lo. Do contrário, utilizar a representação na base canô nica e fazer mais contas corretamente e integralmente.

(c) **(até 0,5)** Apresentar os autovalores e seus respectivos autoespaços como subespaços do $\mathbb{R}^4$. Serão desconsideradas soluções que sejam combinações de vetores de $M_{4\times 1}(\mathbb{R})$ que são comuns em soluções padrões de IA, principalmente se as coordenadas forem dadas na base α do item a.

(d) **(até 0,5)** Utilizar argumento usando-se de conjuntos LI e bases conforme o contexto, sem apelos a conceitos sofisticados de diagonalização ou formas de Jordan que são comumente usados pela IA. Do contrário, usar argumentos sofisticados para além do escopo dessa prova, deixando claro, o porquê da utilização desses métodos.

Espelho da Prova de Análise/Cálculo

1. **(2,0)** Seja $a_n = 2\sqrt{n} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$. Prove que a sequência (a_n) converge para um limite L no intervalo $[1, 2]$. *Dica:* Compare $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}$ com integrais de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

   Espelho da Questão 1

   (até 0,8) Provar que a sequência (a_n) é estritamente crescente, mostrando que

   $$a_{n+1} - a_n = 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} - \frac{1}{\sqrt{n+1}} > 0\,.$$

   (até 0,8) Utilizar a desigualdade integral

   $$2\sqrt{n+1} - 2 < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{n} - 1$$

   para estabelecer limites superior e inferior para a_n.

   (até 0,4) Argumentar que, como a sequência é crescente e limitada superiormente por 2, ela converge para um limite L tal que $1 \leq L \leq 2$.

2. **(1,5)** Suponha que $f : [a, b] \to [a, b]$ é contínua no intervalo $[a, b]$, derivável em (a, b) e que $f'(x) \neq 1, \forall x \in (a, b)$. Prove que existe um único ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = x_0$.

   Espelho da Questão 2

   (até 0,75 pontos) Existência: Defina $g(x) = f(x) - x$. Utilizando o Teorema do Valor Intermediário e a hipótese $f([a, b]) \subset [a, b]$ conclua que existe pelo menos um ponto $x_0 \in [a, b]$ tal que $g(x_0) = 0$.

   (até 0,75 pontos) Unicidade: Suponha que existem dois pontos distintos $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $g(x_1) = g(x_2) = 0$. Aplique o Teorema de Rolle no intervalo de extremidades x_1 e x_2 para concluir que existe $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 1$, o que é um absurdo.

3. **(1,5)** Suponha que $a > 0$ e $a \neq 1$. Calcule

   $$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{a^x - 1}{x(a-1)} \right)^{\frac{1}{x}}.$$

   Espelho da Questão 3

   Defina $f(x) = \frac{a^x - 1}{x(a-1)}, x \in \mathbb{R}$.

(até 0,75) Caso $a > 1$. Verifique que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ é do tipo ∞^0.
Usando a Regra de L'Hospital verifique que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left[(f(x))^{\frac{1}{x}}\right] = \ln a.$$

Por continuidade conclua que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = a.$$

(até 0,75) Caso $0 < a < 1$. Verifique que $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}}$ é do tipo 0^0.
Usando a Regra de L'Hospital verifique que

$$\lim_{x\to+\infty} \ln\left[(f(x))^{\frac{1}{x}}\right] = 0$$

Por continuidade conclua que

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x))^{\frac{1}{x}} = 1.$$

Espelho da Prova de Probabilidade

1. **(1,5)** Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade. Considere dois eventos $A, B \in \mathcal{F}$ com probabilidades tais que $0 < P(A) < 1$ e $0 < P(B) < 1$.

   (a) **(0,7)** Prove que se A e B são independentes, então A^c e B também são independentes.

   (b) **(0,8)** Considere um terceiro evento $C \in \mathcal{F}$ tal que $0 < P(C) < 1$. Suponha que A e B sejam condicionalmente independentes dado C, e também condicionalmente independentes dado C^c. Demonstre analiticamente que a condição necessária e suficiente para que A e B sejam também marginalmente independentes é $P(A|C) = P(A|C^c) \quad \text{ou} \quad P(B|C) = P(B|C^c)$.

Espelho da Questão 1

(a) **(até 0,2)** Utilizar a relação $P(B) = P(A \cap B) + P(A^c \cap B)$ ou partir de $P(A^c \cap B) = P(B) - P(A \cap B)$. até 0,2

(até 0,2) Aplicar a hipótese de independência: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

(até 0,3) Fatorar a expressão: $P(A^c \cap B) = P(B)[1 - P(A)] = P(B)P(A^c)$, concluindo a independência. [até 0,3 pts]

(b) **(até 0,2)** Escrever $P(A \cap B)$ e $P(A)P(B)$ usando o Teorema da Probabilidade Total em termos de C e C^c.

(até 0,2) Aplicar as independências condicionais: $P(A \cap B|C) = P(A|C)P(B|C)$.

(até 0,2) Mostrar que a igualdade $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ se reduz à equação algébrica $(P(A|C) - P(A|C^c))(P(B|C) - P(B|C^c)) = 0$ (ou equivalente via covariância).

(até 0,2) Concluir que o produto é zero se, e somente se, um dos fatores for nulo $(P(A|C) = P(A|C^c)$ ou $P(B|C) = P(B|C^c))$.

2. **(1,5)** Seja X uma variável aleatória contínua representando o tempo base de funcionamento de um dispositivo com distribuição exponencial padrão. Considere a variável transformada $Y = X^{1/\alpha}$, em que $\alpha > 0$ é um parâmetro de forma.

   (a) **(0,5)** Determine a função densidade de probabilidade (f.d.p.) de Y. Verifique explicitamente se a função encontrada é f.d.p.

   (b) **(0,5)** Obtenha a expressão da função taxa de falha e classifique o comportamento de envelhe-
   cimento do componente analisando os casos $\alpha < 1$, $\alpha = 1$ e $\alpha > 1$.

   (c) **(0,5)** Expresse $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}(Y)$ em termos da função gama, definida por $\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt$.

Espelho da Questão 2

(a) **(até 0,2)** Determinar a f.d.a de Y: $F_Y(y) = P(X^{1/\alpha} \leq y) = P(X \leq y^\alpha) = 1 - e^{-y^\alpha}$ para $y > 0$.

(até 0,2) Derivar para obter a f.d.p.: $f_Y(y) = \alpha y^{\alpha-1}e^{-y^\alpha}$.

(até 0,1) Verificar a integral $\int_0^\infty \alpha y^{\alpha-1}e^{-y^\alpha}dy = 1$ (usando substituição $u = y^\alpha$).

(b) **(até 0,2)** Calcular a taxa de falha $h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{1-F_Y(y)} = \frac{\alpha y^{\alpha-1} e^{-y^\alpha}}{e^{-y^\alpha}} = \alpha y^{\alpha-1}$.

(até 0,3) Classificar os casos: $\alpha < 1$ (decrescente/DHR), $\alpha = 1$ (constante/exponencial) e $\alpha > 1$ (crescente/IHR). [até 0,3 pts]

(c) **(até 0,2)** Calcular $E[Y^k] = \int_0^\infty y^k \alpha y^{\alpha-1} e^{-y^\alpha} dy$. Usando $u = y^\alpha$, concluir que $E[Y^k] = \Gamma(1 + \frac{k}{\alpha})$.

(até 0,15) Apresentar $E[Y] = \Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})$.

(até 0,15) Apresentar $\text{Var}(Y) = \Gamma(1 + \frac{2}{\alpha}) - [\Gamma(1 + \frac{1}{\alpha})]^2$.

3. **(2,0)** Um sistema de monitoramento de segurança classifica o estado de uma operação como normal (N) ou crítico (C). A probabilidade a priori de o sistema estar em estado crítico é conhecida e dada por $P(C) = \pi$, em que $0 < \pi < 0{,}5$.

   O sistema possui um sensor que emite um sinal contínuo X no intervalo $[0, 1]$. A distribuição do sinal depende do estado do sistema da seguinte forma: (i) se o estado é normal, X segue uma distribuição uniforme em $[0, 1]$, e (ii) se o estado é crítico, X tende a apresentar valores mais altos, seguindo uma distribuição com densidade $f(x|C) = 2x$ para $0 \le x \le 1$.

   (a) **(1,0)** Deduza a expressão da probabilidade a posteriori $P(C|X = x)$ em função de x e π. Mostre que essa probabilidade é estritamente crescente com x.

   (b) **(1,0)** Suponha que o operador decida acionar um alarme se a probabilidade de o sistema estar crítico, dado o sinal observado, for superior a 0,5. Encontre o valor crítico x^* em função de π e determine a condição sobre π para que seja possível disparar o alarme dentro do intervalo de operação do sensor.

Espelho da Questão 3

(a) **(até 0,3)** Aplicar o Teorema de Bayes: $P(C|x) = \frac{f(x|C)P(C)}{f(x|C)P(C)+f(x|N)P(N)}$.

(até 0,4) Substituir os valores para obter $P(C|x) = \frac{2x\pi}{2x\pi+(1-\pi)}$.

(até 0,3) Provar que é crescente: calcular a derivada $\frac{d}{dx}P(C|x) = \frac{2\pi(1-\pi)}{(2x\pi+1-\pi)^2} > 0$ ou via análise de razão de verossimilhança. [até 0,3 pts]

(b) **(até 0,4)** Resolver a desigualdade $\frac{2x\pi}{2x\pi+1-\pi} > 0,5$.

(até 0,3) Isolar x para encontrar o valor crítico $x^* = \frac{1-\pi}{2\pi}$.

(até 0,3) Impor a condição de existência $x^* \le 1$: $\frac{1-\pi}{2\pi} \le 1 \implies 1 - \pi \le 2\pi \implies \pi \ge 1/3$.