

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

EDITAL PRPGP/UFSM Nº 030, DE 29 DE SETEMBRO DE 2025.

Processo Seletivo 2026 - 2ª Janela.

Espelho da Prova Escrita - Julho 2026

Espelho da Prova de Álgebra Linear

1. Considere o sistema linear homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, onde A é a matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

e o conjunto

$$S_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4; x - y + z = 0\}.$$

- (a) **(0,3)** Mostre que S_1 é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$. Determine uma base e a dimensão de S_1 .
 - (b) **(0,4)** Resolva o sistema homogêneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. O conjunto solução do sistema é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$? Em caso afirmativo, determine uma base e a dimensão do conjunto solução.
 - (c) **(0,5)** Seja $S_2 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4, A\mathbf{x} = \mathbf{0}\}$. O conjunto $S_1 \cap S_2$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$? Em caso afirmativo, determine uma base e a sua dimensão.
 - (d) **(0,3)** Verifique se o vetor $\mathbf{b} = (1, 3, 5)$ pertence ao espaço gerado pelas colunas de A . Em caso afirmativo, determine todas as soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$.
 - (e) **(0,3)** Verifique o teorema da dimensão para a matriz A , ou seja, verifique que $\text{posto}(A) + \text{nulidade}(A) = \text{número de colunas de } A$.
2. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma transformação linear cuja representação matricial na base $\beta = \{(1, 1, 0), (1, -1, 0), (0, 0, -1)\}$ é dada por

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

- (a) **(0,4)** Encontrar as matrizes de mudança de base de β para a canônica e vice-versa ou calcular diretamente as coordenadas de $T(e_i)$ em combinação linear dos vetores $T(v_i)$ utilizando-se das colunas da base A .
- (b) **(0,4)** Calcular os autovalores e suas multiplicidades utilizando-se da matriz A , percebendo que não há necessidade de usar a representação canônica. Encontrar os autovetores no $\mathbb{R}^3$ e não suas coordenadas na base β .
- (c) **(0,3)** Calcular o determinante de A utilizando os autovalores, verificando assim que A é invertível. Concluir com isso que T é invertível, pois seu núcleo necessariamente é $\{(0, 0, 0)\}$ o que corresponde a ser injetora. Portanto, pelo teorema do núcleo e imagem, T é também sobrejetora.

- (d) **(0,5)** Encontrar a representação matricial de T^{-1} na base β , usando um método adequado para inversão de matrizes, invertendo a matriz A , ou de forma mais tradicional usando a base da imagem ($= \mathbb{R}^3$) : $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$.
3. Justifique detalhadamente a veracidade ou dê um contraexemplo para cada afirmação abaixo.
- (a) **(0,4)** O subespaço do espaço vetorial real das matrizes de ordem 2, gerado pelos vetores $\begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & -a \end{bmatrix}$ tem no máximo dimensão 3.
- (b) **(0,4)** Sistemas lineares possíveis com 5 incógnitas reais que possuem 6 equações sempre são indeterminados.
- (c) **(0,4)** Sejam $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ um operador linear e $\alpha = \{v_1, v_2, v_3\}$ uma base do espaço vetorial do espaço vetorial $\mathbb{R}^3$. T é diagonalizável se, e somente se, para cada i , existe um único j e certo λ_i real tal que
- $$T(v_i) = \lambda_i v_j.$$
- (d) **(0,4)** Sejam $n > 3$ e $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma transformação linear. Se $\ker T$ é isomorfo a um subespaço próprio do $\mathbb{R}^3$, então a dimensão da imagem de T é no máximo $n - 2$.

Espelho da Questão 1

- (a) **até (0,15)** Mostrar que: $\mathbf{0} \in S_1$, S_1 é fechado em relação a soma, S_1 é fechado em relação a multiplicação por escalar.
(até 0,15) Apresentar uma base e a dimensão de S_1 .
- (b) **(até 0,15)** Resolver o sistema homogêneo corretamente.
(até 0,15) Mostrar (mesmas condições do item (a)) que a solução do sistema homogêneo, $N(T)$, é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
(até 0,1) Apresentar uma base e a dimensão do subespaço.
- (c) **(até 0,2)** Obter $S_1 \cap S_2$.
(até 0,2) Mostrar (mesmas condições do item (a)) que $S_1 \cap S_2$ obtida no item anterior é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.
(até 0,1) Apresentar uma base e a dimensão do subespaço.
- (d) **(até 0,15)** Verificar que o vetor $\mathbf{b} = (1, 3, 5)$ é combinação linear das colunas da matriz A , ou mostrar que o sistema linear tem solução, justificando porque este resultado implica que $\mathbf{b} = (1, 3, 5) \in \mathcal{C}(A)$.
(até 0,15) Determinar todas as soluções do sistema não homogêneo.
- (e) **(até 0,3)** Verificar o teorema da dimensão, justificando o que é posto e nulidade de uma matriz.

Espelho da Questão 2

- (a) **(até 0,4)** Encontrar as matrizes de mudança de base de β para a canônica e vice-versa ou calcular diretamente as coordenadas de $T(e_i)$ em combinação linear dos vetores $T(v_i)$ utilizando-se das colunas da base A .

- (b) **(até 0,4)** Calcular os autovalores e suas multiplicidades utilizando-se da matriz A , percebendo que não há necessidade de usar a representação canônica. Encontrar os autovetores no $\mathbb{R}^3$ e não suas coordenadas na base β .
- (c) **(até 0,3)** Calcular o determinante de A utilizando os autovalores, verificando assim que A é invertível. Concluir com isso que T é invertível, pois seu núcleo necessariamente é $\{(0, 0, 0)\}$ o que corresponde a ser injetora. Portanto, pelo teorema do núcleo e imagem, T é também sobrejetora.
- (d) **(até 0,5)** Encontrar a representação matricial de T^{-1} na base β , usando um método adequado para inversão de matrizes, invertendo a matriz A , ou de forma mais tradicional usando a base da imagem ($= \mathbb{R}^3$) : $\{T(v_1), T(v_2), T(v_3)\}$.

Espelho da Questão 3

- (a) **(até 0,4)** Apresentar todos os cálculos que mostram que este conjunto de vetores é LD . Retirar um dos vetores que é combinação linear dos outros (por exemplo $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & -a \end{bmatrix}$) e finalmente, mostrar que o restante dos vetores formam um conjunto possivelmente LI conforme as escolhas de a e b : $a \leq 0$ e $b \neq 0$ é condição necessária e suficiente para que a dimensão do subespaço gerado seja 3, percebendo, portanto, que $a = 0$ ou $b = 0$, poderá fazer a dimensão do subespaço gerado cair.
- (b) **(até 0,4)** Observar que a afirmação é falsa, pois o que faz um sistema ser determinado ou indeterminado é o número de linhas não nulas após o escalonamento (o posto da matriz do sistema). Sistemas lineares possíveis com 5 incógnitas reais e 6 equações sempre são indeterminados.
- (c) **(até 0,4)** Perceber que a condição é suficiente, mas não necessária, apresentando um contraexemplo completo, com suas bases, suas representações, provando que, de fato, o operador é diagonalizável, sem necessariamente satisfazer as condições impostas pelas bases.
- (d) **(até 0,4)** Verificar as possíveis dimensões para o núcleo e, usando o Teorema do núcleo e da imagem, concluir quais dimensões a imagem de T pode alcançar. Feito isso, montar um contraexemplo completo, com todos os detalhes que mostram claramente que a dimensão pode ser maior que $n - 2$.

Espelho da Prova de Análise/Cálculo

1. **(2,0)** Seja a sequência (a_n) definida por $a_1 = 1$ e pela recorrência

$$a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{para } n \geq 1.$$

- (a) **(1,0)** Mostre que as subsequências de termos ímpares (a_{2n-1}) e de termos pares (a_{2n}) são ambas monótonas (uma crescente e outra decrescente) e limitadas.
- (b) **(0,5)** Deduza que a sequência original converge e determine o valor exato de $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$.
2. Seja $I = [0, 1]$. Um subconjunto $S \subset I$ é construído removendo-se deste intervalo o ponto médio $\frac{1}{2}$, depois os pontos médios $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$ dos intervalos restantes, e assim por diante. Seja $R \subseteq I$ o conjunto dos pontos assim removidos, de modo que $S = I - R$.

- (a) **(0,5)** Mostre que

$$R = \left\{ \frac{k}{2^n} : 1 \leq n \in \mathbb{N} \text{ e } 1 \leq k \leq 2^n \text{ ímpar} \right\}$$

- (b) **(0,5)** Determine o fecho $\overline{R}$ deste conjunto de pontos removidos.
- (c) **(0,5)** Descreva o melhor que conseguir a topologia do conjunto S dos pontos *não* removidos. Ele é aberto? É compacto? É fechado? É denso em I ? Explique.
3. Faça o que se pede:
- (a) **(1,0)** Suponha que $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável. Mostre que f' assume todos os valores entre $f'(a)$ e $f'(b)$.
- (b) **(1,0)** Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável tal que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f'(x) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = +1.$$

- (b.1) Prove que f' assume todo valor em $(-1, 1)$.
- (b.2) Mostre que f possui um ponto de mínimo global.

Espelho da Questão 1

- (a) **(até 1,0)** Mostrar corretamente (por indução) que as sequências são monótonas. Argumentar rigorosamente que são limitadas.
- (b) **(até 0,5)** Concluir a convergência de ambas as subsequências por serem monótonas e limitadas. Tomar o limite na equação de recursão para obter rigorosamente os seus limites, descartando a raiz negativa, e concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, justificando que os limites das subsequências pares e ímpares coincidirem implica na convergência da sequência como um todo.

Espelho da Questão 2

- (a) **(até 0,5)** Determinar corretamente, por indução, que em cada passo n , os pontos médios removidos dos 2^{n-1} subintervalos remanescentes formam o conjunto $R_n = \{k/2^n : k \text{ ímpar}, 1 \leq k \leq 2^n\}$. Observar que os R_n são dois a dois disjuntos (as frações $k/2^n$ com k ímpar já estão em forma irredutível) e concluir rigorosamente que $R = \bigcup_n R_n$ é o conjunto pedido.
- (b) **(até 0,5)** Identificar R como o conjunto dos racionais diádicos deste intervalo $(0, 1)$. Provar a densidade dos diádicos em $[0, 1]$ usando algum argumento envolvendo distância ou vizinhança.
- (c) **(até 0,5)** Justificar que S não é aberto, pois toda vizinhança de um ponto de S contém diádicos, que não pertencem a S . Justificar que S não é fechado nem compacto, pois $\bar{S} = I \neq S$. Justificar corretamente que S é denso em I .

Espelho da Questão 3

- (a) **(até 1,0)** Definir corretamente $\varphi(x) = f(x) - \gamma x$, para γ entre $f'(a)$ e $f'(b)$, e observar que φ , por ser contínua neste compacto $[a, b]$, atinge seu mínimo em algum $c \in [a, b]$; mostrar rigorosamente, a partir dos sinais de $\varphi'(a)$ e $\varphi'(b)$, que $c \neq a$ e $c \neq b$, isto é, que c é ponto interior; concluir que, sendo c um mínimo interior, $\varphi'(c) = 0$, ou seja, $f'(c) = \gamma$.
- (b.1) **(até 0,4)** Usar corretamente as hipóteses sobre os limites de f' em $\pm\infty$ para, dado $\gamma \in (-1, 1)$ arbitrário, obter $a < b$ com $f'(a) < \gamma < f'(b)$; aplicar rigorosamente o item (a) ao intervalo $[a, b]$ para concluir que f' assume o valor γ neste intervalo.
- (b.2) **(até 0,6)** Provar, via Teorema do Valor Médio, que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$; concluir corretamente a existência de um mínimo global, restringindo a análise a um compacto $[-K, K]$ apropriado e comparando com os valores fora deste.

Espelho da Prova de Probabilidade

1. Seja $\{A_k; k \in \mathbb{N}\}$ uma sequência de eventos.

(a) **(0,5)** Mostre que $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^{\infty} A_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_k)$;

(b) **(0,5)** Mostre que $\mathbb{P}(\cup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k)$.

(c) **(1,0)** Dez por cento da superfície de uma esfera S é colorida de azul, e o restante de vermelho. Mostre que, independentemente da maneira como as cores estão distribuídas, é possível inscrever um cubo em S com todos os seus vértices vermelhos.

2. Seja U uma variável aleatória com distribuição uniforme em $(0, 1)$. Seja $X = -\frac{1}{c} \log U$.

(a) **(0,5)** Mostre que X tem distribuição exponencial com parâmetro de escala c .

(b) **(1,0)** Seja A uma variável aleatória com distribuição uniforme em $(0, 1)$, independente de U . Seja $R = \sqrt{-2 \log U}$ e defina

$$X = R \cos(2\pi A), \quad Y = R \sin(2\pi A).$$

Mostre que X e Y são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com distribuição normal padrão.

3. Seja $X_1, X_2, \dots$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes tal que

$$\mathbb{P}[X_k = 2^k] = \frac{1}{2^k} \text{ e } \mathbb{P}[X_k = 0] = 1 - \frac{1}{2^k}.$$

(a) **(1,0)** Prove que o limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n, \quad \text{onde } \overline{X}_n := \frac{X_1 + \dots + X_n}{n},$$

existe quase certamente e encontre-o.

(b) **(0,5)** Observe que esta questão fornece um exemplo em que um limite existe como na Lei dos Grandes Números, mas as variáveis não possuem a mesma distribuição. Compare $\mathbb{E}[X_n]$ com a esperança do limite, caso ele exista.

Espelho da Questão 1

(a) **(até 0,5)** Transformar a união em uma união disjunta, definindo, por exemplo, $B_1 := A_1$ e $B_k = A_k \setminus (\cup_{i=1}^{k-1} A_i)$ para cada $k \geq 2$, e utilizar a aditividade enumerável e a inclusão $B_k \subset A_k$.

(b) **(até 0,5)** Definir os eventos $A_k = \emptyset$ para todo $k > n$ e utilizar o item (a); ou utilizar o princípio de indução matemática.

(c) **(até 1,0)** Tomar, uniformemente ao acaso, um cubo C inscrito na esfera S , numerar os vértices de C de 1 a 8 e definir, para cada $k \in \{1, \dots, 8\}$, o evento A_k em que o k -ésimo vértice é da cor azul; utilizar o item (b) para mostrar que a probabilidade de que C tenha pelo menos um vértice azul é estritamente menor do que 1 e concluir que a probabilidade do evento complementar é estritamente maior do que 0 e, portanto, é possível inscrever um cubo em S com todos os seus vértices vermelhos.

Espelho da Questão 2

- (a) **(até 0,5)** Mostrar que a função de distribuição de X é igual a função de distribuição de uma variável aleatória com distribuição exponencial com taxa c .
- (b) **(até 1,0)** Definir $\Theta = 2\pi A$ e verificar que Θ tem distribuição uniforme no intervalo $(0, 2\pi)$ e é independente de R ; calcular a densidade de R e utilizar coordenadas polares para obter a função de densidade conjunta do par (X, Y) , $f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2+y^2)/2}$; fatorar essa densidade como produto das densidades de duas variáveis aleatórias normais padrão, concluindo que X e Y são independentes e têm distribuição normal padrão.

Espelho da Questão 3

- (a) **(até 1,0)** Utilizar o Lema de Borel-Cantelli para verificar que, com probabilidade 1, apenas uma quantidade finita de X_k é diferente de 0 e concluir que, quase certamente, $X_k = 0$ para todo k suficientemente grande, e portanto $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n = 0$.
- (b) **(até 1,0)** Verificar que $\mathbb{E}[X_k] = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, e concluir que $\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[X_k] = 1$; concluir que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\overline{X}_n] = 1 \neq 0 = \mathbb{E}[\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{X}_n]$.