Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Grupo de Teoria da Matéria Condensada

Mecânica Quântica para Sistemas Fechados

Jonas Maziero

Santa Maria - RS, Abril de 2012

Referências

- A. Barletta, “An introduction to quantum mechanics $\cdots$ for those who dwell in the macroscopic world”, arXiv:1201.4234;
- M. G. A. Paris, “The modern tools of quantum mechanics. A tutorial on quantum states, measurements, and operations”, Eur. Phys. J. Special Topics **203**, 61 (2012);
- M. A. Nielsen e I. L. Chuang, *Quantum Information and Quantum Computation* (Cambridge University Press, Cambridge, 2000);
- A. F. R. de Toledo Piza, *Mecânica Quântica* (Edusp, São Paulo, 2009);
- A. Peres, *Quantum Theory: Concepts and Methods* (Kluwer Academic Publishers, New York, 2002).

Sumário $\pm\sigma$

- Mecânica Quântica para Sistemas Fechados
  - Postulados (Estados Puros)
    1. Postulado dos Estados: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}$;
    2. Postulado da Dinâmica: $|\psi(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi(t_0)\rangle$, $i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$, $U(t,t_0) = \exp(-i\hbar^{-1}\int_{t_0}^{t} H(t')dt')$;
    3. Postulado das Medidas: $O = O^\dagger = \sum_i o_i|o_i\rangle\langle o_i|$, $\mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle) = |(|o_i\rangle, |\psi\rangle)|^2$, $|\psi\rangle \xrightarrow{o_i} |o_i\rangle$;
  - Valor Médio de um Observável, $\langle O\rangle_{|\psi\rangle} = (|\psi\rangle, O|\psi\rangle)$;;
  - Relações de Incerteza de Heisenberg e de Schrödinger, $\det\Sigma(A,B)_{|\psi\rangle} \geq \left((2i)^{-1}\left(|\psi\rangle, [A,B]|\psi\rangle\right)\right)^2$;
  - Operador Densidade, $\rho = \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\psi_i\rangle|\psi_i\rangle^\dagger$;
  - Postulados (Mistura Estatística de Estados)
    1. Postulado dos Estados: $\rho \in L(\mathcal{H})$, $\rho \geq 0$, $\mathrm{tr}\rho = 1$;
    2. Postulado da Dinâmica: $\rho(t) = U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0)$, $i\hbar\partial_t\rho(t) = [H(t), \rho(t)]$;
    3. Postulado das Medidas: $\mathrm{pr}(o_i|\rho) = (|o_i\rangle, \rho|o_i\rangle) = \mathrm{tr}(\rho|o_i\rangle|o_i\rangle^\dagger)$, $\rho \xrightarrow{o_i} |o_i\rangle|o_i\rangle^\dagger$.

Postulados

1. Postulado dos Estados

Os possíveis estados de um sistema físico fechado correspondem a vetores normalizados $|\psi\rangle$ em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$.

Sistemas Compostos

(por mais de um objeto ou por mais de um grau de liberdade) são descritos por um vetor $|\psi^{ab\cdots}\rangle$ no espaço de Hilbert obtido através do produto tensorial $\mathcal{H}^{ab\cdots} = \mathcal{H}^a \otimes \mathcal{H}^b \otimes \cdots$ dos espaços de Hilbert de suas partes constituintes.

Princípio da Superposição

Se $|\psi_1\rangle$ e $|\psi_2\rangle$ são possíveis estados do sistema, então a combinação linear $c_1|\psi_1\rangle + c_2|\psi_2\rangle$ também é um estado admissível, onde $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ com $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$.

2. Postulado da Dinâmica

A dinâmica do estado de um sistema é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, se no tempo t_0 o estado do sistema é $|\psi(t_0)\rangle$ então num instante posterior t o estado do sistema é

$$|\psi(t)\rangle = U(t, t_0)|\psi(t_0)\rangle,$$

onde $U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbb{I}$.

Equação de Schrödinger

A dinâmica do estado do sistema é gerada pela equação de Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle,$$

onde

$$H(t) = \frac{p^2}{2m} + V(t) = H^\dagger(t)$$

é o operador Hamiltoniano (energia) do sistema.

Das Equações anteriores vemos que $U(t,t_0)$ deve satisfazer

$$i\hbar\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} = H(t)U(t,t_0).$$

Forma geral para $U(t,t_0)$

$$U(t,t_0) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')dt'\right).$$

Verificação.

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial U(t,t_0)}{\partial t} &= i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\exp\left(-\frac{i}{\hbar}\int_{t_0}^{t} H(t')dt'\right) \\ &= i\hbar\left(-\frac{i}{\hbar}\right)\left(\frac{\partial}{\partial t}\int_{t_0}^{t} H(t')dt'\right)U(t,t_0) \\ &= H(t)U(t,t_0) \end{aligned}$$

3. Postulado das Medidas

Quantidades observáveis são descritas por operadores Hermitianos

$$O = \sum_i o_i |o_i\rangle |o_i\rangle^\dagger,$$

ou seja, $o_i \in \mathbb{R}$. O conjunto de vetores $\{|o_i\rangle\}$ forma uma base ortonormal ($(|o_i\rangle, |o_j\rangle) = \delta_{ij}$) completa ($\sum_i |o_i\rangle|o_i\rangle^\dagger := \sum_i P_{o_i} = \mathbb{I}$) para o espaço de estados do sistema ($\mathcal{H}$).

Regra de Born. Se o estado do sistema é $|\psi\rangle$, a probabilidade de obter o resultado o_i em uma medida do observável O é dada por

$$\mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle) = |(|o_i\rangle, |\psi\rangle)|^2 = (|\psi\rangle, P_{o_i}|\psi\rangle).$$

Estado do Sistema Imediatamente Após a Medida

$$|\psi\rangle \xrightarrow{o_i} \frac{P_{o_i}|\psi\rangle}{||P_{o_i}|\psi\rangle||} = |o_i\rangle.$$

Repitibilidade. Se medirmos O novamente, imediatamente depois da primeira medida, obteremos o mesmo resultado, i.e., $\mathrm{pr}(o_i||o_i\rangle) = 1$.

Valore Médio de O

Para N preparações idênticas de um sistema no estado $|\psi\rangle$ e N medidas do observável O, o valor médio deste observável é dado por

$$
\begin{aligned}
\langle O\rangle_{|\psi\rangle} &= \sum_i o_i \mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle) \\
&= \sum_i o_i |(|o_i\rangle, |\psi\rangle)|^2 \\
&= \sum_i o_i (|o_i\rangle, |\psi\rangle)^* (|o_i\rangle, |\psi\rangle) \\
&= \sum_i o_i (|\psi\rangle, |o_i\rangle)(|o_i\rangle, |\psi\rangle) \\
&= \sum_i o_i |\psi\rangle^\dagger |o_i\rangle |o_i\rangle^\dagger |\psi\rangle \\
&= |\psi\rangle^\dagger (\sum_i o_i |o_i\rangle\langle o_i|) |\psi\rangle \\
&= (|\psi\rangle, O|\psi\rangle).
\end{aligned}
$$

Erro associado ao valor médio de O

O erro em relação ao valor médio de O pode ser estimado usando o **desvio padrão** (raiz da variância)

$$
\begin{aligned}
\Delta O_{|\psi\rangle} &= \sqrt{\langle (O - \langle O\rangle_{|\psi\rangle}\mathbb{I})^2\rangle_{|\psi\rangle}} \\
&= \sqrt{\sum_i (o_i - \langle O\rangle_{|\psi\rangle})^2 \mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle)} \\
&= \sqrt{\sum_i (o_i^2 - 2o_i\langle O\rangle_{|\psi\rangle} + \langle O\rangle^2_{|\psi\rangle})\mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle)} \\
&= \Bigg[\sum_i o_i^2 \mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle) - 2\langle O\rangle_{|\psi\rangle}\sum_i o_i \mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle) \\
&\qquad + \langle O\rangle^2_{|\psi\rangle}\sum_i \mathrm{pr}(o_i||\psi\rangle)\Bigg]^{1/2} \\
&= \sqrt{\langle O^2\rangle_{|\psi\rangle} - \langle O\rangle^2_{|\psi\rangle}}
\end{aligned}
$$

Relação de Incerteza de Heisenberg e de Schrödinger

Consideremos um sistema em um estado $|\psi\rangle$ e dois observáveis deste sistema representados por dois operadores Hermitianos $\tilde{A}$ e $\tilde{B}$. Se definirmos $A := \tilde{A} - \langle\tilde{A}\rangle_{|\psi\rangle}\mathbb{I}$ e $B := \tilde{B} - \langle\tilde{B}\rangle_{|\psi\rangle}\mathbb{I}$, da desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned}
(A|\psi\rangle, A|\psi\rangle)(B|\psi\rangle, B|\psi\rangle) &\geq |(A|\psi\rangle, B|\psi\rangle)|^2 \\
(|\psi\rangle, A^2|\psi\rangle)(|\psi\rangle, B^2|\psi\rangle) &\geq |(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle)|^2 \\
(\Delta\tilde{A}_{|\psi\rangle})^2(\Delta\tilde{B}_{|\psi\rangle})^2 &\geq (\mathrm{Re}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle))^2 + (\mathrm{Im}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle))^2 \\
&\geq (\mathrm{Im}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle))^2
\end{aligned}$$

Agora

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) &= (2i)^{-1}((|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) - (|\psi\rangle, AB|\psi\rangle)^*) \\
&= (2i)^{-1}((|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) - (AB|\psi\rangle, |\psi\rangle)) \\
&= (2i)^{-1}((|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) - (|\psi\rangle, BA|\psi\rangle)) \\
&= (2i)^{-1}(|\psi\rangle, (AB - BA)|\psi\rangle) \\
&= (2i)^{-1}(|\psi\rangle, [A, B]|\psi\rangle)
\end{aligned}$$

e

$$[A, B] = [\tilde{A}, \tilde{B}].$$

Assim

$$(\Delta\tilde{A}_{|\psi\rangle})^2(\Delta\tilde{B}_{|\psi\rangle})^2 \quad \geq \quad ((2i)^{-1}(|\psi\rangle, [\tilde{A}, \tilde{B}]|\psi\rangle))^2,$$

e com isso obtemos a

Relação de incerteza de Heisenberg

$$(\Delta\tilde{A}_{|\psi\rangle})(\Delta\tilde{B}_{|\psi\rangle}) \quad \geq \quad |(2i)^{-1}(|\psi\rangle, [\tilde{A}, \tilde{B}]|\psi\rangle)|$$

Temos também

$$\begin{aligned}
\mathrm{Re}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) &= 2^{-1}((|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) + (|\psi\rangle, AB|\psi\rangle)^*) \\
&= 2^{-1}((|\psi\rangle, AB|\psi\rangle) + (|\psi\rangle, BA|\psi\rangle)) \\
&= 2^{-1}(|\psi\rangle, \{A, B\}|\psi\rangle)
\end{aligned}$$

Então, de

$$(\Delta\tilde{A}_{|\psi\rangle})^2(\Delta\tilde{B}_{|\psi\rangle})^2 \quad \geq \quad (\mathrm{Re}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle))^2 + (\mathrm{Im}(|\psi\rangle, AB|\psi\rangle))^2,$$

obtemos a

Relação de incerteza de Schrödinger

$$(\Delta\tilde{A}_{|\psi\rangle})^2(\Delta\tilde{B}_{|\psi\rangle})^2 \quad \geq \quad (2^{-1}(|\psi\rangle, \{A, B\}|\psi\rangle))^2 + ((2i)^{-1}(|\psi\rangle, [\tilde{A}, \tilde{B}]|\psi\rangle))^2$$

que pode ser escrita como

$$\det \Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})_{|\psi\rangle} \geq ((2i)^{-1}(|\psi\rangle, [\tilde{A}, \tilde{B}]|\psi\rangle))^2,$$

onde a **matriz de covariância** é definida como

$$\Sigma(\tilde{A}, \tilde{B})_{|\psi\rangle} := \begin{bmatrix} (\Delta\tilde{A}_{|\psi\rangle})^2 & \mathrm{Cov}(\tilde{A}, \tilde{B})_{|\psi\rangle} \\ \mathrm{Cov}(\tilde{A}, \tilde{B})_{|\psi\rangle} & (\Delta\tilde{B}_{|\psi\rangle})^2 \end{bmatrix},$$

com a **covariância** dada por

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(\tilde{A}, \tilde{B})_{|\psi\rangle} &:= 2^{-1}(|\psi\rangle, \{A, B\}|\psi\rangle). \\ &= \langle(\tilde{A} - \langle\tilde{A}\rangle\mathbb{I})(\tilde{B} - \langle\tilde{B}\rangle\mathbb{I})\rangle_{|\psi\rangle} \end{aligned}$$

Operador Densidade

Incerteza no processo de preparação dos estados

Preparação			Medida de O		
$\mathrm{pr}(\lvert\psi_1\rangle)$	$\longrightarrow$	$\lvert\psi_1\rangle$		$\longrightarrow$	o_1
$\mathrm{pr}(\lvert\psi_2\rangle)$	$\longrightarrow$	$\lvert\psi_2\rangle$	$\lvert\psi_i\rangle$	$\longrightarrow$	o_2
	$\vdots$			$\longrightarrow$	$\vdots$

com

$$\sum_i \mathrm{pr}(\lvert\psi_i\rangle) = 1.$$

Para cada estado $|\psi_i\rangle$ do ensemble temos

$$\langle O\rangle_{|\psi_i\rangle} = (|\psi_i\rangle, O|\psi_i\rangle).$$

Então, para todo o ensemble, segue que

$$\begin{aligned}\langle O\rangle_{\{|\psi_i\rangle\}} &= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)\langle O\rangle_{|\psi_i\rangle} \\ &= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\psi_i\rangle^\dagger O|\psi_i\rangle\end{aligned}$$

Usamos uma base ortonormal $\{|\xi_j\rangle\}$ ($\sum_j |\xi_j\rangle|\xi_j\rangle^\dagger = \mathbb{I}$) e escrevemos

$$\begin{aligned}
\langle O\rangle_{\{|\psi_i\rangle\}} &= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\psi_i\rangle^\dagger(\sum_j |\xi_j\rangle|\xi_j\rangle^\dagger)O(\sum_k |\xi_k\rangle|\xi_k\rangle^\dagger)|\psi_i\rangle \\
&= \sum_{i,j,k} \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\xi_k\rangle^\dagger|\psi_i\rangle|\psi_i\rangle^\dagger|\xi_j\rangle(|\xi_j\rangle, O|\xi_k\rangle) \\
&= \sum_j |\xi_j\rangle^\dagger O(\sum_k |\xi_k\rangle|\xi_k\rangle^\dagger) \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\psi_i\rangle|\psi_i\rangle^\dagger|\xi_j\rangle \\
&:= \sum_j |\xi_j\rangle^\dagger O\rho|\xi_j\rangle \\
&= \sum_j (O\rho)_{jj} \\
&= \mathrm{tr}(O\rho) \\
&:= \langle O\rangle_\rho,
\end{aligned}$$

onde definimos o operador densidade como

$$\rho := \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\psi_i\rangle|\psi_i\rangle^\dagger$$

Propriedades do Operador Densidade

- $\mathrm{tr}\rho = 1$, i.e., o operador densidade tem traço um.

  Prova. Vamos escrever $|\psi_i\rangle$ em termos de uma base ortonormal $\{|\phi_j\rangle\}$: $|\psi_i\rangle = \sum_j c_j|\phi_j\rangle$ com $\sum_j |c_j|^2 = 1$. Assim

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\rho &= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)\mathrm{tr}(|\psi_i\rangle|\psi_i\rangle^\dagger) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)\mathrm{tr}(\sum_j c_j|\phi_j\rangle \sum_j c_j^*|\phi_j\rangle^\dagger) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle) \sum_j \sum_k c_j c_k^* \mathrm{tr}(|\phi_j\rangle|\phi_k\rangle^\dagger) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle) \sum_j \sum_k c_j c_k^* (|\phi_k\rangle, |\phi_j\rangle) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle) \sum_j |c_j|^2 \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle) \\
&= 1
\end{aligned}
$$

- $\rho \geq 0 \Rightarrow \rho = \rho^\dagger$, i.e., o operador densidade é positivo.

  Prova. Dado um vetor qualquer $|\xi\rangle$ temos

$$
\begin{aligned}
(|\xi\rangle, \rho|\xi\rangle) &= (|\xi\rangle, \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|\psi_i\rangle|\psi_i\rangle^\dagger|\xi\rangle) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)(|\psi_i\rangle, |\xi\rangle)(|\xi\rangle, |\psi_i\rangle) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i\rangle)|(|\psi_i\rangle, |\xi\rangle)|^2 \geq 0.
\end{aligned}
$$

- $\mathrm{tr}\rho^2 \leq 1$.

  Prova. ρ é Hermitiano e portanto pode ser diagonalizado em uma base ortonormal: $\rho = \sum_i r_i|r_i\rangle|r_i\rangle^\dagger$ com $0 \leq r_i \leq 1$. Com isso

$$
\begin{aligned}
\mathrm{tr}\rho^2 &= \mathrm{tr}((\sum_i r_i|r_i\rangle|r_i\rangle^\dagger)(\sum_i r_j|r_j\rangle|r_j\rangle^\dagger)) = \sum_{i,j} r_i r_j \mathrm{tr}|r_i\rangle|r_i\rangle^\dagger|r_j\rangle|r_j\rangle^\dagger \\
&= \sum_{i,j} r_i r_j (|r_i\rangle, |r_j\rangle)\mathrm{tr}(|r_i\rangle|r_j\rangle^\dagger) = \sum_{i,j} r_i r_j \delta_{ij} \mathrm{tr}(|r_i\rangle|r_j\rangle^\dagger) \\
&= \sum_i r_i^2 \leq 1
\end{aligned}
$$

1'. Postulado do Estados

Os possíveis estados de um sistema físico correspondem a operadores lineares positivos de traço um (operadores densidade) em um espaço de Hilbert $\mathcal{H}$, i.e., $\rho \in L(\mathcal{H})$ com $\rho \geq 0$ e $\mathrm{tr}\rho = 1$.

Sistemas Compostos

são descritos por um operador densidade $\rho^{ab\cdots} \in L(\mathcal{H}^a \otimes \mathcal{H}^b \otimes \cdots)$, com $\rho^{ab\cdots} \geq 0$ e $\mathrm{tr}\rho^{ab\cdots} = 1$.

2'. Postulado da Dinâmica

A dinâmica do estado de um sistema é descrita por uma transformação unitária. Ou seja, se no tempo t_0 o estado do sistema é $\rho(t_0)$ então num instante posterior t o estado do sistema é

$$\rho(t) = U(t, t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t, t_0),$$

onde $U(t, t_0)U^\dagger(t, t_0) = U^\dagger(t, t_0)U(t, t_0) = \mathbb{I}$.

Se o estado inicial do sistema é

$$\rho(t_0) = \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)|\psi_i(t_0)\rangle|\psi_i(t_0)\rangle^\dagger$$

e os estados do ensemble evoluem unitariamente, i.e.,

$$|\psi_i(t)\rangle = U(t,t_0)|\psi_i(t_0)\rangle,$$

então

$$\begin{aligned}
\rho(t) &= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)|\psi_i(t)\rangle|\psi_i(t)\rangle^\dagger \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)U(t,t_0)|\psi_i(t_0)\rangle(U(t,t_0)|\psi_i(t_0)\rangle)^\dagger \\
&= U(t,t_0)\sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)|\psi_i(t_0)\rangle|\psi_i(t_0)\rangle^\dagger U^\dagger(t,t_0) \\
&= U(t,t_0)\rho(t_0)U^\dagger(t,t_0).
\end{aligned}$$

Equação de Liouville-von Neumann

A equação de movimento para o operador densidade é dada por

$$i\hbar\partial_t\rho(t) = [H(t), \rho(t)],$$

onde $\partial_t := \frac{\partial}{\partial t}$.

Verificação. Da Eq. de Schrödinger temos que $i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle = H(t)|\psi(t)\rangle$ e assim que $-i\hbar\partial_t|\psi(t)\rangle^\dagger = |\psi(t)\rangle^\dagger H(t)$. Com isso

$$\begin{aligned}
i\hbar\partial_t\rho(t) &= i\hbar\partial_t(\sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)|\psi_i(t)\rangle|\psi_i(t)\rangle^\dagger) \\
&= i\hbar\sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)((\partial_t|\psi_i(t)\rangle)|\psi_i(t)\rangle^\dagger + |\psi_i(t)\rangle(\partial_t|\psi_i(t)\rangle^\dagger)) \\
&= \sum_i \mathrm{pr}(|\psi_i(t_0)\rangle)(H(t)|\psi_i(t)\rangle|\psi_i(t)\rangle^\dagger - |\psi_i(t)\rangle|\psi(t)\rangle^\dagger H(t)) \\
&= H(t)\rho(t) - \rho(t)H(t) \\
&= [H(t), \rho(t)]
\end{aligned}$$

3'. Postulado das Medidas

Quantidades observáveis são descritas por operadores Hermitianos

$$O = \sum_i o_i |o_i\rangle\langle o_i|.$$

O conjunto de vetores $\{|o_i\rangle\}$ forma uma base ortonormal ($(|o_i\rangle, |o_j\rangle) = \delta_{ij}$) completa ($\sum_i |o_i\rangle|o_i\rangle^\dagger := \sum_i P_{o_i} = \mathbb{I}$) para o espaço de estados do sistema ($\mathcal{H}$).

Regra de Born. Se o estado do sistema é ρ, a probabilidade de obter o resultado o_i em uma medida do observável O é dada por

$$\mathrm{pr}(o_i|\rho) = (|o_i\rangle, \rho|o_i\rangle) = \mathrm{tr}(\rho P_{o_i}).$$

Estado do Sistema Imediatamente Após a Medida

$$\rho \xrightarrow{o_i} |o_i\rangle|o_i\rangle^\dagger.$$

Repitibilidade. Se medirmos O novamente imediatamente depois da primeira medida obteremos o mesmo resultado, i.e., $\mathrm{pr}(o_i||o_i\rangle) = 1$.

Nós temos que

$$\rho = \sum_j \mathrm{pr}(|\psi_j\rangle)|\psi_j\rangle|\psi_j\rangle^\dagger.$$

Então, se o estado preparado foi $|\psi_j\rangle$, segue da regra de Born que a probabilidade de obter o valor o_i em uma medida do observável O é

$$\mathrm{pr}(o_i||\psi_j\rangle) = |(|o_i\rangle, |\psi_j\rangle)|^2 = |o_i\rangle^\dagger|\psi_j\rangle|\psi_j\rangle^\dagger|o_i\rangle.$$

Assim

$$\begin{aligned}
\mathrm{pr}(o_i|\rho) &= \sum_j \mathrm{pr}(|\psi_j\rangle)\mathrm{pr}(o_i||\psi_j\rangle) \equiv \sum_j \mathrm{pr}(|\psi_j\rangle, o_i) \\
&= \sum_j \mathrm{pr}(|\psi_j\rangle)|o_i\rangle^\dagger|\psi_j\rangle|\psi_j\rangle^\dagger|o_i\rangle \\
&= |o_i\rangle^\dagger \sum_j \mathrm{pr}(|\psi_j\rangle)|\psi_j\rangle|\psi_j\rangle^\dagger|o_i\rangle \\
&= |o_i\rangle^\dagger \rho|o_i\rangle = (|o_i\rangle, \rho|o_i\rangle) = \mathrm{tr}(\rho P_{o_i})
\end{aligned}$$