*UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA*

*PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA*

*EDITAL PRPGP/UFSM Nº 030, DE 29 DE SETEMBRO DE 2025.*

*Processo Seletivo 2026 - 1ª Janela.*

Espelho da Prova Escrita - Seleção 1 - Dezembro 2025

**Espelho da Prova de Álgebra Linear**

1. Seja $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as matrizes reais $3 \times 3$. Considere $S_1$ o conjunto de todas as matrizes reais e simétricas, $S_1^T = S_1$, e $S_2$ o conjunto de todas as matrizes reais e antissimétricas, $S_2^T = -S_2$.

   (a) **(0,4)** Mostre que $S_2$ é um subespaço vetorial d e $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$. Determine uma base e a dimensão de $S_2$.

   (b) **(0,4)** Determine a interseção $S_1 \cap S_2$. Este conjunto é um subsespaço vetorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$? Em caso afirmativo, determine uma base e a sua dimensão.

   (c) **(0,4)** Sabendo que $\dim(M_{3\times 3}(\mathbb{R})) = 9$, $M_{3\times 3}(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$? Justifique.

   (d) **(0,4)** Considere a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 8 & 13 \end{bmatrix} \text{ e o vetor } b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

   Encontre uma base do subespaço dos vetores $b$ do $\mathbb{R}^3$ para os quais o sistema $Ax = b$ tem solução.

**Espelho da Questão 1**

(a) **(até 0,3)** Se mostrar que $S_2$ é diferente do vazio, que é fechado em relação a soma e multiplicação por escalar,

**(até 0,05)** Explicitar uma base de $S_2$, e mostrar que é LI e gera $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$,

**(0,4)** se calcular corretamente a dimensão de $S_2$, com justificativa.

(b) **(até 0,2)** Se calcular corretamente $S_1 \cap S_2$, para $S_1$ subespaço vetorial de $M_{3\times 3}(\mathbb{R})$,

**(até 0,1)** se mostrar que $S_1 \cap S_2$ é subespaço,

**(0,05)** se explicitar uma base de $S_1 \cap S_2$, com justificativa.

**(0,05)** se calcular corretamente a dimensão de $S_1 \cap S_2$, com justificativa.

(c) **(até 0,1)** se calcular uma base e a dimensão de $S_1$,

**(até 0,1)** se mostar que $S_1 + S_2$ é subespaço vetorial,

**(0,4)** se justificar corretamente que $M_{3\times 3}(\mathbb{R}) = S_1 + S_2$.

(d) **(0,3)** Se justificar do porquê determinar o espaço coluna de $A$, ou algum outro argumento equivalente que explicite os vetores $b \in \mathbb{R}^3$ para os quais o sistema $Ax = b$ tem solução,

**(0,1)** se determinar a base, corretamente e justificar do porquê é uma base.

2. Sejam $\alpha = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ uma base do espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$ e $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ um operador linear tal que $T(v_1) = v_1 - v_2 = T(-v_2)$ e $T(v_3) = v_4 - v_3 = T(v_4)$. Prove as seguintes afirmações:

   (a) **(0,4)** O conjunto $\{v_1 + v_2, v_4 - v_3\}$ é uma base para o núcleo de $T$;

   (b) **(0,4)** O conjunto $\{v_1 - v_2, v_4 - v_3\}$ é uma base para a imagem de $T$;

   (c) **(0,4)** $\lambda = 0$ é um autovalor de $T$ com multiplicidade algébrica 3;

   (d) **(0,5)** Existe uma base $\beta$ do $\mathbb{R}^4$ cuja representação matricial de $T$ nesta base é dada pela matriz

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

**Espelho da Questão 2**

(a) **(até 0,15)** se verificar que os vetores estão em Ker $T$,
**(até 0,25)** se só verificarem que os vetores são geradores ou que são só LI.
**(0,4)** se verificarem que os vetores são LI e que geram KerT.

(b) **(até 0,15)** se verificar que os vetores estão em Im $T$,
**(até 0,25)** se só verificarem que os vetores são geradores ou que são só LI.
**(até 0,4)** se verificarem que os vetores são LI e que geram Im $T$.

(c) **(até 0,15)** se apresentar uma matriz que representa $T$,
**(até 0,25)** se apresentar o polinômio característico.
**(0,4)** se apresentar todos os cálculos destacando no polinômio característico o monômio $x^3$, mostrando que a multiplicidade algébrica de $x = 0$, é 3.

(d) **(até 0,15)** se somente apresentar a base, sem verificação ou qualquer argumentação,
**(até 0,25)** se apresentar a base e apenas verificar que ela é adequada.
**(0,5)** se argumentar do porquê da escolha desta base e verificar que ela é efetiva.

3. Considere dois operadores lineares $T_1, T_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ cujas representações na base canônica $\alpha = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ sejam dadas, respectivamente, por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

   Denotando $T_1 \circ T_2$ como sendo o composição de $T_1$ por $T_2$,

   (a) **(0,4)** Calcule os autovalores e os respectivos autoespaços de $T_1 \circ T_2$.

   (b) **(0,4)** Determine o núcleo e a Imagem do operador $(T_1 \circ T_2)$.

   (c) **(0,4)** Verifique a inversibilidade de $T_1 \circ T_2$. Use isso para verificar a invertibilidade de $T_1$ e $T_2$.

   (d) **(0,5)** Encontre todos os vetores $v$ do $\mathbb{R}^3$ tais que $T_1(v)$ seja autovetor de $T_2$.

**Espelho da Questão 3**

(a) **(até 0,15)** se apresentar a matriz que representa $T_1 \circ T_2$,

**(até 0,25)** se apresentar o polinômio característico e os autovalores corretamente.

**(0,4)** se apresentar todos os cálculos dos autovalores e seus respectivos autoespaços usando notação adequada.

(b) **(até 0,25)** se fazer os cálculos do núcleo ou apresentar usar o item (a) para apresentar somente o núcleo ou,

**(até 0,25)** se somente calcular a imagem de $T_1 \circ T_2$, apresentando os cálculos e procedimentos.

**(0,4)** se apresentar o núcleo e a Imagem, utilizando-se de notação adequada e mostrando de onde vem os cálculos.

(c) **(até 0,25)** para mostrar que $T_1 \circ T_2$ não é invertível utilizando-se do item (a) ou calculando o determinante de $AB$.

**(até 0,15)** se não usar a não invertibilidade de $T_1 \circ T_2$ na argumentação da invertibilidade de $T_1$ e $T_2$, porém apresentar outra argumentação.

**(0,4)** se apresentar os cálculos e utilizar argumentação correta para provar que $T_1$ é invertível, enquanto que $T_2$ e $T_1 \circ T_2$ são não invertíveis.

(d) **(até 0,3)** se fazer os cálculos de forma direta.

**(0,5)** se utilizar os autovetores de $T_2$ como solução, argumentando o porquê disso funcionar.

**Espelho da Prova de Análise/Cálculo**

1. **Questão 1.** **(1,0)** Seja

$$A = \left\{ \frac{3}{\sqrt{n}} + 5^{-m} \mid m, n = 1, 2, \ldots \right\} \subset \mathbb{R}\,.$$

Determine todos os pontos de acumulação de $A$ em $\mathbb{R}$.

**Espelho da Questão 1**

Os pontos de acumulação são obtidos estudando-se todos os possíveis limites das sequências de pontos em $A$:

**(até 0,5)** Provar corretamente que todos os pontos da forma

$$\frac{3}{\sqrt{n}} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{5^m}$$

são pontos de acumulação de $A$.

**(até 0,25)** Provar corretamente que 0 é ponto de acumulação do conjunto.

**(até 0,25)** Argumentar corretamente que não existem outros pontos de acumulação além destes.

Portanto, o conjunto $A'$ dos pontos de acumulação de $A$ é a união seguinte:

$$A' = \{0\} \cup \left\{ \frac{3}{\sqrt{n}} \mid n \in \mathbb{N} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{5^m} \mid m \in \mathbb{N} \right\}\,.$$

2. **(2,0)** Seja $S = \{n_1, n_2, \ldots\}$ a coleção de todos os inteiros positivos que não contêm o dígito 0 em sua representação decimal. (Por exemplo, $7 \in S$ mas $101 \notin S$.) Mostre que $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ converge e tem soma menor que 90.

**Espelho da Questão 2**

Há mais de uma solução possível. Uma seria:

**(até 0,5)** Provar que cada um dos $d$ dígitos de um número deste tipo pode ser escolhido entre $\{1, 2, \ldots, 9\}$, logo há $9^d$ números com $d$ dígitos em $S$.

**(até 0,25)** Provar que todo número com $d$ dígitos é pelo menos $10^{d-1}$ (por exemplo, números de 3 dígitos são $\geq 100$).

**(até 1,0)** Comparar corretamente a série em questão com uma série geométrica apropriada para mostrar a convergência, justificando com referência aos resultados apropriados a validade das afirmações.

**(até 0,25)** Estabelecer que a soma é estritamente menor que 90.

3. Faça o que se pede:

   (a) **(1,0)** A função $f(x) = 2\sqrt{x} - x^3 - x^2$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio no intervalo $[0,1]$? Justifique a sua resposta.

   (b) **(1,0)** Mostre que a equação $1/\sqrt{x} - 3x^2 - 2x = 0$ possui uma solução no intervalo $(0,1)$.

**Espelho da Questão 3**

(a) **(1,0)** Sim, a função é contínua em $[0,1]$ e derivável em $(0,1)$.

(b) **(1,0)** $f(0) = f(1) = 0$ e $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} - 3x^2 - 2x, x \neq 0$. Pelo Teorema do Valor Médio existe $c \in (0,1)$ tal que $f'(c) = 0$.

**Espelho da Prova de Probabilidade**

1. Um sistema de segurança possui dois sensores, A e B, que disparam alertas independentemente quando uma ameaça é detectada. Quando há uma ameaça real, a probabilidade de o sensor A disparar é 0,8 e a do sensor B é 0,7. Quando não há ameaça, as probabilidades de falso alarme são 0,1 para A e 0,2 para B. Sabe-se que a probabilidade de uma ameaça estar presente é 0,05.

   (a) **(0,5)** Calcule a probabilidade de ambos os sensores dispararem.

   (b) **(0,5)** Dado que ambos os sensores dispararam, qual é a probabilidade de que seja uma ameaça real?

   (c) **(0,5)** Os eventos "sensor A dispara" e "sensor B dispara" são independentes? Justifique.

**Espelho da Questão 1**

(a) **(até 0,1)** Definir eventos: $R$: ameaça real, $A$: sensor A dispara, $B$: sensor B dispara.
**(até 0,1)** Calcular as independências condicionalis $P(A \cap B \mid R) = 0,8 \times 0,7 = 0,56$, $P(A \cap B \mid R^c) = 0,1 \times 0,2 = 0,02$.
**(até 0,3)** Calcular, usando o Teorema de Probabilidade total,

$$P(A \cap B) = 0,56 \times 0,05 + 0,02 \times 0,95,$$

para concuir que $P(A \cap B) = 0,047$.

(b) **(até 0,5)**Aplicar corretamente o Teorema de Bayes para concluir que

$$P(R \mid A \cap B) = \frac{0,028}{0,047} \approx 0,5957.$$

(c) **(até 0,1)** Calcular $P(A) = 0,8 \times 0,05 + 0,1 \times 0,95 = 0,135$.
**(até 0,1)** Calcular $P(B) = 0,7 \times 0,05 + 0,2 \times 0,95 = 0,225$.
**(até 0,3)** Verificar: $P(A)P(B) = 0,030375 \neq 0,047 = P(A \cap B)$ para concluir que os eventos não são independentes.

2. Seja $X$ uma variável aleatória com distribuição exponencial de média $1/\lambda$. Considere $Y = X + c$, onde $c > 0$ é uma constante

   (a) **(0,5)** Determine a função de distribuição acumulada de $Y$.

   (b) **(0,5)** Calcule $\mathbb{E}[Y]$ e $\mathrm{Var}(Y)$.

   (c) **(0,5)** Calcule a função taxa de falha de $Y$ e compare com a da distribuição exponencial.

**Espelho da Questão 2**

(a) **(até 0,2)** Denotar a função de distribuição acumulada de $Y$ em função de $X$ como $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(X \leq y - c)$.
**(até 0,3)** Concluir que para $y \geq c$, $F_Y(y) = 1 - e^{-\lambda(y-c)}$.

(b) **(até 0,25)** $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X] + c = \frac{1}{\lambda} + c$.
**(até 0,25)** $\mathrm{Var}(Y) = \mathrm{Var}(X) = \frac{1}{\lambda^2}$.

(c) **(até 0,1)** Definir a função taxa de falha: $h_Y(y) = \frac{f_Y(y)}{1-F_Y(y)}$.

**(até 0,4)** Concluir que para $y \geq c$, $f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda(y-c)}$, $1 - F_Y(y) = e^{-\lambda(y-c)}$, então $h_Y(y) = \lambda$ (constante).

3. Dois pontos $A$ e $B$ são escolhidos independente e uniformemente ao longo de um segmento de comprimento $L$. Seja $D = |A - B|$ a distância entre eles.

   (a) **(1,0)** Determine a função densidade de probabilidade de $D$.

   (b) **(0,5)** Calcule $\mathbb{E}[D]$.

   (c) **(0,5)** Calcule a probabilidade de que $D$ seja maior que a média $\mathbb{E}[D]$.

**Espelho da Questão 3**

(a) **(até 1,0)** Derivar, a partir da distribuição de A e de B, a distribuição de $D = |A - B|$ como

$$f_D(d) = \frac{2(L-d)}{L^2}, \quad 0 \leq d \leq L.$$

(b) **(até 0,5)** Calcular a média como $\mathbb{E}[D] = \int_0^L d \cdot \frac{2(L-d)}{L^2}\, \mathrm{d}d = \frac{2}{L^2}\left[L\frac{L^2}{2} - \frac{L^3}{3}\right] = \frac{L}{3}$.

(c) **(até 0,5)** Realizar os calculos como $P(D > \mathbb{E}[D]) = P\left(D > \frac{L}{3}\right) = \int_{L/3}^{L} \frac{2(L-d)}{L^2}\, \mathrm{d}d$. Usando mudança de variável $t = L - d$; conclua que $\int_0^{2L/3} \frac{2t}{L^2}\, \mathrm{d}t = \frac{4L^2/9}{L^2} = \frac{4}{9}$.