UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA - RS

GRUPO PET MATEMÁTICA DA UFSM

Funções com o Winplot

Antonio Carlos Lyrio Bidel
Luana Kuister Xavier
Rodrigo Guerch Rosin
Vagner Weide Rodrigues

2013

Conteúdo

Capítulo 1

Introdução ao Winplot

1.1 História do Winplot

O Winplot foi desenvolvido pelo professor Richard Parris, da Philips Exeter Academy (EUA), por volta de 1985. Escrito em linguagem C, chamava-se PLOT e rodava no antigo DOS. O programa foi rebatizado quando foi lançado o Windows 3.1. A versão para Windows 98 surgiu em 2001 e está escrita em linguagem C++.

Além do português (traduzido por Adelmo Ribeiro de Jesus, professor Bahiano), o software está disponível em mais 13 idiomas.

O Winplot é um bom plotador de gráficos e, apesar de não possuir uma interface gráfica tão sofisticada como outros softwares, como GeoGebra e Maple, possibilita um manuseio fácil e rápido. Além disso, é um programa "leve" e funciona em praticamente qualquer computador.

1.2 Instalação

O *link* para baixar o Winplot pode ser encontrado no site do PET Matemática na aba downloads (www.ufsm.br/petmatematica). No site que você será direcionado, encontrará diferentes versões do software - uma em cada idioma.

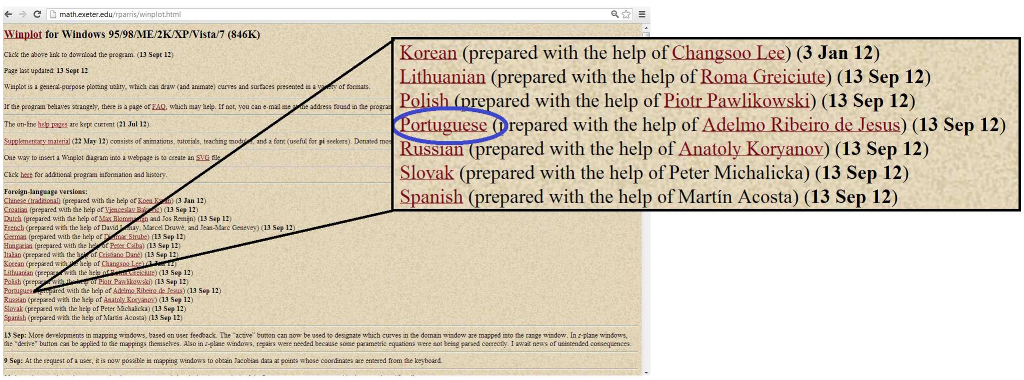


Figura 1.1: Em detalhe, ícone para fazer download do software

Para iniciar o download, basta clicar no ícone "Portuguese", como mostra a Figura 1.1.

Após o término da instalação, abra o arquivo e clique em "Unzip", como mostra a Figura 1.2.

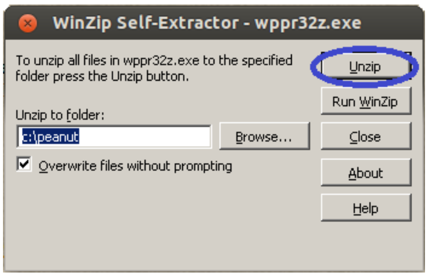


Figura 1.2: Em destaque, o botão "Unzip"

Feito isto, será criado no diretório (no caso da Figura 1.3, é a pasta c:\peanut , circulada em azul) um ícone para abrir o software. Vá até a pasta e dê dois cliques no ícone "Winplotpr" pra abrir o programa.

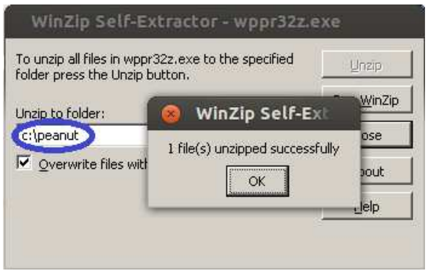


Figura 1.3: Janela após extraído o arquivo.

1.3 Apresentação da Interface

Ao abrir o programa, a janela mostrada na Figura 1.4 deverá aparecer.

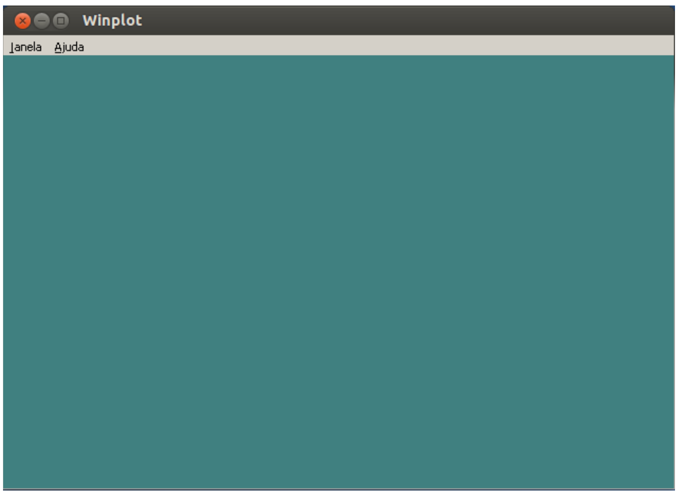


Figura 1.4: Janela inicial

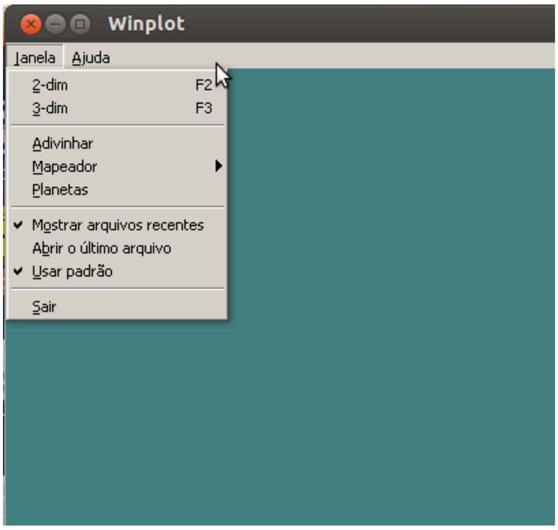


Figura 1.5: Aba janela

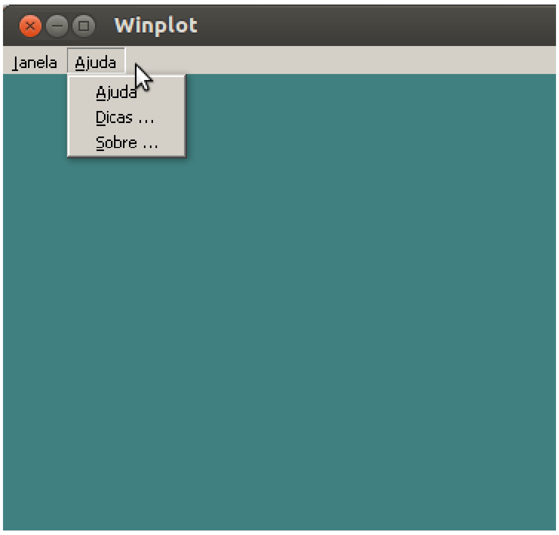


Figura 1.6: Aba ajuda

No menu principal, você encontrará as abas **Janela** e **Ajuda**.
Na aba **Janela** (Figura 1.5), você encontrará os seguintes opções:

- **2-dim**: Permitirá você trabalhar no plano, ou seja, em apenas duas dimensões.
- **3-dim**: Permitirá você trabalhar no espaço, ou seja, em três dimensões.
- **Adivinhar**: Atividade que consiste em adivinhar a equação da função cujo gráfico está plotado na tela.
- **Mapeador**: Opção que permite trabalhar com transformações lineares no plano.
- **Mostrar arquivos recentes**: Para mostrar os arquivos recentes.
- **Abrir o último arquivo**: Se a opção estiver marcada, o Winplot abrirá automaticamente o último arquivo utilizado.
- **Usar padrão**: Usar configurações padrão do Winplot.
- **Sair**: Sair do Winplot.

Na aba **Ajuda** (Figura 1.6), encontraremos as seguintes opções:

- **Ajuda**: Algumas observações gerais.
- **Dicas**: A caixa "você sabia que..." é aberta novamente, apresentando uma nova dica.
- **Sobre**: Apresentará as características do software.

Durante o estudo, não iremos dar enfoque ao recurso Mapeador, já que nosso objetivo é trabalhar com funções mais elementares através da união do algébrico com o geométrico.

Capítulo 2

Revisão de funções

O objetivo do capítulo é fazer uma breve revisão sobre funções. Ao final do capítulo, o aluno deverá compreender os principais conceitos de função, seu domínio, imagem e contradomínio, crescimento e decrescimento, bem como identificar funções injetoras, sobrejetoras, bijetoras, pares e ímpares.

2.1 O que é uma função?

Uma **função** é uma relação particular entre conjuntos. Observemos a relação $f : A \to B$, representada pelo diagrama abaixo.

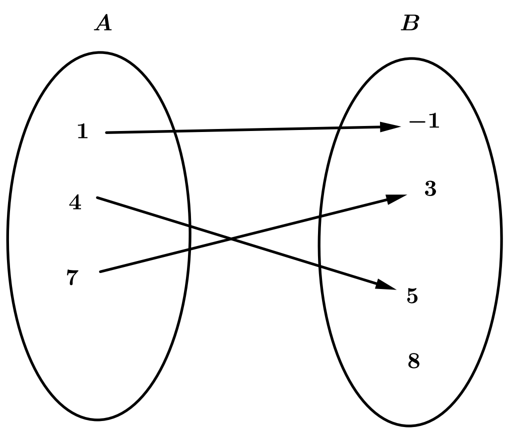


Figura 2.1: Função $f : A \to B$

Note que todo elemento de A está associado através de f a um **único** elemento de B. Esta propriedade caracteriza uma **função**.

Façamos rapidamente um estudo das quatro relações da Figura 2.2, a fim de fixarmos melhor o que significa uma relação ser função.

Exemplo 1

- *Na relação 1, percebemos que o primeiro elemento de A se relaciona com dois elementos de B — o que não caracteriza uma função, pois todo elemento de A deve estar associado a apenas um* ***único*** *elemento de B.*

- *Na relação 2, há um elemento de C que não se relaciona com nenhum elemento de D. Por definição, a relação não é uma função.*

- *Na relação 3, percebemos que todos elementos do conjunto E estão associados a um único elemento de F. Por mais que estejam sobrando elementos em F, a relação é uma função. Note que a definição determina que todo elemento do conjunto de partida deve estar associado a um único elemento do conjunto de chegada. Como no exemplo 3, os três elementos do conjunto E estão associados com o mesmo elemento de F, garantindo, mesmo assim, uma função.*

- *Na relação 4, todo elemento de G esta associado a um único elemento de H. Portanto, a relação é função.*

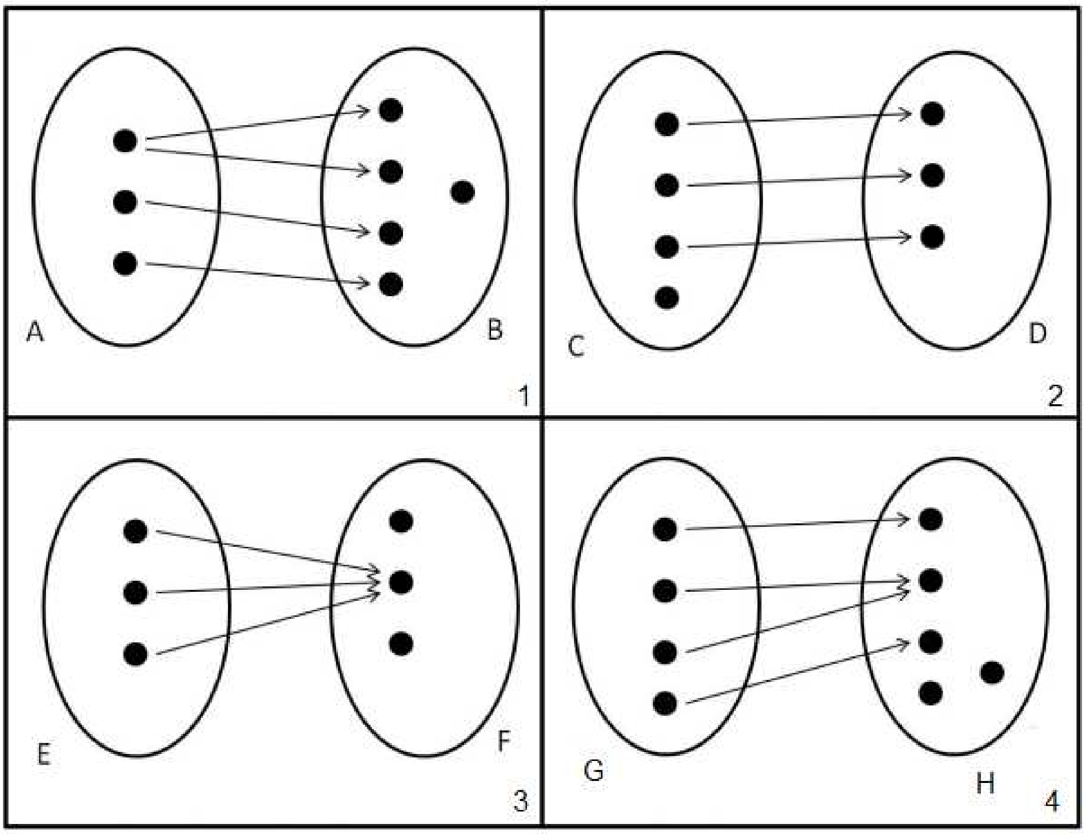


Figura 2.2: Exemplos

2.2 Domínio, Imagem e Contradomínio

Definição 1 *O conjunto A é chamado de domínio da função e denota-se por $D(f) = A$. O contradomínio da função é o conjunto $B = CD(f)$ que contém todos os números que podem, eventualmente, ser relacionados aos elementos do domínio via $f(x)$. A imagem da função é o conjunto de valores $f(x)$ quando x varia no domínio de f. Denotamos a imagem da função por $Im(f)$.*

Exemplo 2 *Vamos identificar no diagrama abaixo o domínio, a imagem e o contradomínio da função $f : A \to B$:*

Neste caso, temos:
$D(f) = A = \{-2, 0, 1, 4\}$
$Im(f) = \{-1, 1, 8, 11\}$
$CD(f) = B = \{-1, 1, 3, 5, 8, 11\}$

Exemplo 3 *Seja* $f(x) = x^2$ *uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

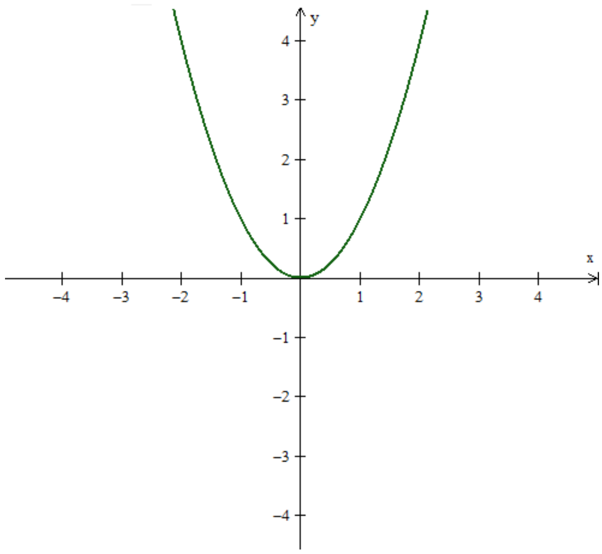


Figura 2.3: Gráfico de $f(x) = x^2$

Através do gráfico ou da definição da função f*, temos que ela está definida para todo* $x \in \mathbb{R}$*. Daí,* $D(f) = \mathbb{R}$ *e* $Im(f) = \mathbb{R}_+$*. O contradomínio da função será todo o conjunto dos números reais, ou seja,* $CD(f) = \mathbb{R}$*.*

2.3 Injetora, sobrejetora e bijetora

2.3.1 Injetora

Uma função $f : X \to Y$ chama-se **injetiva** quando elementos diferentes em X são transformados por f em elementos diferentes em Y. Ou seja, f é injetiva quando

$$x \neq x' \text{ em } X \Longrightarrow f(x) \neq f(x')$$

Exemplo 4

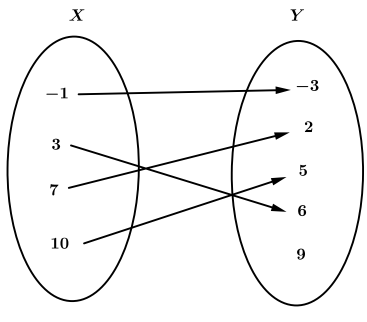


Figura 2.4: Função injetora

2.3.2 Sobrejetora

Diz-se que uma função $f : X \to Y$ é **sobrejetiva** quando, para qualquer elemento $y \in Y$, pode-se encontrar (pelo menos) um elemento $x \in X$ tal que $f(x) = y$.

Exemplo 5

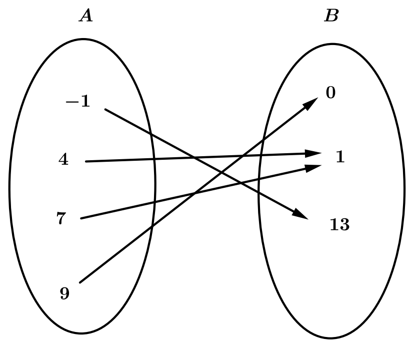


Figura 2.5: Função sobrejetora

2.3.3 Bijetora

Uma função $f : X \to Y$ chama-se uma **bijeção** ou uma **correspondência biunívoca** entre X e Y quando é ao mesmo tempo injetiva e sobrejetiva.

Exemplo 6

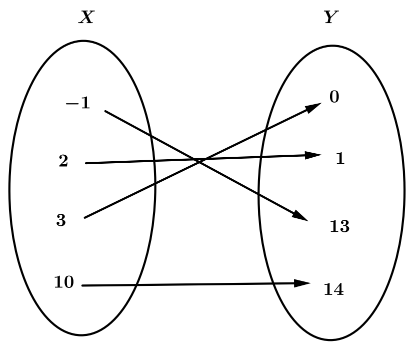


Figura 2.6: Função bijetora

2.4 Crescimento e decrescimento de funções

Definição 2 *Uma função é dita* ***crescente*** *sempre que dados $x_2 > x_1$, ambos pertencentes ao domínio de f, teremos $f(x_2) \geq f(x_1)$.*

Exemplo 7 *O gráfico abaixo é um exemplo de função crescente.*

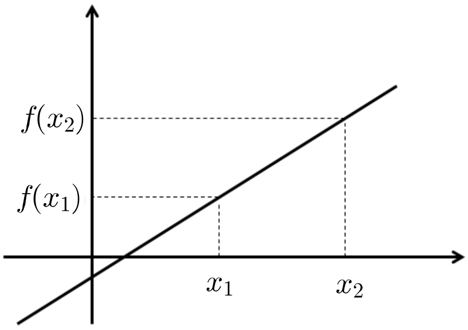


Figura 2.7: $x_2 > x_1$ e $f(x_2) \geq f(x_1)$, portanto crescente.

Definição 3 *Uma função é dita* ***decrescente*** *sempre que dados $x_2 > x_1$, ambos pertencentes ao domínio de f, teremos $f(x_2) \leq f(x_1)$.*

Exemplo 8 *O gráfico abaixo é um exemplo de função decrescente.*

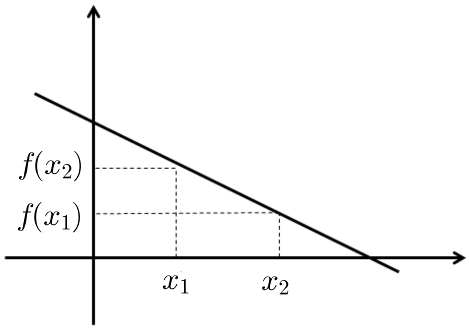


Figura 2.8: $x_2 > x_1$ e $f(x_2) \leq f(x_1)$, portanto decrescente.

Observação 1 *É importante observarmos que existem funções que são crescentes em um intervalo do domínio e decrescentes em outro. A função $f(x) = x^2$ (Figura 2.9), por exemplo, é decrescente no intervalo $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty)$.*

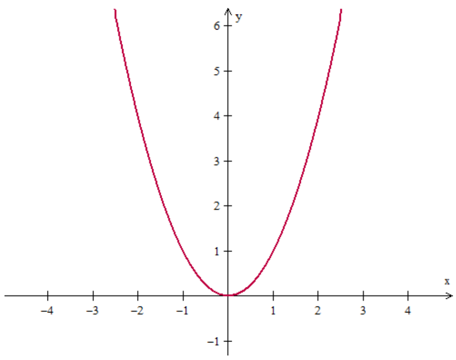


Figura 2.9: Derescente em $(-\infty, 0]$ e crescente em $[0, +\infty)$.

2.5 Funções pares e ímpares

Definição 4 *Uma função f é dita par se, para todo $x \in D(f)$, então $-x \in D(f)$ e*

$$f(-x) = f(x)$$

Definição 5 *Uma função f é dita ímpar se, para todo $x \in D(f)$, então $-x \in D(f)$ e*

$$f(-x) = -f(x)$$

Observação 2 *Analisando geometricamente tais funções, notamos que a função par é simétrica em relação ao eixo y, enquanto que a função ímpar é simétrica em relação a origem do sistema de coordenadas.*

Exemplo 9 *A função $f(x) = 3x^5 + x^3$ é ímpar, pois analiticamente temos:*

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3(-x)^5 + (-x)^3 \\ &= -3x^5 - x^3 \\ &= -(3x^5 + x^3) \\ &= -f(x) \end{aligned}$$

E geometricamente (Figura 2.10), percebemos a simetria do gráfico da função $f(x) = 3x^5+x^3$ em relação à origem do sistema cartesiano.

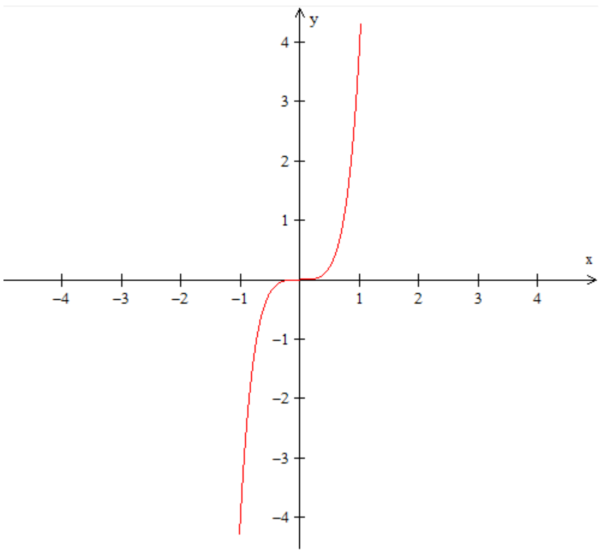


Figura 2.10: Gráfico da função $f(x) = 3x^5 + x^3$

2.6 Exercícios

Exercício 1 *Determine o domínio da função* $f(x) = \dfrac{\sqrt{x-4}}{x^2-49}$.

Exercício 2 *Determine o domínio da função* $f(x) = \dfrac{3}{x} + \dfrac{5}{x^2-1} + \sqrt{x+3}$.

Exercício 3 *Analise graficamente o domínio e a imagem das seguintes funcões:*

a) $3^x + 1$

b) $1 - ln(x)$

c) $\dfrac{1}{1+\sqrt{x}}$

Exercício 4 *Verifique se as funções a seguir são bijetoras.*

a) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $g(x) = x^2$

b) $h : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $h(x) = x^2$

c) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^3$

d) $\psi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\psi(x) = \sqrt{x}$

e) $\phi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $\phi(x) = \dfrac{2}{x+1}$

Exercício 5 *Verifique gráfica e analiticamente se as funções abaixo são pares ou ímpares.*

a) $f(x) = 2x$

b) $f(x) = 3^x$

c) $f(x) = x^4 + x^2$

Capítulo 3

Funções elementares

O objetivo do capítulo é revisar as principais funções de 1º grau. Ou seja, será abordado tópicos como Função Afim, Função Linear, Função Modular, Equação Modular, Função Inversa, Função Composta e Inequações do 1º grau. Ainda, o aluno aprenderá a plotar tais funções no software Winplot, além de manusear algumas ferramentas que auxiliam para a análise das funções.

3.1 Função Afim

Definição 6 *Uma função* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *chama-se* ***afim*** *quando existem constantes* a *e* b *reais,* $a \neq 0$*, tais que*

$$f(x) = ax + b$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*. O coeficiente* a *é chamado* ***coeficiente angular*** *e* b *é chamado* ***coeficiente linear****.*

Winplot - Plotando funções

Para plotar uma função no Winplot, iremos em **janela** ▶ **2-dim** ▶ **Equação** ▶ **Explícita**. A janela mostrada na Figura 3.1 irá aparecer. Em **f(x)** escreveremos nossa função. Se selecionarmos a caixa **travar intervalo**, poderemos restringir o intervalo da nossa função em **x mín** e **x máx**. Em **espessura da linha**, quanto maior o número, mais espessa será a linha do gráfico da função plotada. Em **densidade**, quanto maior o número, mais pontos da função serão plotados. Para alterar a cor do gráfico, clicamos em **cor**. Por fim, para plotarmos a função, clicamos em **ok**.

Figura 3.1: Janela para equação explícita.

Após plotada a função, a janela **Inventário** será aberta (Figura 3.2). Nesta janela poderemos utilizar diversas ferramentas, embora não iremos abordar todas elas nesta apostila. Vejamos, a seguir, a função de algumas destas ferramentas:

Figura 3.2: Janela Inventário

- **editar**: abrirá novamente a janela para equação explícita (Figura 3.1) para editar a função selecionada.
- **apagar**: apagará a função selecionada.
- **dupl**: abrirá a janela para equação explícita para plotar outra função (as funções plotadas anteriormente não serão alteradas).
- **copiar**: copiará a equação da função selecionada.
- **família**: plotará uma família de funções (este comando será melhor abordado no Capítulo 8).
- **gráfico**: o gráfico da função selecionada será escondido. Para fazê-lo reaparecer, basta selecionar a equação e clicar novamente em **gráfico**.
- **equação**: mostrará a equação da função plotada na janela **2-dim**.
- **nome**: permite nomear a função.
- **|f(x)|:** plotará o módulo da função selecionada (este comando será melhor abordado na seção Função Modular).
- **fechar**: fechará a janela Inventário.

3.1.1 Zero da função

Chama-se **zero** ou **raiz** da função afim o valor de x para o qual $f(x) = 0$. Assim,

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ ax + b &= 0 \\ ax &= -b \\ x &= \frac{-b}{a} \end{aligned}$$

O gráfico da função afim é uma reta não perpendicular ao eixo Ox e intercepta este eixo exatamente no ponto $\left(\frac{-b}{a}, 0\right)$.

Portanto, a raiz da função $f(x) = ax + b$ é $x = \frac{-b}{a}$.

3.1.2 Crescimento e decrescimento da função

Sendo $f(x) = ax + b$, temos que:

- Se $a > 0$, então a função será crescente e seu gráfico será do tipo:

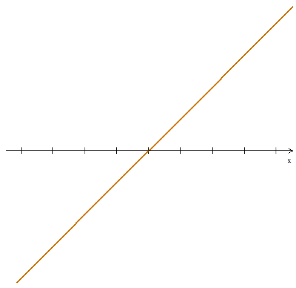


Figura 3.3: Função afim crescente.

- Se $a < 0$, então a função será decrescente e seu gráfico será do tipo:

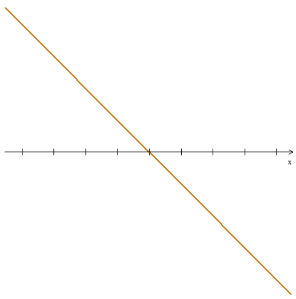
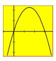


Figura 3.4: Função afim decrescente.



Winplot - Animação

O software Winplot disponibiliza uma ferramenta para animar funções de acordo com determinado parâmetro. Ao plotarmos uma função, podemos definir parâmetros utilizando letras do alfabeto (além das variáveis). Após plotada a função, na janela **2-dim**, vamos em **anim ▶ Individuais** e selecionamos a letra a qual definimos como parâmetro. Uma nova janela (Figura) será aberta e, nela, iremos limitar a variação do parâmetro. Na caixa de texto, colocamos o valor mínimo de variação e então clicamos em **def L**. Novamente na caixa de texto, colocamos o valor máximo de variação e clicamos em **def R**. Movimentando, agora, a barra de rolagem, perceberemos no plano o gráfico da função enquanto se varia o parâmetro previamente determinado.

Podemos, ainda, fazer com que o Winplot anime automaticamente a função. Para isto, clicamos em **auto rev** ou **auto cícl**. Para aumentar ou diminuir a velocidade da animação, pressionamos lentamente as teclas **R** e **L**, respectivamente. Para pausar a animação, pressionamos a tecla **P**, e para sair da animação pressionamos a tecla **S**.

Figura 3.5: Janela para definir a variação do parâmetro

3.1.3 Análise do sinal da função

Para analisar o sinal de uma função afim $f(x) = ax + b$, devemos conhecer o sinal do coeficiente angular (ou taxa de variação) e sua raiz.

Para o caso $a > 0$ (Figura 3.6), temos:

- $f(x) > 0$ sempre que $x > \dfrac{-b}{a}$.
- $f(x) = 0$ sempre que $x = \dfrac{-b}{a}$.
- $f(x) < 0$ sempre que $x < \dfrac{-b}{a}$.

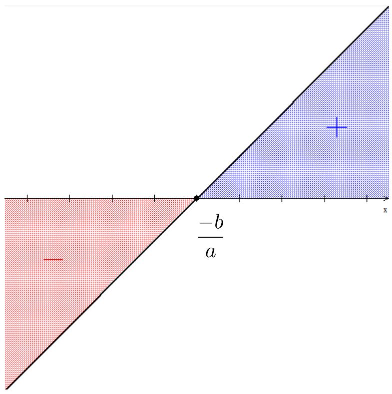


Figura 3.6: Caso $a > 0$

Para o caso $a < 0$ (Figura 3.7), temos:

- $f(x) > 0$ sempre que $x < \dfrac{-b}{a}$.
- $f(x) = 0$ sempre que $x = \dfrac{-b}{a}$.

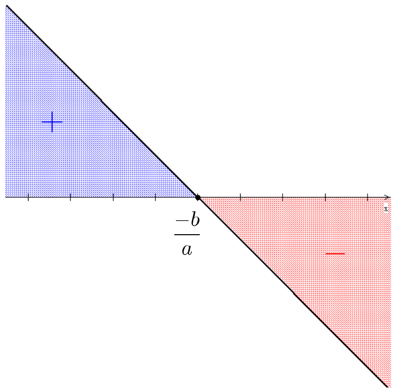


Figura 3.7: Caso $a < 0$

- $f(x) < 0$ sempre que $x > \dfrac{-b}{a}$.

Exemplo 10 *Seja a função afim $f(x) = (p+2)x+3$. Para quais valores de p, $f(x)$ é crescente?*

Como vimos, para uma função afim ser crescente, o coeficiente angular (isto é, o coeficiente que acompanha a variável x) deve ser positivo.

No caso, o coeficiente angular de $f(x)$ é $p+2$.

Como queremos que a função seja crescente, então

$$\begin{aligned} p+2 &> 0 \\ p &> -2 \end{aligned}$$

3.2 Função Linear

Uma função de primeiro grau é dita **linear** sempre que $b = 0$. Ou seja, $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é definida como

$$f(x) = ax$$

Como a função linear é apenas um caso particular da função afim, o crescimento e decrescimento dela continua sendo determinado pelo sinal do coeficiente angular.

Note que o gráfico da função linear **sempre** passa pela origem do sistema cartesiano.

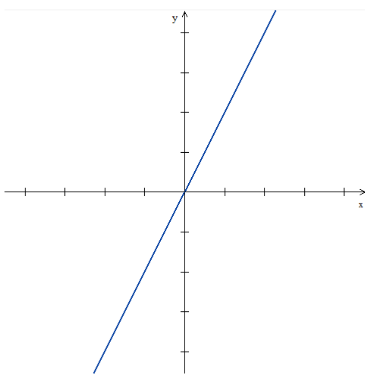


Figura 3.8: Função linear com $a > 0$.

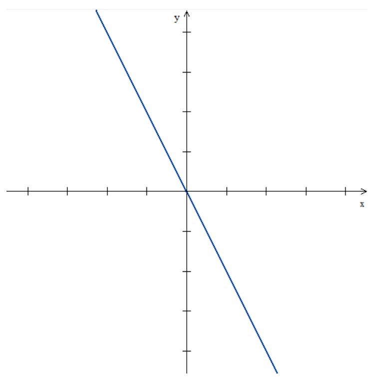


Figura 3.9: Função linear com $a < 0$.

Ainda, temos que

- Para todo x_1, $x_2 \in \mathbb{R}$, temos $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$.
- $f(nx) = nf(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}$.

Um caso particular de função linear é a **função identidade** (Figura 3.10), ou seja, uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x$. Neste caso temos $a = 1$ e $D(f) = Im(f)$.

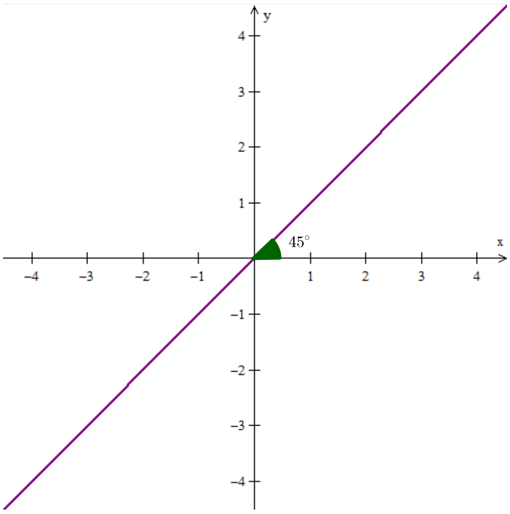


Figura 3.10: Gráfico da função identidade.

3.3 Função Modular

3.3.1 Valor absoluto

O valor absoluto (ou módulo) de um número real x, indicado pela notação $|x|$, é definido de tal forma que

$$|x| = \begin{cases} x, & se \quad x \geq 0 \\ -x, & se \quad x < 0 \end{cases}$$

3.3.2 Função Modular

A função modular é definida como $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$, tal que

$$f(x) = |x|$$

Winplot - Módulo

Após termos plotado uma função, podemos obter geometricamente o módulo dela. Na janela **inventário**, clicamos em |f(x)| para construir o módulo da função plotada no plano cartesiano.

3.3.3 Gráfico

O gráfico de uma função modular é formado por duas semirretas de coeficientes angular 1 e -1, respectivamente, que se interceptam em $(0,0)$ (Figura 3.11). Desta forma, o gráfico de f coincide com a reta $y = x$ nos pontos de abscissas $x \geq 0$ e com a reta $y = -x$ nos pontos de abscissas $x < 0$.

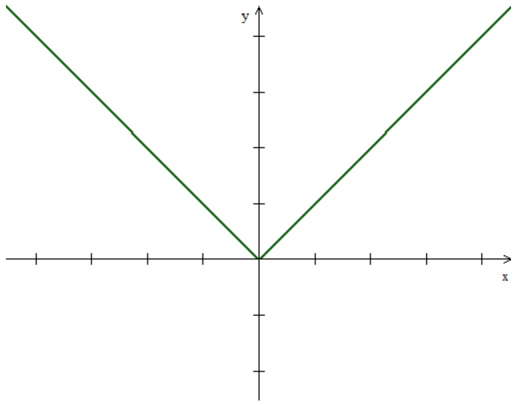


Figura 3.11: Gráfico da função $f(x) = |x|$.

3.3.4 Propriedades de módulo

Dado um número real positivo a, tem-se que:

1. $|x| = a \iff x = \pm a$
2. $|x| < a \iff -a < x < a$
3. $|x| > a \iff x > a$ ou $x < -a$

3.4 Equação Modular

Exemplo 11 *Vamos resolver a equação $2x + |x-1| = -2$.*

Primeiramente, devemos analisar o termo que esta em módulo. Então temos

$$|x-1| = \begin{cases} x-1, & se \quad x \geq 1 \\ -(x-1), & se \quad x < 1 \end{cases}$$

Ou seja, temos dois casos:

Caso 1: $x \geq 1$

A equação fica da forma

$$2x + (x-1) = -2 \tag{3.1}$$

cuja raiz é $x = \dfrac{-1}{3}$. Porém, esta raiz não satisfaz a condição $x \geq 1$. Portanto, não pertence ao conjunto solução.

Caso 2: $x < 1$

A equação fica da forma

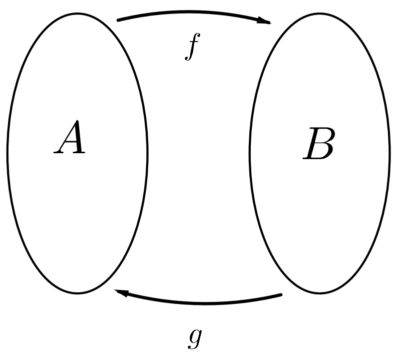
$$2x + [-(x-1)] \;=\; -2 \tag{3.2}$$

cuja raiz é $x = -3$. Esta raiz satisfaz a condição $x < 1$. Logo, percente ao conjunto solução.

Portanto, $S = \{-3\}$.

3.5 Função Inversa

Definição 7 *Consideramos a função $f : A \longrightarrow B$* ***bijetora****. Chamamos de* ***função inversa de*** *f a função $g : B \longrightarrow A$ tal que $f(m) = n$ se, e somente se, $g(n) = m$ para todo $m \in A$ e $n \in B$. Observe que $Im(f) = D(g)$ e $Im(g) = D(f)$.*



Se f for uma função invertível, denotamos a sua inversa por $f^{-1}(x)$. Além disso, o gráfico de $f^{-1}(x)$ é simétrico ao gráfico de $f(x)$ em relação a reta $y = x$

3.5.1 Como determinar a função inversa

Seja $f(x)$ uma função bijetora. Então, para determinarmos a sua inversa devemos:

1. Escrever a função $y = f(x)$ que define a função.
2. Permutar y com x.
3. Obter, novamente, uma função de x, ou seja, isolando a variável y. A função obtida será a função inversa.

Exemplo 12 *Seja a função $f(x) = -2x + 4$. Vamos encontrar $f^{-1}(x)$.*

Como a função já está escrita explicitamente, vamos permutar y com x. Ou seja, teremos

$$x = -2y + 4$$

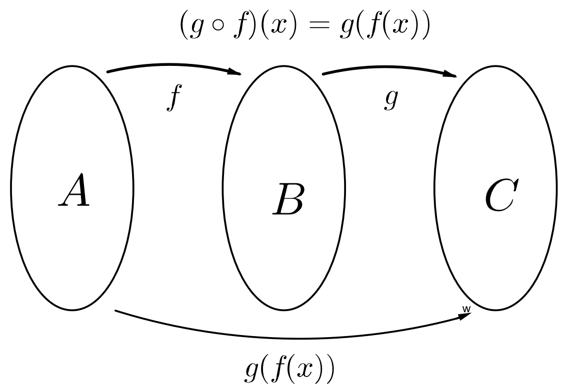
Isolando y,

$$\begin{aligned} x &= -2y + 4 \\ 2y &= 4 - x \\ y &= 2 - \frac{x}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $f^{-1}(x) = 2 - \dfrac{x}{2}$.

3.6 Função composta

Definição 8 *Considerando as função $f : A \longrightarrow B$ e $g : B \longrightarrow C$, temos que a **função composta** de g com f é a função $g \circ f : A \longrightarrow C$, sendo*



Exemplo 13 *Sendo $f(x) = 5x$ e $g(x) = x^3$, obter:*

a) $(g \circ f)(2)$

b) $(f \circ g)(2)$

a) Sabemos que $(g \circ f)(2) = g(f(2))$. Fazendo $f(2)$, temos

$$\begin{aligned} f(2) &= 5.2 \\ f(2) &= 10 \end{aligned}$$

Daí, $g(f(2)) = g(10)$. Fazendo a conta,

$$\begin{aligned} g(10) &= 10^3 \\ g(10) &= 1000 \end{aligned}$$

Portanto, $(g \circ f)(2) = 1000$.

b) Sabemos que $(f \circ g)(2) = f(g(2))$. Fazendo $g(2)$, temos

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^3 \\ g(2) &= 8 \end{aligned}$$

Daí, $f(g(2)) = f(8)$. Fazendo os cálculos,

$$\begin{aligned} f(8) &= 5.8 \\ f(8) &= 40 \end{aligned}$$

Portanto, $(f \circ g)(2) = f(g(2)) = 40$.

Winplot - Combinações

Após plotadas duas funções, podemos obter geometricamente diversas combinações entre elas através do Winplot. Na janela **2-dim**, clicamos em **dois** e, em seguida, em **combinações**. A janela da Figura 3.12 será aberta. A primeira opção será a função f, enquanto que a segunda será a função g. Depois de selecionadas as funções, podemos clicar nos botões da parte inferior da janela para construir a composição que desejarmos.

O último botão (`f<--g`) significa "f recebe g", ou seja, $f(g(x)) = (f \circ g)$.

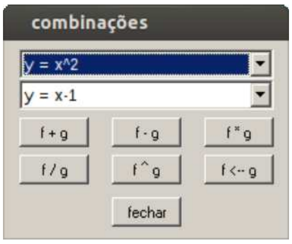


Figura 3.12: Janela **Combinações**

3.7 Inequações do 1º grau

Definição 9 *Chama-se* ***inequação do*** 1^o ***grau na variável*** x *toda inequação que se reduz a uma das formas:*

$$ax + b \geq 0, \quad ax + b > 0, \quad ax + b \leq 0, \quad ax + b < 0$$

em que a *e* b *são números reais quaisquer, com* $a \neq 0$.

Exemplo 14 *Vamos resolver a inequação* $-5x + 10 \geq 0$ *em* $U = \mathbb{R}$.

Temos,

$$\begin{aligned} -5x + 10 &\geq 0 \\ -5x &\geq -10 \\ 5x &\leq 10 \\ x &\leq 2 \end{aligned}$$

Logo, $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \leq 2\}$.

3.7.1 Inequação produto

Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se **inequação produto** toda inequação do tipo:

$$f(x).g(x) \geq 0, \quad f(x).g(x) > 0, \quad f(x).g(x) \leq 0, \quad f(x).g(x) < 0.$$

Para obter o conjunto solução de uma inequação produto, é necessário analisar o sinal de $f(x)$ e $g(x)$.

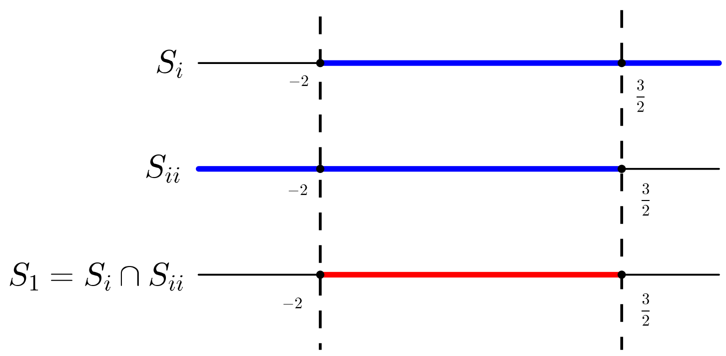
Exemplo 15 *Resolver a inequação* $(x + 2)(-2x + 3) \geq 0$ *em* $U = \mathbb{R}$.

Temos $f(x) = (x + 2)$ *e* $g(x) = (-2x + 3)$. *Vamos estudar o sinal de cada uma delas, o que nos acarreta analisar dois casos:*

- ***Caso 1:*** *(i)* $(x+2) \geq 0$ *e* *(ii)* $(-2x+3) \geq 0$.

  Daí, em (i) temos $x \geq -2$ *e em (ii) temos* $x \leq \dfrac{3}{2}$.

  Fazendo a intersecção desses intervalos,

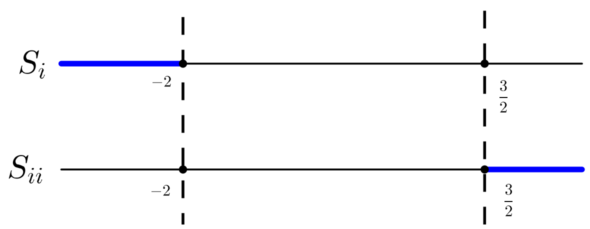


  temos que o conjunto solução para o caso 1 é $S_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq \dfrac{3}{2}\}$.

- ***Caso 2:*** *(i)* $(x+2) \leq 0$ *e* *(ii)* $(-2x+3) \leq 0$.

  Daí, em (i) temos $x \leq -2$ *e em (ii) temos* $x \geq \dfrac{3}{2}$.

  Fazendo a intersecção desses intervalos,



$$S_2 = S_i \cap S_{ii} = \emptyset$$

  temos que o conjunto solução para o caso 2 é $S_2 = \emptyset$.

  Portanto, o conjunto solução da inequação será $S_1 \cup S_2 = S_1$.

Observação 3 *É importante ressaltar que o exemplo anterior é considerado de nível fácil. Entretanto, como pode ser visto nos exercícios deste capítulo, as inequações podem possuir mais que a multiplicação de apenas duas funções, o que torna o problema mais complexo, já que deverão ser analisados os sinais de cada uma delas.*

3.7.2 Inequação quociente

Dadas as funções $f(x)$ e $g(x)$, chama-se **inequação quociente** toda inequação do tipo:

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} > 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} \leq 0, \quad \frac{f(x)}{g(x)} < 0.$$

Para obter o conjunto solução de uma inequação quociente, é necessário analisar o sinal de $f(x)$ e $g(x)$.

Exemplo 16 *Resolver a inequação* $\dfrac{3x-4}{x-2} > 0$.

Da mesma forma que foi resolvido o Exemplo 6, devemos estudar dois casos:

- ***Caso 1:*** *(i)* $3x - 4 > 0$ *e* *(ii)* $x - 2 > 0$.

  ou

- ***Caso 2:*** *(i)* $3x - 4 < 0$ *e* *(ii)* $x - 2 < 0$. *Desconsideremos aqui os passos para se chegar ao* S_1 *e ao* S_2*, deixando a cargo do leitor completar o exemplo.*

3.7.3 Inequação potência

Dada a função $f(x)$ e o número natural n, sendo $n \geq 2$, chama-se **inequação potência** toda inequação do tipo:

$$[f(x)]^n \geq 0, \quad [f(x)]^n > 0, \quad [f(x)]^n \leq 0, \quad [f(x)]^n < 0$$

Observemos que,

- Se n for par, então a potência nunca será negativa, e será positiva para $f(x) \neq 0$ e nula se $f(x) = 0$.
- Se n for ímpar, o sinal que a potência assumirá dependerá do sinal da base. Ou seja, será negativa se $f(x) < 0$, será positiva se $f(x) > 0$ e será nula se $f(x) = 0$.

Exemplo 17 *Resolver as inequações abaixo:*

a) $(2x-6)^4 \geq 0$

b) $(2x-6)^4 < 0$

c) $(2x-6)^4 > 0$

d) $(2x-6)^4 \leq 0$

Como $n = 4$ *(par), então a potência* $(2x-6)^4$ *nunca será negativa. Ela será positiva se* $(2x-6) \neq 0$ *e será nula se* $(2x-6) = 0$*. Assim, temos:*

a) $(2x-6)^4 \geq 0 \Rightarrow S = \mathbb{R}$.

b) $(2x-6)^4 < 0 \Rightarrow S = \emptyset$.

c) $(2x-6)^4 > 0 \Rightarrow (2x-6) \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$. *Logo,* $S = \{x \in \mathbb{R} \,|\, x \neq 3\}$.

d) $(2x-6)^4 \leq 0 \Rightarrow (2x-6) = 0 \Rightarrow x = 3$. *Logo,* $S = \{3\}$.

3.8 Exercícios

Exercício 6 *Determine para que valores de p as funções reais abaixo são crescentes.*

a) $f(x) = -2x + 2p$

b) $f(x) = \dfrac{2}{p}x - 1$

Exercício 7 *Determine k e m reais, para que a função abaixo seja linear.*

a) $y = kx + m$

b) $y = (2k - 4)x - 2m + 3$

c) $y = m - 5 - (4k - 1)x$

d) $y = (3k - 9)x + (m^2 - 1)$

Exercício 8 *Sabendo que $f(x) = -|x+1|$, construa o gráfico no Winplot, identifique o domínio e o conjunto imagem de f.*

Exercício 9 *Resolva a equação $|x^2 - 2x - 5| = 6$.*

Exercício 10 *Dada $f(x) = \dfrac{x}{3} - \dfrac{3}{4}$, obtenha $f^{-1}(x)$ e calcule:*

a) $f(f^{-1}(10))$

b) $f^{-1}(f(10))$

c) $f(f^{-1}(x))$

d) $f^{-1}(f(x))$

Exercício 11 *Considere as funções $f(x) = x^2$, $g(x) = 2x + 1$ e $h(x) = \dfrac{x-1}{2}$, definidas de $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, determine as leis de definição:*

a) $(g \circ f)(x)$

b) $(h \circ f)(x)$

c) $(g \circ g)(x)$

d) $(f \circ h) \circ (h \circ g)$

Exercício 12 *Dadas $f(x) = \dfrac{x+1}{2}$ e $(f \circ g)(x) = 2x^2 + 1$, determine a função $g(x)$.*

Exercício 13 *Dê o conjunto solução das inequações produto:*

a) $(-x + 8)(-2x + 6)(-4 + 3x) \geq 0$

b) $(2 - x)(1 - x)(3 - x) < 0$

c) $(-2x + 4)(3 - 2x)(-x) > 0$

Exercício 14 *O conjunto solução da inequação $\dfrac{2x-3}{3x-2} \geq 1$ é o intervalo:*

a) $]-\infty, -1]$

b) $\left]-\infty, \dfrac{2}{3}\right]$

c) $\left[-1, \dfrac{2}{3}\right[$

d) $[-1, +\infty[$

e) $\left[\dfrac{2}{3}, 1\right]$

Exercício 15 *Dada a inequação* $(x-2)^7(x-10)^4(x+5)^3 < 0$*, o conjunto solução é:*

a) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, x < 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, 2 < x < 10\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \,|\, -5 < x < 2\}$

d) $\emptyset$

Capítulo 4

Função Quadrática

O objetivo do capítulo é de apresentar as funções quadráticas, destacando tópicos como raízes, concavidade, vértice, eixo de simetria e translações. Ainda, na seção ***Estudo do sinal****, será dada uma breve explicação de como utilizar o comando de sombreamento de regiões no Winplot, permitindo ao aluno uma melhor visualização gráfica de intervalos onde a função pode ser positiva ou negativa.*

Definição 10 *Chama-se de função quadrática a função* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *que associa, a cada número real* x*, o número real* $f(x)=ax^2+bx+c$*, com* a,b,c *reais e* $a\neq 0$*.*

4.1 Raízes da função quadrática

Dada a função $f(x)=ax^2+bx+c$, os valores de x para os quais $f(x)=0$ são chamados raízes ou zeros da função. Para encontrar as raízes, utilizando a Fórmula de Bháskara:

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

O número b^2-4ac é o discriminante da equação do 2° grau. Representamos o discriminante pela letra grega Δ e, de acordo com o seu valor, podem se apresentar três situações:

- $\Delta>0\Longrightarrow f(x)$ possui duas raízes reais e distintas.
- $\Delta=0\Longrightarrow f(x)$ possui duas raízes reais e iguais.
- $\Delta<0\Longrightarrow f(x)$ não possui raízes reais.

Exemplo 18 *Encontre os zeros das funções abaixo:*

a) $f(x)=x^2+3x-10$

Igualando a função a zero, temos:

$$x^2+3x-10=0$$

Daí,

$$\begin{aligned}\Delta &= b^2-4ac\\ &= 3^2-4.1.(-10)\\ &= 49\end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, então a função possui duas raízes reais e distintas. Continuando,

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \\ x &= \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2.1} \\ x &= \frac{-3 \pm 7}{2} \end{aligned}$$

Portanto, $x_1 = 2$ e $x_2 = -5$.
Logo, o conjunto solução é $S = \{-5, 2\}$.

b) $g(x) = x^2 - 4$

Note que, neste caso, não precisaremos usar a fórmula de Bháskara para encontrar as raízes da função:

$$\begin{aligned} x^2 - 4 &= 0 \\ x^2 &= 4 \\ x &= \pm\sqrt{4} \\ x &= \pm 2 \end{aligned}$$

Portanto, o conjunto solução é $S = \{-2, 2\}$.

c) $h(x) = x^2 - 3x$
Neste caso, assim como no exemplo anterior, não precisaremos fazer uso da fórmula de Bháskara para determinar as raízes da função:

$$\begin{aligned} x^2 + 3 &= 0 \\ x(x+3) &= 0 \end{aligned}$$

Portanto, $x = 0$ ou $x = 3$. Logo, o conjunto solução é $S = \{0, 3\}$.

4.2 Gráficos

O gráfico de uma função quadrática é uma curva aberta denominada parábola. Podemos esboçar o gráfico através de duas maneiras:

1º Atribuindo valores para x, afim de encontrar os pares ordenados (x, y) que compõem a função;

2º Conhecendo características próprias da função, tais como concavidade, vértice, raízes e o ponto onde $f(x)$ corta o eixo das ordenadas.

Ao longo do capítulo, explicaremos mais detalhadamente cada um dos aspectos mencionados no 2º caso.

Winplot – Plotando funções quadráticas

Para plotarmos o gráfico de uma função quadrática – ou de expoente superior – no Winplot, vamos em **janela ▶ 2-dim ▶ Explícita**. Escrevemos `x^2` para plotarmos x^2. Caso queiramos acrescentar um parâmetro na potência, devemos colocá-la toda entre parênteses. Por exemplo, se desejamos plotar x^{2+a}, devemos escrever `x^(2+a)`. Se escrevêssemos `x^2+a`, o Winplot iria ler a função $x^2 + a$.

4.2.1 Concavidade e o coeficiente a

A concavidade da parábola está diretamente relacionada com o sinal do coeficiente a, que acompanha o termo x^2. Ou seja, se o coeficiente a for positivo, então a concavidade da parábola será voltada para cima. Caso o coeficiente a seja negativo, então a concavidade da parábola será voltada para baixo. Note, ainda, que o coeficiente a também é responsável por determinar qual será a "abertura" da parábola. Ou seja, quanto maior for o valor absoluto do coeficiente a, menor será a "abertura" da parábola.

Exemplo 19 *Plote as funções abaixo, e em seguida faça uma comparação em relação ao gráfico das mesmas.*

a) $y = -2x^2$

b) $y = -x^2$

c) $y = x^2$

d) $y = 2x^2$

e) $y = 3x^2$

Exemplo 20 *Plote a função $f(x) = Ax^2 + 4$, animando o parâmetro A no intervalo $[-10, 10]$. Em seguida, analise o que acontece com o gráfico da função à medida que o valor de A aumenta ou diminui.*

4.2.2 Vértice da parábola

Toda parábola tem um ponto de ordenada máxima ou mínima, dependendo da sua concavidade. A esse ponto, dá-se o nome de vértice da parábola.

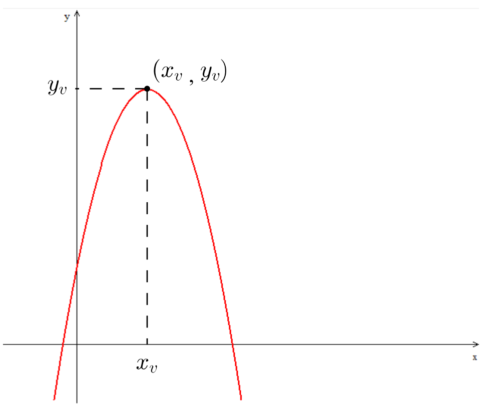


Figura 4.1: (x_v, y_v) é ponto de ordenada máxima

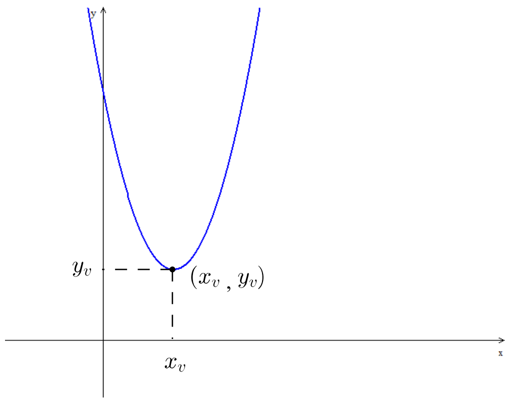


Figura 4.2: (x_v, y_v) é ponto de ordenada mínima

Para encontrar a abscissa do vértice, utilizamos a expressão $x_v = \dfrac{-b}{2a}$, e para encontrar a ordenada, utilizamos a expressão $y_v = \dfrac{-\Delta}{4a}$. Desta forma, as coordenadas do vértice são:

$$V = (x_v, y_v) = \left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$$

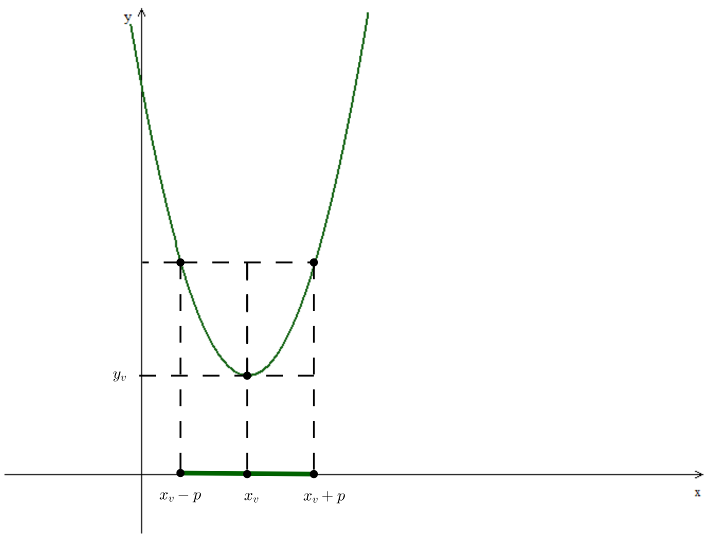
4.2.3 Domínio e Imagem

Dada a função$f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais ($a \neq 0$), podemos afirmar que:

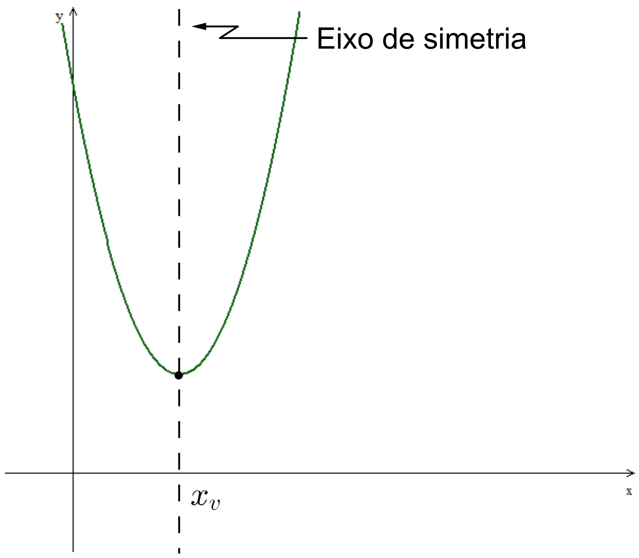
- $D(f) = \mathbb{R}$, uma vez que não existem restrições para os valores de x.
- Se $a > 0$, então $f(x)$ tem ordenada mínima em y_v. Isto significa que $Im(f) = [y_v, +\infty)$.
- Se $a < 0$, então $f(x)$ tem ordenada máxima em y_v. Isto significa que $Im(f) = (-\infty, y_v]$.

4.2.4 Eixo de simetria

Observe o gráfico:



Note que $f(x_v + p) = f(x_v - p)$, para qualquer valor de p. Em razão disso, podemos dizer que a parábola é simétrica em relação à reta que passa por x_v, paralelamente ao eixo x. A esta reta, dá-se o nome de eixo de simetria.



Exemplo 21 *Plote cada uma das funções abaixo, identificando seu vértice e eixo de simetria. Em seguida, faça uma análise do gráfico e determine a concavidade, o valor máximo (mínimo), o domínio e a imagem da função.*

a) $f(x) = 5x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = -x^2 - 3x$

c) $f(x) = 2x^2 + 1$

d) $f(x) = \frac{2}{3}x^2 - 4x + 3$

4.2.5 Os coeficientes b e c

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a, b, c reais e $a \neq 0$. Note que, o coeficiente b está relacionado com a posição da parábola em relação o eixo y, enquanto que, o coeficiente c, está relacionado com o ponto de intersecção da parábola com o eixo das ordenadas.

Sobre o coeficiente b, podemos afirmar que:

- Se $b = 0$, então o ponto em que o gráfico intercepta o eixo das ordenadas coincide com o vértice da parábola. (Figuras 4.3 e 4.4)

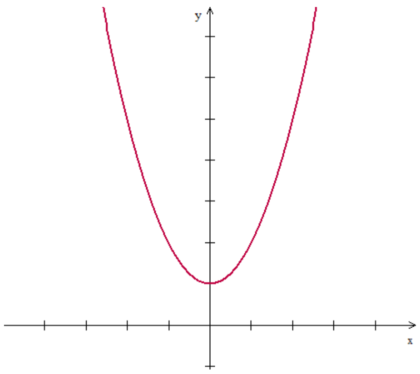


Figura 4.3: $b = 0$ e $a > 0$

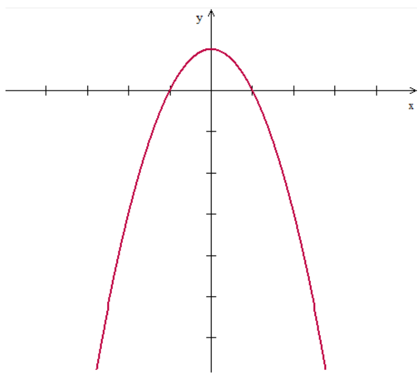


Figura 4.4: $b = 0$ e $a < 0$

- Se $b > 0$, então o gráfico intercepta o eixo das ordenadas em um ponto pertencente ao intervalo no qual $f(x)$ é crescente. (Figuras 4.5 e 4.6)

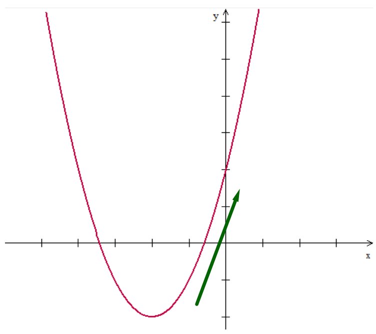


Figura 4.5: $b > 0$ e $a > 0$

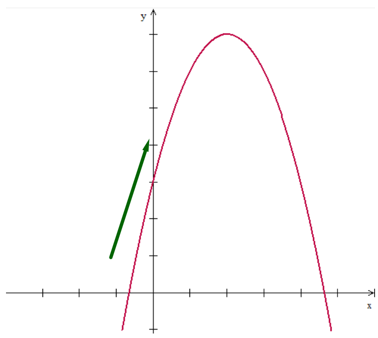


Figura 4.6: $b > 0$ e $a < 0$

- Se $b < 0$, então o gráfico intercepta o eixo das ordenadas em um ponto pertencente ao intervalo no qual $f(x)$ é decrescente. (Figuras 4.7 e 4.8)

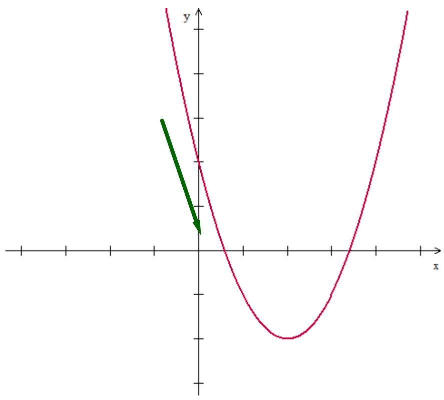


Figura 4.7: $b < 0$ e $a > 0$

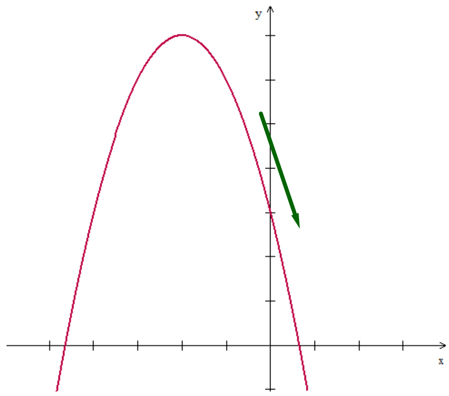


Figura 4.8: $b < 0$ e $a < 0$

O gráfico intercepta o eixo das ordenadas quando $x = 0$, ou seja, no ponto $(0, c)$. Sobre o coeficiente c, podemos afirmar que:

- Se $c = 0$, então $f(x)$ passa pela origem;
- Se $c > 0$, então a ordenada do ponto de intersecção é positiva;
- Se $c < 0$ então a ordenada do ponto de intersecção é negativa.

Exemplo 22 *Plote as funções abaixo, analisando cada caso em relação ao coeficiente b da função:*

a) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

b) $f(x) = 2x^2 + 5x + 1$

c) $f(x) = 2x^2 + 1$

d) $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$

e) $f(x) = -x^2 + 3x + 1$

f) $f(x) = -x^2 + 1$

g) $f(x) = -x^2 - 3x + 1$

Exemplo 23 *Plote a função $f(x) = x^2 + Bx$. Em seguida, anime o parâmetro B e observe o que acontece com o gráfico da função.*

Exemplo 24 *Plote a função $f(x) = x^2 - x + C$. Em seguida, anime o parâmetro C e observe o que acontece com o gráfico da função.*

Exemplo 25 *Plote a função $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, com $A \neq 0$. Em seguida, anime os parâmetros A, B e C e observe o comportamento do gráfico da função.*

4.2.6 Translações

Considere como base o gráfico da função $f(x) = x^2$. (Figura 4.9)

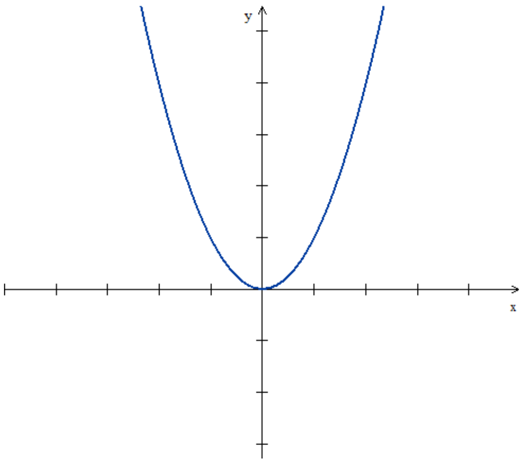


Figura 4.9: Gráfico de $f(x) = x^2$

Vamos analisar os casos em que ocorrem translações horizontais e/ou verticais no gráfico desta função.

Translações horizontais

Dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, e uma função $g(x) = f(x \pm k)$, $k \in \mathbb{R}$, então a função g possui um gráfico transladado horizontalmente em relação ao gráfico da f.

Exemplo 26 *Vamos analisar os gráficos abaixo:*

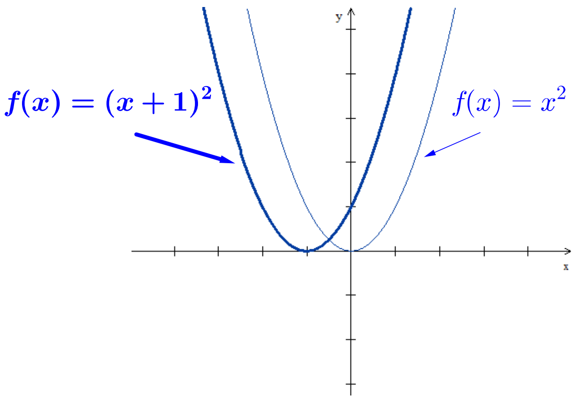


Figura 4.10: Translação para a **esquerda**

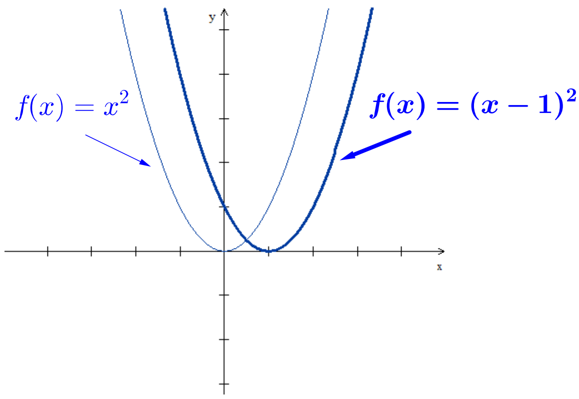


Figura 4.11: Translação para a **direita**

Podemos ver que na Figura 4.10, $f(x) = (x+1)^2$ transladou uma unidade para a esquerda em relação a $f(x) = x^2$. Na Figura 4.11, $f(x) = (x-1)^2$ transladou uma unidade para a direita em relação a $f(x) = x^2$.

Translações verticais

Dada uma função $f(x) = ax^2 + bx + c$, e uma função $g(x) = f(x) \pm k$, $k \in \mathbb{R}$, então a função g possui um gráfico transladado verticalmente em relação ao gráfico da f.

Exemplo 27 *Vamos analisar os gráficos abaixo:*

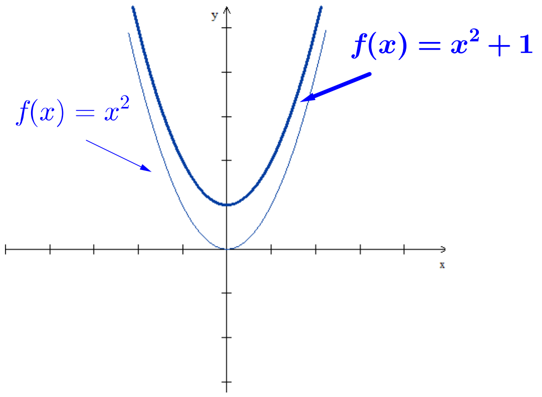


Figura 4.12: Translação para **cima**

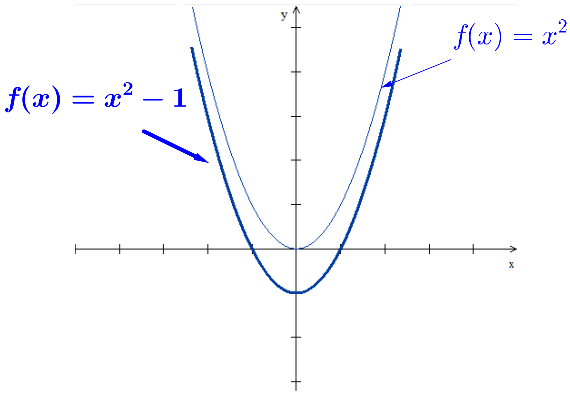


Figura 4.13: Translação para **baixo**

Podemos ver que na Figura 4.12, $f(x) = x^2 + 1$ transladou uma unidade para cima em relação a $f(x) = x^2$. Na Figura 4.13, $f(x) = x^2 - 1$ transladou uma unidade para baixo em relação a $f(x) = x^2$.

Exemplo 28 *Execute as animações abaixo no intervalo $[-10, 10]$, e observe as translações dos gráficos:*

a) $f(x) = (x + A)^2$

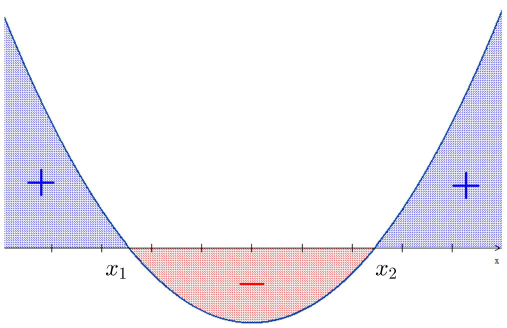
b) $f(x) = x^2 + A$

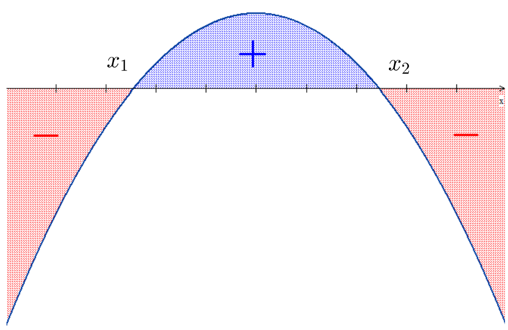
a) $f(x) = (x + A)^2 + A$

4.3 Estudo do sinal da função

O estudo do sinal da função do 2° grau é feito determinando-se as suas raízes (se existirem) e analisando a concavidade da parábola.

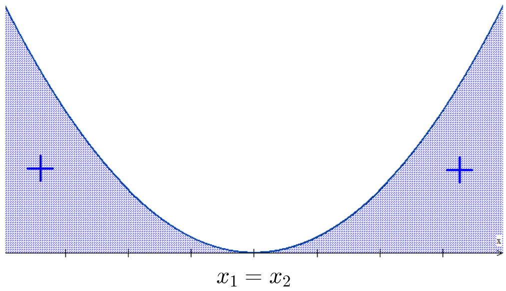
1º **caso** $\Delta > 0 \Longrightarrow f(x)$ possui duas raízes reais e distintas (x_1 e x_2).

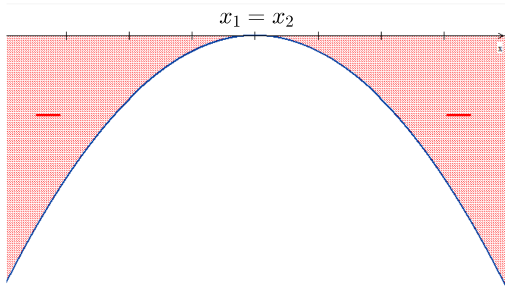




Neste caso, a parábola intercepta o eixo x nos pontos das abscissas x_1 e x_2.

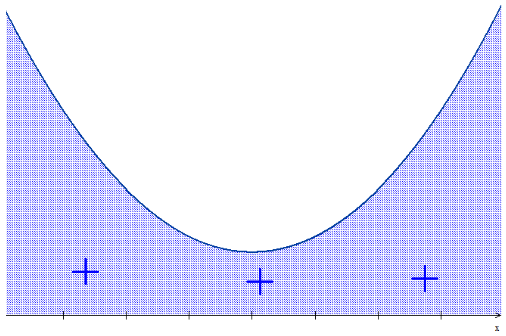
2º **caso** $\Delta = 0 \Longrightarrow f(x)$ possui raízes reais e iguais $(x_1 = x_2)$.

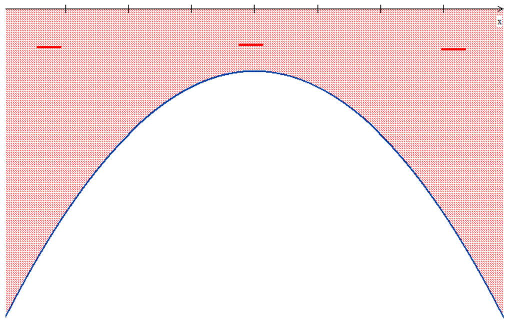




Neste caso, a parábola tangencia o eixo x no ponto de abscissa x_1.

3º **caso** $\Delta < 0 \Longrightarrow f(x)$ não possui raízes reais.





Neste caso, a parábola não tem nenhum ponto em comum com o eixo x.

Winplot – Sombreamento

A ferramenta **sombreamento** permite sombrear regiões do plano delimitadas por uma curva ou função, facilitando assim, a análise de alguns aspectos e propriedades. Após plotar uma equação (explícita ou implícita), vamos em **Equação ▸ Desigualdades Explícitas (ou Implícitas, dependendo da equação plotada anteriormente) ▸ Explícita**.

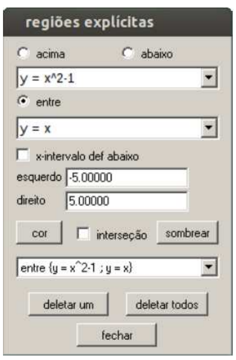


Figura 4.14: Janela **Regiões Explícitas**

Em seguida, abrirá uma janela (Figura 4.14) que permitirá selecionar as configurações de sombreamento desejadas. Como neste estudo de funções quadráticas, usaremos as Equações Explícitas, aparecerá uma janela onde podemos escolher sombrear acima, abaixo, ou entre duas funções. Além disso, nesta janela, podemos alterar os intervalos e a cor do sombreamento.

Exemplo 29 *Plote as funções abaixo. Em seguida, faça o estudo do sinal para cada uma das funções.*

a) $f(x) = x^2$

b) $f(x) = x^2 + 2x - 3$

c) $f(x) = -x^2 + 3x$

d) $f(x) = x^2 - 4$

e) $f(x) = x^2 + Bx, B \in \mathbb{R}^*$

f) $f(x) = x^2 - C^2, C \in \mathbb{R}^*$

4.3.1 Inequação do 2º grau

Definição 11 *Chama-se inequação do 2º grau na variável x toda inequação que se reduz à uma das seguintes formas:*

1. $ax^2 + bx + c > 0$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$
2. $ax^2 + bx + c < 0$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$
3. $ax^2 + bx + c \geq 0$ *com* $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$
4. $ax^2 + bx + c \leq 0$ *com* $a, b, c \in \mathbb{R}$ *e* $a \neq 0$

Resolve-se uma inequação do 2º grau de forma análoga à uma inequação do 1º grau, aplicando-se as propriedades de desigualdade e analisando-se o sinal da função.

Exemplo 30 *Resolva as inequações abaixo. Para isso, plote a equação do 2º grau em questão e faça uma análise do gráfico, a fim de determinar o conjunto solução da inequação.*

a) $x^2 + 7x > x - 8$

b) $x^2 + 7x < x - 8$

c) $-x^2 - 2x + 1 \geq 2x + 3$

d) $-x^2 - 2x + 1 \leq 2x + 3$

Exemplo 31 *Resolva a inequação* $(x^2 - 3x - 10)(1 - x^2) > 0$*. Para facilitar a análise do sinal de cada equação, construa seus gráficos no Winplot.*

4.4 Exercícios

Exercício 16 *Determine* k *para que a função* $f(x) = (k+1)x^2 - 2kx + k + 5$ *possua raízes reais e distintas.*

Exercício 17 *Sabendo que a função* $f(x) = x^2 - 2x + 3m$ *possui duas raízes iguais, determine o valor de* m.

Exercício 18 *O conjunto de todos os valores inteiros de* k*, para os quais o trinômio de* 2° *grau em* x, $y = \frac{1}{k}x^2 + (k+1)x + k$ *não tenha raízes reais é:*

a) $\{-3, -2, -1, 1\}$

b) $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

c) $\{-2, -1, 0, 1\}$

d) $\{-2, -1, 0\}$

e) $\{-2, -1\}$

Exercício 19 *Plote as funções abaixo, animando os respectivos parâmetros. Observe o que acontece com o gráfico da função em cada caso.*

a) $f(x) = Ax^2$, *com* $A \neq 0$

b) $f(x) = -x^2 + Bx$

c) $f(x) = 3x^2 + C$

d) $f(x) = (2x + D)^2$

e) $f(x) = Ax^2 + Bx + C$, *com* $A \neq 0$

Exercício 20 *Plote cada uma das funções abaixo, identificando seu vértice e eixo de simetria. Em seguida, faça uma análise do gráfico e determine a concavidade, o valor máximo (mínimo), o domínio, a imagem e os valores para os quais se tem* $f(x) > 0$ *e/ou* $f(x) < 0$.

a) $f(x) = \sqrt{2}x^2 + x$

b) $f(x) = -x^2 + \pi x$

c) $f(x) = 5x^2 + 2x$

d) $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 11x$

Exercício 21 *Plote as funções abaixo e, de forma semelhante à função quadrática, verifique se ocorre translação horizontal e/ou vertical no gráfico de cada uma.*

a) $f(x) = \sqrt{(x-4)} + 1$

b) $g(x) = 4 - |x - 2|$

c) $h(x) = x^2 + 6x$

d) $j(x) = \sqrt[3]{x + 5}$

e) $p(x) = (x-3)^4$

f) $q(x) = (x+1)^3 - 4$

Exercício 22 *Resolva as inequações abaixo. Para isso, plote a equação em questão e faça uma análise do gráfico, a fim de determinar o conjunto solução da inequação.*

a) $x^2 > x - 4$

b) $3x^2 + 1 < 2x - 5$

c) $(-x^2 - 2x + 1)(2x + 3) \geq 0$

d) $-x^2 - 1 \leq 2x$

Capítulo 5

Funções Exponenciais

Este capítulo tem por objetivo relembrar propriedades básicas de potências para, a partir delas, resolver problemas envolvendo funções, equações e inequações exponenciais.

Definição 12 *Dado um número real a, com $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$, chama-se função exponencial de base a a função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ definida por*

$$f(x) = a^x$$

5.1 Propriedades básicas das potências

- Sendo $a \in \mathbb{R}_+^*$, $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z}_+^*$, temos

  1) Se $m > 1$ então $a^m = a.a.a...a$ m vezes;
  2) Se $m = 1$ então $a^m = a$;
  3) Se $m = 0$ então $a^m = 1$;
  4) Se $m = -1$ então $a^m = \dfrac{1}{a}$;
  5) Se $m < -1$ então $a^m = \left(\dfrac{1}{a}\right)^m$;
  6) Se $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$.

- Sendo a e b números positivos, com m e n números racionais, são válidas as seguintes propriedades:

  1) $a^m a^n = a^{m+n}$;
  2) $\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;
  3) $(ab)^m = a^m b^m$;
  4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^m = \dfrac{a^m}{b^m}$;
  5) $(a^m)^n = a^{mn}$.

5.2 Gráficos

Exemplo 32 *Vamos observar os gráficos das funções* $f(x) = 2^x$ *e* $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

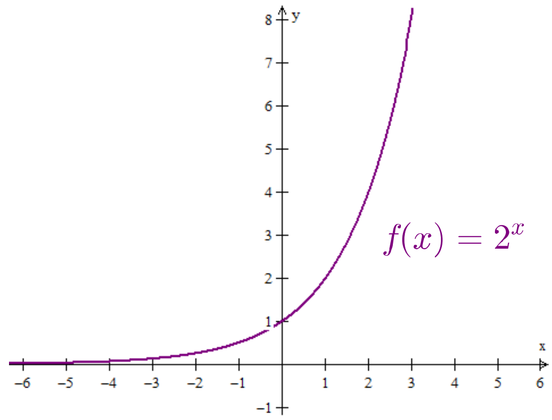


Figura 5.1: Gráfico da $f(x)$.

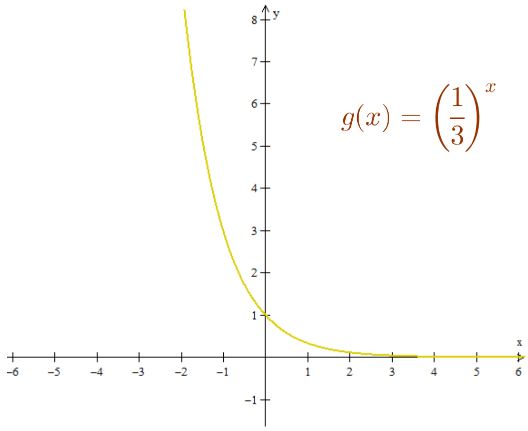


Figura 5.2: Gráfico da $g(x)$.

Observe que no gráfico de $f(x)$, *quanto menor o valor de* x, *mais os pontos do gráfico se aproximam do eixo* x, *sem atingi-lo. Isto ocorre pelo fato de não existir nenhum valor de* x *real tal que* $f(x) = 2^x = 0$.

No gráfico de $g(x)$, *no entanto, quanto maior o valor de* x, *mais os pontos do gráfico se aproximam do eixo* x, *sem atingi-lo. Isto ocorre pelo fato de não existir nenhum valor de* x *real tal que* $f(x) = (1/3)^x = 0$.

Quando isto ocorre, a reta Ox *é chamada* ***assíntota*** *à curva.*

5.3 Propriedades das funções exponenciais

Vejamos algumas propriedades das funções exponenciais:

- Quando $a > 1$ (como em $f(x)$ do Exemplo 8.1), a função é crescente, ou seja, quanto maior o expoente x, maior é a potência a^x.
- Quando $0 < a < 1$ (como em $g(x)$ do Exemplo 8.2), a função é dita decrescente, ou seja, quanto maior o expoente x, menor é a potência a^x.
- O domínio de uma função exponencial é $\mathbb{R}$, ou seja, $Dom(f) = \mathbb{R}$.
- A imagem de uma função exponencial são todos os reais positivos diferentes de zero, ou seja, $Im(f) = \mathbb{R}_+^*$. Como $\forall x \in \mathbb{R}$, temos $a^x > 0$, o gráfico da função fica todo acima do eixo x.
- A função é injetora, pois se $x_1 \neq x_2$, então $a^{x_1} \neq a^{x_2}$.
- A função é sobrejetora, pois $\forall y \in \mathbb{R}_+^*$, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = a^x$.

Exemplo 33 *Plote a função exponencial* $f(x) = a^x$ *e, em seguida, varie o parâmetro* a. *Após, plote a função* $f(x) = 2^x + b$ *e varie o parâmetro* b. *O que acontece com a função em cada caso?*

Exemplo 34 *Plote o gráfico das funções* $f(x) = 2^x$, $f_1(x) = 2^{x+1}$, $f_2(x) = 2^{x+2}$, $f_3(x) = 2^{x+3}$. *O que ocorre com* $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ *em relação à* $f(x) = 2^x$*?*

5.4 Equações exponenciais

Denominamos equação exponencial a sentença $a^x = b$ em que a e b são números reais conhecidos ($a > 0$ e $a \neq 1$) e x é a incógnita. Se conseguirmos expressar o número b como uma potência de base a, isto é, $b = a^\alpha$ então recaímos em

$$a^x = a^\alpha,$$

cuja única solução é $x = \alpha$.

Exemplo 35 *Resolva a equação* $9^x = \sqrt{3}$.

Como $\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$ *e* $9^x = (3^2)^x$, *temos:*

$$\begin{aligned} 9^x &= \sqrt{3} \\ 3^{2x} &= 3^{\frac{1}{2}} \\ 2x &= \frac{1}{2} \\ x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Logo, $S = \left\{\frac{1}{4}\right\}$.

Exemplo 36 *Determine o conjunto solução da equação* $(3.2^{x+1}) - (4.2^{x-2}) - (6.2^x) = -4$.

Como $2^{x+1} = 2^x 2$ *e* $2^{x-2} = \frac{2^x}{2^2} = \frac{2^x}{4}$, *então:*

$$(3.2^{x+1}) - (4.2^{x-2}) - (6.2^x) = -4$$

Fazendo $2^x = y$, *obtemos:*

$$\begin{aligned} (6y) - y - (6y) &= -4 \\ -y &= -4 \\ y &= 4 \end{aligned}$$

Como $y = 2^x$, *então*

$$\begin{aligned} 2^x &= 4 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

Logo, o conjunto solução é $S = \{2\}$.

Exemplo 37 *Sejam* x *e* y *os números reais que tornam verdadeiras as sentenças*

$$\begin{cases} 2^{x+y} - 2 = 30 \\ 2^{x-y} - 2 = 0 \end{cases}$$

Observe que

$$\begin{aligned} 2^{x+y} &= 30 + 2 \\ 2^{x+y} &= 2^5 \\ x + y &= 5 \end{aligned}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} 2^{x-y} &= 2 \\ x - y &= 1 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $x = 3$ e $y = 2$.

5.5 Inequações Exponenciais

Denominamos inequações exponenciais às sentenças

$$a^x > b \quad a^x < b \quad a^x \geq b \quad a^x \leq b$$

em que a e b são números reais conhecidos ($a > 0$ e $a \neq 1$) e x é a incógnita.

A resolução destas inequações e, em geral, de inequações do tipo $a^{f(x)} > a^{g(x)}$, $a^{f(x)} < a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \geq a^{g(x)}$, $a^{f(x)} \leq a^{g(x)}$ baseia-se na propriedade do crescimento ou decrescimento da função exponencial de base a da seguinte forma:

Caso $a > 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) > g(x)$. Ou seja, a desigualdade **conserva-se**.

Caso $0 < a < 1$: $a^{f(x)} > a^{g(x)} \iff f(x) < g(x)$. Ou seja, a desigualdade **inverte-se**.

Exemplo 38 *Obtenha o conjunto solução da inequação* $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+4} < \left(\frac{1}{8}\right)^{x+3}$.

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+4} < \left[\left(\frac{1}{2}\right)^3\right]^{3+x}$ *implica* $\left(\frac{1}{2}\right)^{4x+4} < \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+9}$ *e pelo fato da base a da potência ser $0 < a < 1$, temos:*

$$\begin{array}{rcl} \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+4} & < & \left(\frac{1}{2}\right)^{3x+9} \\ 4x+4 & > & 3x+9 \\ x & > & 5 \end{array}$$

Assim, o conjunto solução é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}$.

5.6 Exercícios

Exercício 23 *Obtenha o conjunto solução de $5^x 5^{x-2} \leq 26$.*

Exercício 24 *Usando o winplot, quantos são os números de pontos em comum dos gráficos das funções f e g, ambas de domínio real, sendo $f(x) = 2^x$ e $g(x) = -3^x + 4$?*

Exercício 25 *Usando o winplot, determine quais são os pontos em comum entre os gráficos das funções f e g, ambas de domínio real, sendo $f(x) = 2^x$ e $g(x) = -3^x$.*

Exercício 26 *Resolva a equação $(2^{3x-2})(8^{x+1}) = 4^{x-1}$.*

Exercício 27 *Encontre a solução do sistema* $\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ 3^{x-y} = 27 \end{cases}$.

Capítulo 6

Logaritmos

O capítulo objetiva relembrar o conceito e as principais propriedades de logaritmos. Na seção ***Função Logarítmica****, além da definição e condição de existência, o aluno aprenderá como plotar uma função logarítmica no software Winplot.*

Definição 13 *Sejam a e b dois números reais positivos, com $a \neq 1$. Chamaremos* ***logaritmo do número*** *b* ***na base*** *a, o expoente de x, de forma que $a^x = b$. Ou seja,*

$$\log_a b = x \Longleftrightarrow a^x = b$$

Exemplo 39 *Calcule $log_5 \frac{1}{25}$.*

$$\begin{array}{rcl} log_5 \dfrac{1}{25} & = & x \\ 5^x & = & \dfrac{1}{25} \\ 5^x & = & 5^{-2} \\ x & = & -2 \end{array}$$

6.1 Propriedades básicas dos logaritmos

Sejam a, b, m e n números reais positivos, com $a \neq 1$. Desta forma, temos:

1. $\log_a 1 = 0$
2. $\log_a a = 1$
3. $\log_a a^m = m \log_a a = m$
4. $a^{\log_a b} = b$
5. $\log_a b = \log_a c \Longleftrightarrow b = c$

6.2 Comparação de Logaritmos

Com base nas condições de existência de logaritmos, sabemos que o número $\log_a b$ existe se, e somente se, $a, b > 0$ e $a \neq 1$. Ou seja, se $f(x) = \log_a x$, então $D(f) = \mathbb{R}_+^*$. Satisfeitas estas condições, ao comparar dois logaritmos de bases iguais $\log_a x$ e $\log_a \alpha$, temos:

Caso $a > 0$	Caso $a < 0$
$\log_a x = log_a \alpha \iff x = \alpha > 0$	$\log_a x = \log_a \alpha \iff x = \alpha > 0$
$\log_a x > \log_a \alpha \iff x > \alpha > 0$	$\log_a x > \log_a \alpha \iff 0 < x < \alpha$
$\log_a x < \log_a \alpha \iff 0 < x < \alpha$	$\log_a x < \log_a \alpha \iff x > \alpha > 0$
conserva-se a desigualdade	**inverte-se a desigualdade**

6.3 Algumas propriedades operatórias de logaritmos

Os logaritmos apresentam determinadas propriedades fundamentais para a simplificação de alguns cálculos. Sendo a, b, m e n números reais positivos, e $a \neq 1$, temos:

1. Logaritmo do produto
$$\log_a(m_1 m_2 ... m_n) = \log_a m_1 + \log_a m_2 + \cdots + \log_a m_n$$
2. Logaritmo do quociente
$$\log_a \frac{m}{n} = \log_a m - \log_a n,\ n \neq 0$$
3. Logaritmo de uma potência
$$\log_a (m)^n = n \log_a m$$
4. Cologaritmo
$$colog_a m = \log_a \frac{1}{m} = \log_a 1 - \log_a m = -\log_a m,\ m \neq 0$$
5. Mudança de base
$$\log_a m = \frac{\log_b m}{\log_b a},\ a, b \neq 1$$
6. Logaritmos decimais
$$\log\, b = \log_{10} b$$
7. Logaritmos Naturais ou Logaritmos Neperianos (base e)
$$\ln b = \log_e b$$

Exemplo 40 *Considerando* $\log_a 2 = 0,69$ *e* $\log_a 3 = 1,10$*, calcule* $\log_a \sqrt[4]{12}$

$$\begin{aligned}
\log_a \sqrt[4]{12} &= \log_a \sqrt[4]{2^2.3} \\
&= \log_a (2^2.3)^{\frac{1}{4}} \\
&= \frac{1}{4} \log_a (2^2.3) \\
&= \frac{1}{4} (\log_a 2^2 + \log_a 3) \\
&= \frac{1}{4} (2 \log_a 2 + \log_a 3) \\
&= \frac{1}{4} (2.0,69 + 1,10) \\
&= 0,62
\end{aligned}$$

Portanto, $\log_a \sqrt[4]{12} = 0,62$.

Exemplo 41 *Sabendo que* $log_b a = 4$*, calcule* $log_{a^2} b^6$*.*
Mudando para a base b, obtemos:

$$
\begin{aligned}
log_{a^2} b^6 &= \frac{log_b b^6}{log_b a^2} \\
&= \frac{6 \log_b b}{2 \log_b a} \\
&= \frac{6}{2.4} \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}
$$

Portanto, $\log_{a^2} b^6 = \frac{3}{4}$.

6.4 Função Logarítmica

Definição 14 *Seja a um número real positivo, com* $a \neq 1$*. Neste caso, chamamos de função logarítmica de base a a função*

$$f(x) = \log_a x, \; \forall x > 0$$

Observação 4 *Note que a função logarítmica* $y = \log_a x$ *é a inversa da função exponencial* $y = a^x$*. Graficamente, estas são simétricas, independente do valor de a.*

Winplot – Plotando funções logarítmicas

Para plotarmos uma função logarítmica no Winplot, vamos em **janela ▶ 2-dim ▶ Explícita**. Caso queiramos plotar $f(x) = \log x$, isto é, na base dez, basta escrevermos na forma log(x). Para plotarmos funções logarítmicas em bases diferentes de dez, escrevemos log(b,x), onde b é a base e x a variável dependente. Por fim, para logaritmos neperianos, escrevemos ln(x).

6.4.1 Gráfico da Função

Observe o gráfico das funções $y = \log_3 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:

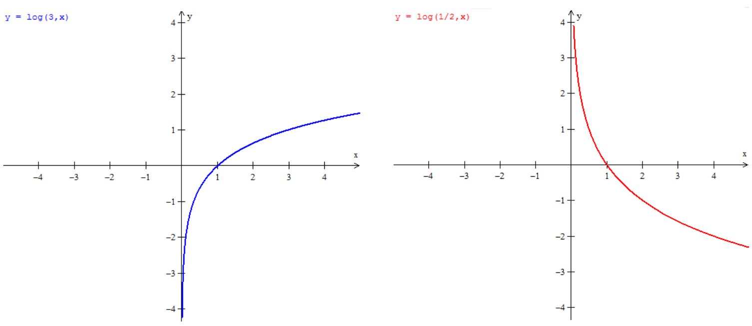


Figura 6.1: Gráficos das funções $y = \log_3 x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$, respectivamente.

Note que, tanto no gráfico de $f(x)$ quanto no gráfico de $g(x)$, quanto menor o valor de x, mais os pontos do gráfico se aproximam do eixo y, no entanto sem tocá-lo. Isto ocorre porque o domínio da função logarítmica está definido apenas para valores onde $x > 0$. Desta forma, a reta Oy é assíntota à curva. Repare, ainda, que a função $f(x)$ é crescente, enquanto que a função $g(x)$ é decrescente.

De maneira mais geral, em relação à uma função $f(x) = \log_a x$ ($a > 0$ e $a \neq 1$), podemos afirmar que:

- Se $a > 1$, então $f(x)$ é crescente, pois se $x_1 > x_2$ então $\log_a x_1 > \log_a x_2$
- Se $0 < a < 1$, então $f(x)$ é decrescente, pois se $x_1 > x_2$ então $\log_a x_1 < \log_a x_2$.
- $D(f) = \mathbb{R}_+^*$, para qualquer função logarítmica.
- $Im(f) = \mathbb{R}$, ou seja, qualquer número real é logaritmo de algum número real positivo, em certa base. Como $D(f) = R_+^*$, o gráfico da função fica todo à direita do eixo y.
- A função é injetora, pois se $x_1 \neq x_2$ então $f(x_1) \neq f(x_2)$.
- A função é sobrejetora, pois $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que $y = log_a x$.

Exemplo 42 *Plote a função $f(x) = \log_{(-x+7)}(x^2 - 25)$ e conjecture condições de existência para a mesma. Em seguida, faça os cálculos necessários para verificar as condições encontradas.*

Primeiramente, vamos plotar o gráfico da função e, em seguida, vamos analisar e inserir as retas assíntotas:

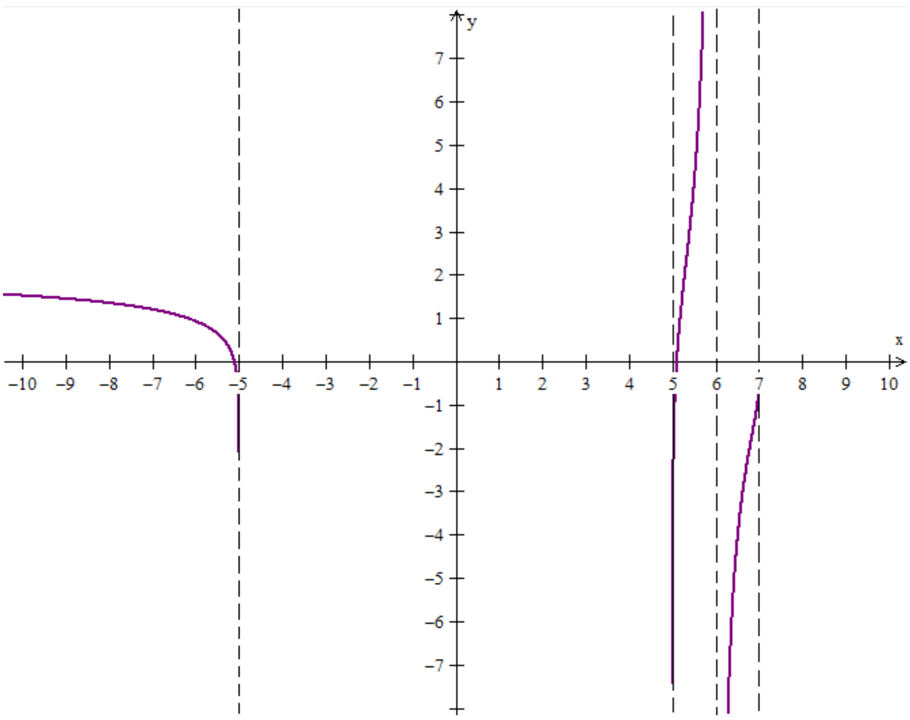


Figura 6.2: Gráfico da função $f(x) = \log_{(-x+7)}(x^2 - 25)$ com suas assíntotas.

Condições de existência:

(i) O logaritmo deve ser positivo:

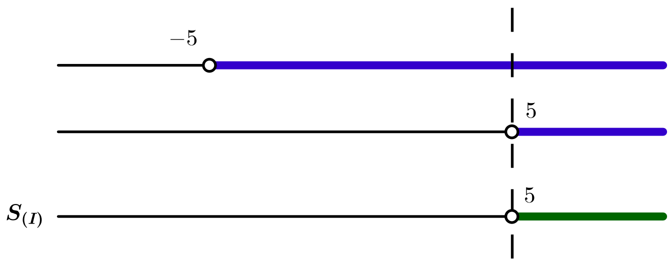
$$x^2 - 25 > 0 \Longleftrightarrow (x+5)(x-5) > 0$$

Ou seja,

$$(I)\ \underbrace{(x+5)}_{+}\underbrace{(x-5)}_{+} > 0 \qquad \textbf{\textit{ou}} \qquad (II)\ \underbrace{(x+5)}_{-}\underbrace{(x-5)}_{-} > 0$$

Em (I), temos

$$x+5>0 \Longrightarrow x > -5 \qquad \textbf{\textit{e}} \qquad x-5>0 \Longrightarrow x>5$$

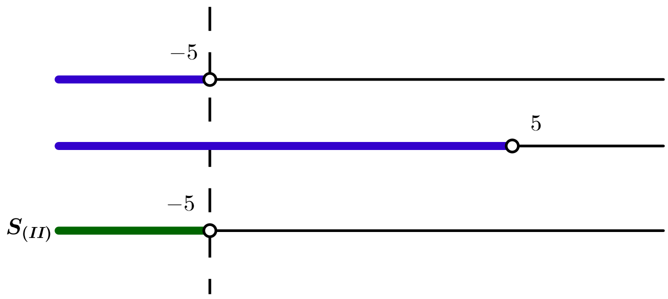


Daí, fazendo a intersecção de ambos intervalos, o conjunto solução de (I) é

$$S_{(I)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 5\}.$$

Em (II), temos

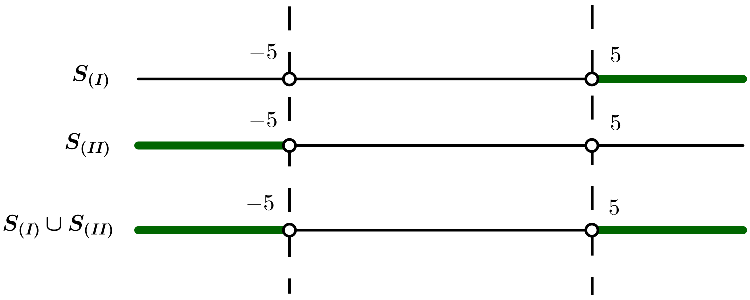
$$x+5<0 \Longrightarrow x < -5 \qquad \textbf{\textit{e}} \qquad x-5<0 \Longrightarrow x<5$$



Daí, fazendo a intersecção de ambos intervalos, o conjunto solução de (II) é

$$S_{(II)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5\}$$

Por fim, fazendo $S_{(I)} \cup S_{(II)}$ temos,



Portanto, $S_{(I)} \cup S_{(II)} = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } x > 5\}$.

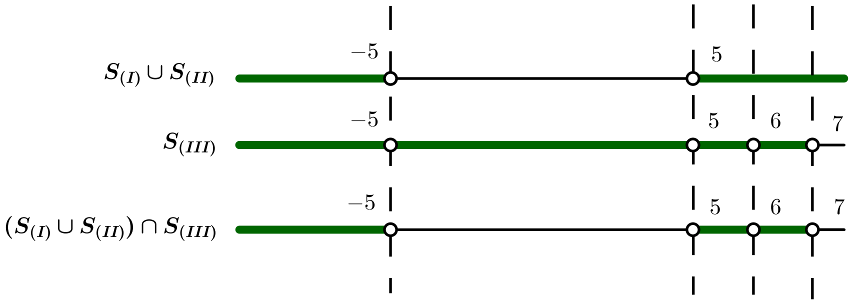
(ii) A base deve ser um número positivo e diferente de 1*:*

$$(III) = \begin{cases} -x + 7 > 0 \Longrightarrow x < 7 \\ -x + 7 \neq 1 \Longrightarrow x \neq 6 \end{cases}$$

Daí, o conjunto solução de (III) é $S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 7 \text{ e } x \neq 6\}$.

Portanto, o conjunto solução S *será*

$$S = (S_{(I)} \cup S_{(II)}) \cap S_{(III)} \Longrightarrow S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -5 \text{ ou } 5 < x < 7, \text{ com } x \neq 6\}$$



6.5 Exercícios

Exercício 28 *Plote o gráfico da função* $f(x) = \log_A x$ *e de sua inversa* $f^{-1}(x) = A^x$*. Em seguida, anime o parâmetro* A *e observe o comportamento das funções, a fim de determinar o eixo de simetria entre as mesmas.*

Exercício 29 *Esboce o gráfico de* $f(x) = \log x + 3$ *e, em seguida, determine o domínio, imagem e a raiz desta função.*

Exercício 30 *Plote a função* $f(x) = \ln \dfrac{1}{x^2}$ *e, em seguida, faça uma análise do gráfico a fim de determinar o domínio, imagem, assíntota(s) e raízes de* $f(x)$*.*

Exercício 31 *Dadas as afirmações:*

(i) *Se* $\log a = x$ *e* $\log b = y$, *então* $\log(a + b) = x + y$.

(ii) *Se* x *e* y *são números reais positivos e diferentes de 1, então* $(\log_x y)(\log_y x) = 1$.

(iii) $\log x - \log y + \log z = \log \dfrac{x}{yz}$.

As afirmações verdadeiras são:

a) *I, II e III*

b) *I e II*

c) *II e III*

d) *Somente a afirmação II*

e) *Somente a afirmação III*

Exercício 32 *Sabendo que* $\log_a b = 5$, *determine o valor de* x, *solução de* $a^{x+1} = \dfrac{b}{a}$.

Exercício 33 *Plote as funções abaixo e faça uma análise gráfica para determinar o domínio das mesmas. Em seguida, realize os cálculos necessários para chegar em tais valores.*

a) $f(x) = \ln \dfrac{1}{x}$

b) $g(x) = \log(x^2 - 6x + 9)$

c) $h(x) = \log_{3x+5} 3$

d) $\phi(x) = \log_{x-1}(2 - x)$

Exercício 34 *Determine os valores reais de* A *que satisfazem a condição dada. Em seguida, plote o gráfico da função e anime o parâmetro* A *nos intervalos obtidos.*

a) $f(x) = \log_{A-3} x$ *é crescente*

b) $g(x) = \log_{2-A} x$ *é crescente.*

c) $h(x) = \log_{1-A^2} x$ *é decrescente.*

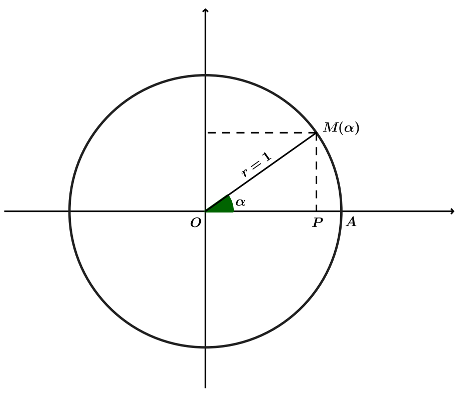
Capítulo 7

Funções Trigonométricas

O objetivo do capítulo é abordar tópicos referentes as funções trigonométricas, bem como compreender a variação de sinal de cada uma geometricamente. Ainda, serão estudadas brevemente as funções seno, cosseno e tangente hiperbólicas - as quais não são abordadas em ensino médio. A plotagem das funções no software Winplot será contemplada no decorrer do estudo do capítulo.

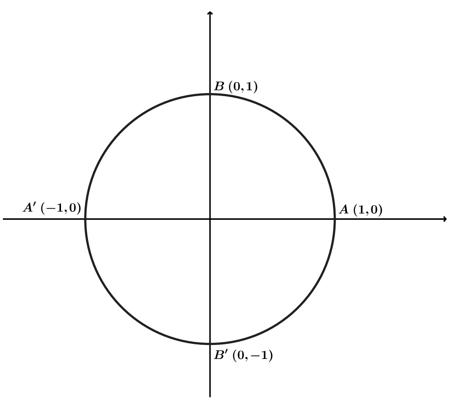
7.1 Seno e Cosseno de um arco trigonométrico

Definição 15 *Dado um arco trigonométrico AM de medida α, denomina-se* ***seno de*** *α a ordenada de M, e* ***cosseno de*** *α a abscissa de M. Ou seja:*



$$sen(\alpha) = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{MP}{1} = y_m$$
$$cos(\alpha) = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{OP}{1} = x_m$$

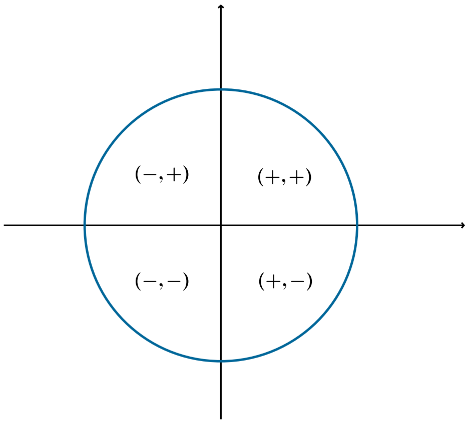
Pela definição de seno e cosseno, e analisando o ciclo trigonométrico abaixo, podemos deduzir que:



$cos0° = 1$	$sen0° = 0$
$cos90° = 0$	$sen90° = 1$
$cos180° = -1$	$sen180° = 0$
$cos270° = 0$	$sen270° = -1$
$cos360° = 1$	$sen360° = 0$

7.1.1 Variação do Sinal do Seno e do Cosseno

Para cada valor de α no plano cartesiano da circunferência trigonométrica, podemos associar um ponto (x, y), com $x = cos(\alpha)$ e $y = sen(\alpha)$. Assim, obtemos a seguinte distribuição de sinais nos quadrantes para os pares ordenados (x, y):



7.2 Tangente de um arco trigonométrico

Considere, na circunferência trigonométrica, um arco AM de medida β. Considere também uma reta t (eixo das tangentes), perpendicular ao eixo das abscissas e passando pelo ponto A (Figura 7.1).

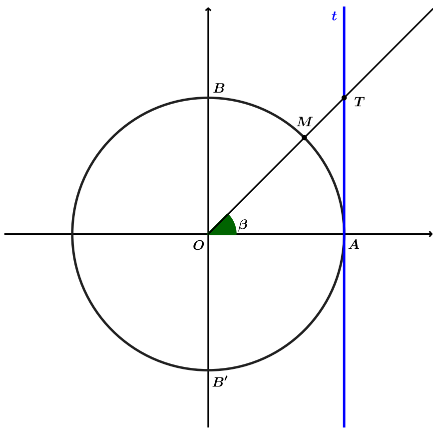


Figura 7.1: Tangente no ciclo trigonométrico.

O prolongamento do segmento OM intercepta a reta t no ponto T. No triângulo retângulo obtido, podemos verificar que:

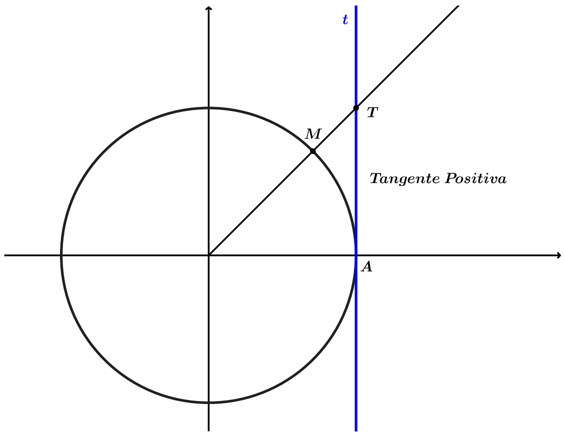
$$tg\beta = \frac{AT}{OA} = \frac{AT}{1} = y_t$$

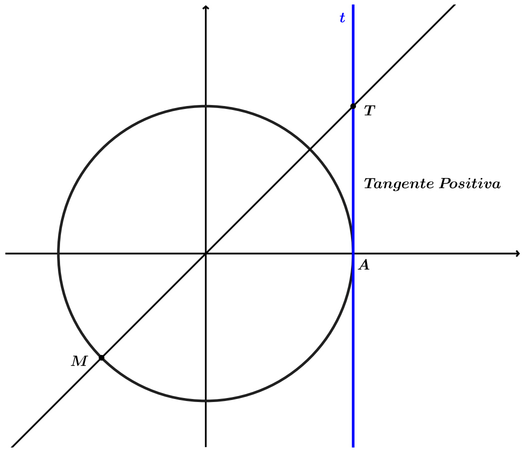
Definição 16 *Dado um arco trigonométrico AM, $M \neq B$ e $M \neq B'$, de medida β, denomina-se **tangente de** β a ordenada do ponto T obtido pela interseção do prolongamento do raio OM com a reta t (eixo das tangentes).*

Observação 5 *Note que $M \neq B$ e $M \neq B'$, pois os prolongamentos dos raios OB e OB' não interceptam o eixo das tangentes. Ou seja, $\nexists\, x, y \in \mathbb{R}$ tais que $tg90^o = x$ e $tg270° = y$.*

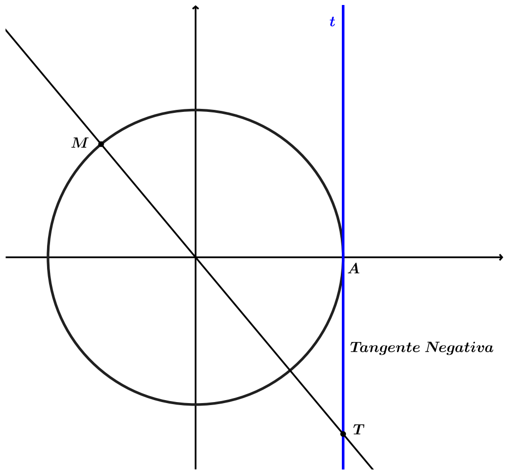
7.2.1 Variação do sinal da Tangente

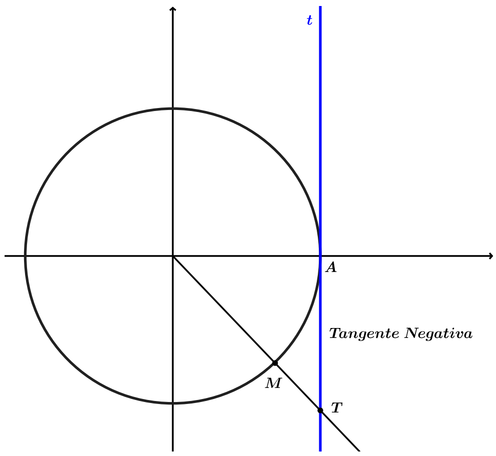
i) Se um arco AM tiver extremidade no 1º ou no 3º quadrante, então o valor da tangente do arco será positivo:



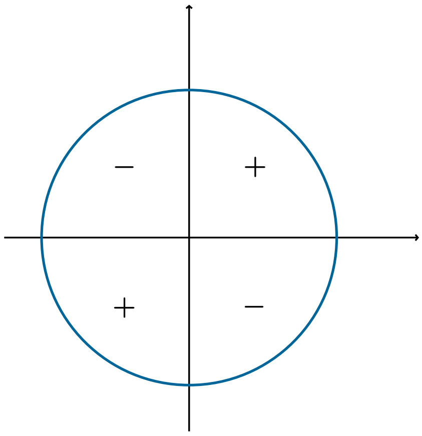


ii) Se um arco AM tiver extremidade no 2º ou no 4º quadrante, então o valor da tangente do arco será negativo:





Em resumo, obtêm-se a seguinte distribuição de sinais:



7.3 Identidades Trigonométricas

Mostraremos, a seguir, duas tabelas expondo algumas identidades trigonométricas e Arcos duplos, as quais são importantes ferramentas para a resolução de exercícios. Deixamos a cargo do leitor demonstrar tais relações.

Algumas Identidades Trigonométricas
$tg(\alpha) = \dfrac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)}$, com $cos(\alpha) \neq 0$
$sen^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1$
$cotg(\alpha) = \dfrac{1}{tg(\alpha)} = \dfrac{cos(\alpha)}{sen(\alpha)}$, com $sen(\alpha) \neq 0$
$sec(\alpha) = \dfrac{1}{cos(\alpha)}$, com $\cos(\alpha) \neq 0$
$cossec(\alpha) = \dfrac{1}{sen(\alpha)}$, com $sen(\alpha) \neq 0$

Arcos duplos
$sen(a+b) = sen(a)cos(b) + sen(b)cos(a)$
$sen(a-b) = sen(a)cos(b) - sen(b)cos(a)$
$cos(a+b) = cos(a)cos(b) - sen(a)sen(b)$
$cos(a-b) = cos(a)cos(b) + sen(a)sen(b)$
$tg(a+b) = \dfrac{tg(a)+tg(b)}{1-tg(a)tg(b)}$
$tg(a-b) = \dfrac{tg(a)-tg(b)}{1+tg(a)tg(b)}$

7.4 As funções Seno, Cosseno e Tangente

A cada número número real x podemos associar um único seno, um único cosseno e, obedecida a condição de existência, uma única tangente. Definem-se assim três funções trigonométricas:

$$f(x) = sen(x) \qquad g(x) = cos(x) \qquad h(x) = tg(x)$$

Winplot – Plotando funções trigonométricas

Para plotarmos uma função trigonométrica no Winplot, vamos em **janela ▶ 2-dim ▶ Explícita**. Caso queiramos plotar $f(x) = sen(x)$, basta escrevermos na forma sin(x). Para plotarmos $f(x) = cos(x)$, escrevemos cos(x). Por fim, para plotarmos $f(x) = tg(x)$, escrevemos tan(x).

7.4.1 Gráfico da função Seno

O gráfico da função $f(x) = sen(x)$ é chamado **senóide**. Com base no gráfico da Figura 7.2, podemos afirmar que:

- A função seno é ímpar, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$;

- $D(f) = \mathbb{R}$;
- $Im(f) = [-1, 1]$;
- Como $sen(2k\pi + x) = sen(x)$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que a função seno é periódica, e seu período é $P = 2\pi$;
- A frequência da função seno é $F = \dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{2\pi}$.

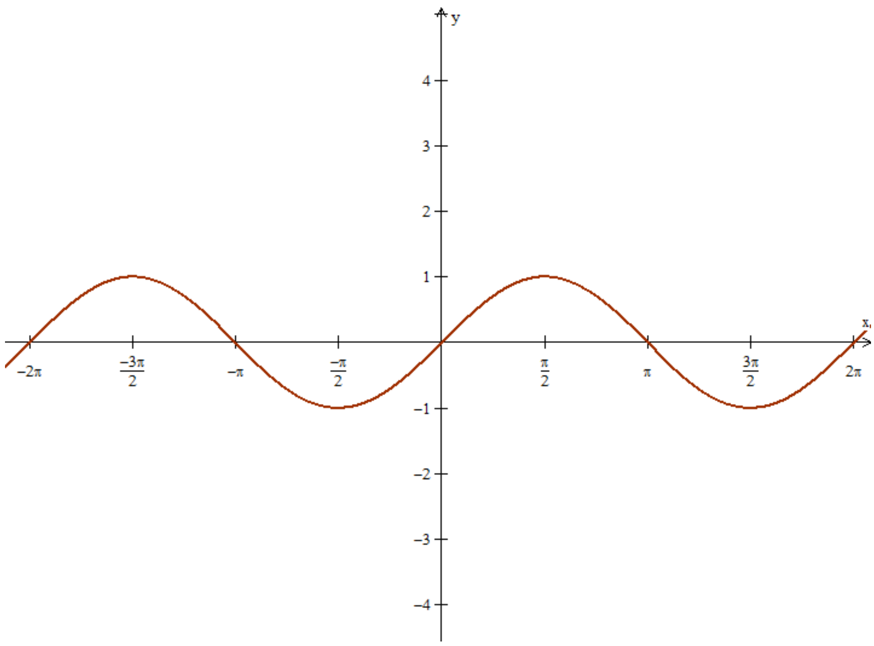


Figura 7.2: Gráfico da função seno.

Variações no gráfico da Função Seno

Considere uma função da forma

$$f(x) = b + asen(cx + d),$$

com $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Note que o parâmetro a causa alterações na amplitude, o parâmetro b causa alterações no deslocamento vertical e o parâmetro d no deslocamento horizontal da função seno. Ainda, temos que o período desta função é dado por $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$, e sua frequência por $F = \dfrac{1}{P}$.

Exemplo 43 *Plote os gráficos abaixo, animando os respectivos parâmetros. Em seguida, faça uma análise do gráfico da função com relação ao gráfico da função $f(x) = sen(x)$, determinando domínio, imagem, amplitude e período de cada uma das funções. Analise também o comportamento dos gráficos nos quais existem deslocamentos verticais e/ou horizontais.*

a) $y = Asen(x)$, *com* $A \neq 0$

b) $y = B + sen(x)$

c) $y = sen(Cx)$

d) $y = sen(x + D)$

7.4.2 Gráfico da função Cosseno

O gráfico da função $f(x) = cos(x)$ é chamado **cossenóide**. Com base no gráfico da Figura 7.3, podemos afirmar que:

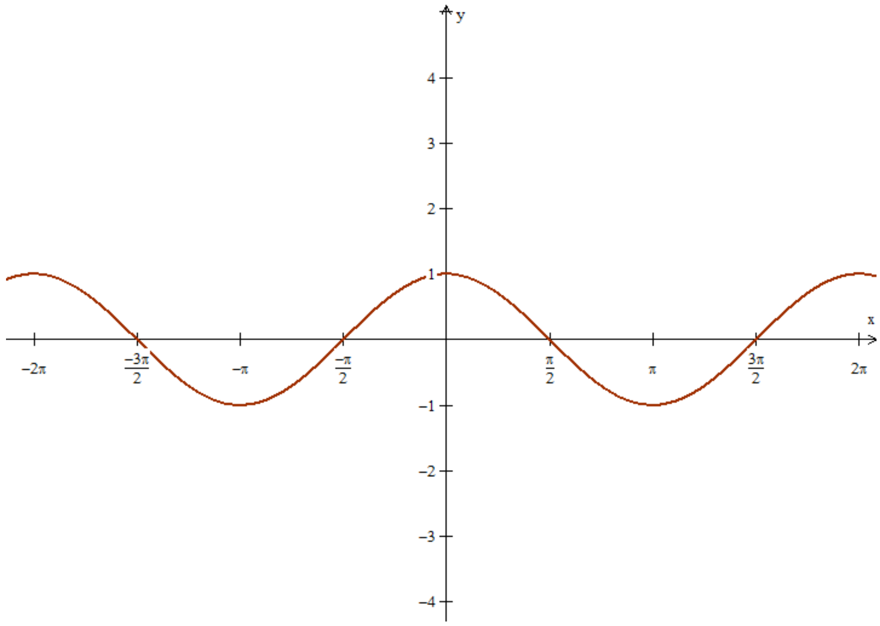


Figura 7.3: Gráfico da função cosseno.

- A função cosseno é par, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f(-x)$.
- $D(f) = \mathbb{R}$
- $Im(f) = [-1, 1]$
- Como $cos(2k\pi + x) = cos(x)$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que a função cosseno é periódica, e seu período é $P = 2\pi$.
- A frequência da função cosseno é $F = \dfrac{1}{P} = \dfrac{1}{2\pi}$.

Variações no gráfico da Função Cosseno

Considere uma função da forma $f(x) = b + acos(cx + d)$, com $a \neq 0$ e $c \neq 0$. Note que o parâmetro a causa alterações na amplitude, o parâmetro b causa alterações no deslocamento vertical e o parâmetro d no deslocamento horizontal da função cosseno. Ainda, temos que o período desta função é dado por $P = \dfrac{2\pi}{|c|}$, e sua frequência por $F = \dfrac{1}{P}$.

Exemplo 44 *Plote os gráficos abaixo, animando os respectivos parâmetros. Em seguida, faça uma análise do gráfico da função com relação ao gráfico da função $f(x) = cos(x)$, determinando domínio, imagem, amplitude e período de cada uma das funções. Analise também o comportamento dos gráficos nos quais existem deslocamentos verticais e/ou horizontais.*

a) $y = Acos(x)$, *com* $A \neq 0$

b) $y = B + cos(x)$

c) $y = cos(Cx)$

d) $y = cos(x + D)$

7.4.3 Gráfico função Tangente

O gráfico da função $f(x) = tg(x)$ é chamado **tangentóide**. Com base no gráfico da Figura 7.4, podemos afirmar que:

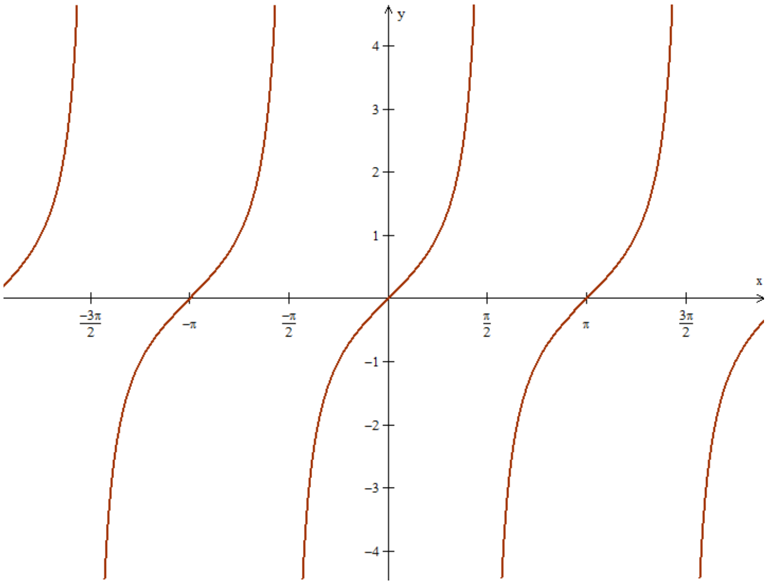


Figura 7.4: Gráfico da função tangente.

- A função tangente é ímpar, pois $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(-x) = -f(x)$.
- $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$, com $k \in \mathbb{Z}\}$.
- $Im(f) = \mathbb{R}$
- Como $tg(k\pi + x) = tg(x)$, com $k \in \mathbb{Z}$, podemos concluir que a função tangente é periódica, e seu período é $P = \pi$.

Exemplo 45 *Plote os gráficos abaixo, animando os respectivos parâmetros. Em seguida, faça uma análise do gráfico da função com relação ao gráfico da função $f(x) = tg(x)$, determinando domínio, imagem e período de cada uma das funções. Analise também o comportamento dos gráficos nos quais existem deslocamentos verticais e/ou horizontais.*

a) $y = Atg(x), com\ A \neq 0$

b) $y = B + tg(x)$

c) $y = tg(Cx)$

d) $y = tg(x + D)$

Winplot - Eixos

Para modificarmos a escala dos eixos, na janela **2-dim** vamos em **Ver ▶ Grade**. A janela mostrada na figura 7.5 será aberta. Nela, podemos, além de outras modificações, transformar a escala em radianos. Se queiramos, por exemplo, modificar o eixo x para intervalos de $\frac{\pi}{2}$, selecionamos a caixa **pi** para x, em intervalo, escrevemos pi/2 e, por fim, clicamos em **aplicar**.

Figura 7.5: Janela **Grade**

7.5 Equações Trigonométricas

Definição 17 *Toda equação envolvendo uma função trigonométrica com arco desconhecido recebe o nome de equação trigonométrica. Para resolver uma equação trigonométrica, devemos encontrar, caso existam, os valores que satisfazem a equação dada.*

Exemplo 46 *Sabendo que* $0 < y \leq \frac{\pi}{2}$, *determine o valor de* y *para cada uma das equações trigonométricas abaixo:*

a) $sen(y) = \frac{1}{2}$

b) $cos(y) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $y = arctg(1) + arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

d) $\frac{1}{sen(y)} = cossec\left(\frac{2\pi}{3}\right)$

e) $tg(y)cos(y) = 0$

7.6 Funções Hiperbólicas

As funções hiperbólicas são definidas como combinações de funções exponenciais, e estão diretamente relacionadas com a hipérbole, assim como as equações trigonométricas estão relacionadas com o círculo trigonométrico.

7.6.1 Função Seno Hiperbólico

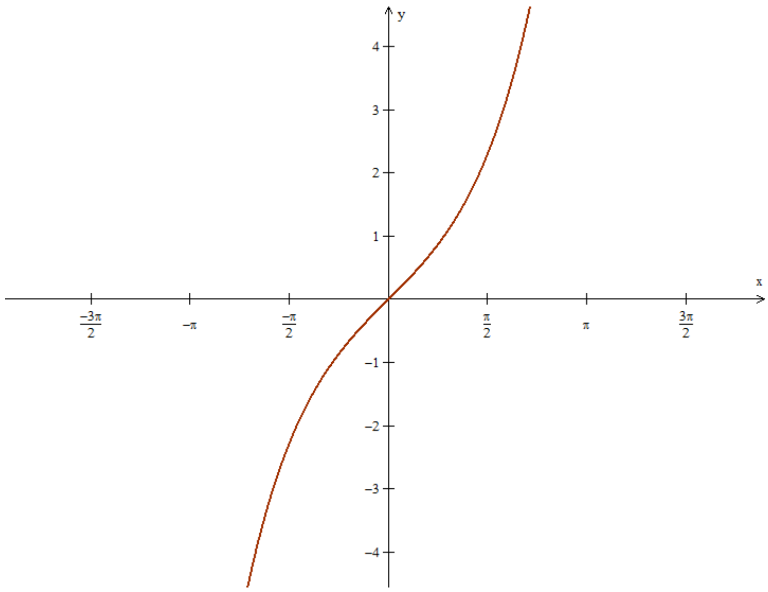


Figura 7.6: Gráfico da função seno hiperbólico.

A função seno hiperbólico é definida da seguinte forma:

$$f(x) = senh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = \mathbb{R}$.

7.6.2 Função Cosseno Hiperbólico

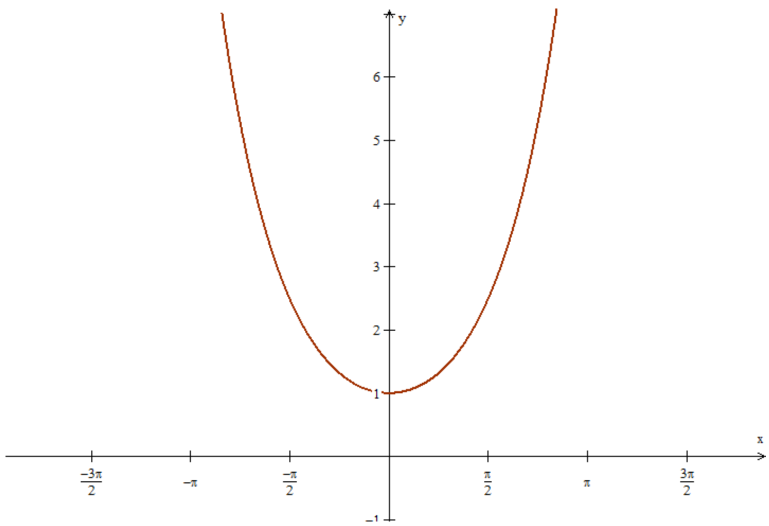


Figura 7.7: Gráfico da função cosseno hiperbólico.

A função cosseno hiperbólico é definida da seguinte forma:

$$f(x) = cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [1, +\infty)$.

Observação 6 *É válida a relação* $senh^2(x) + cosh^2(x) = 1$.

7.6.3 Função Tangente Hiperbólica

A função tangente hiperbólica é da seguinte forma:

$$f(x) = \frac{senh(x)}{cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

Note que $D(f) = \mathbb{R}$ e $Im(f) = [-1, 1]$.

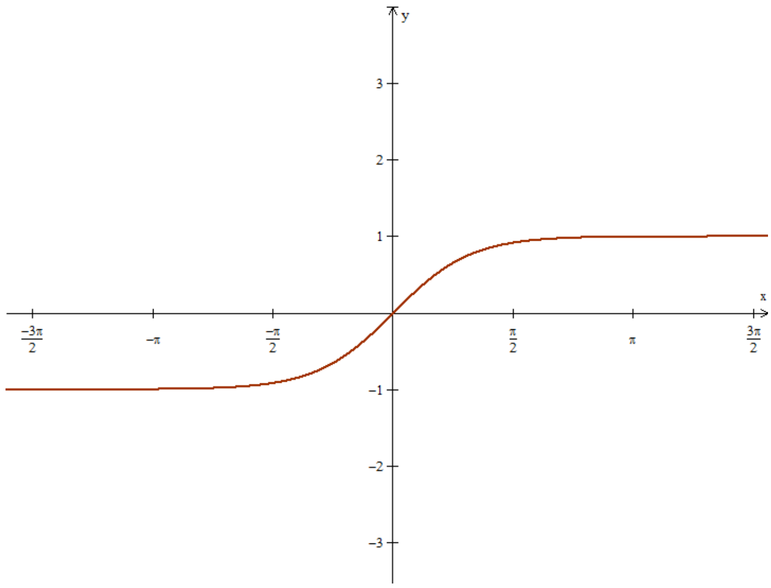


Figura 7.8: Gráfico da função tangente hiperbólica.

Winplot – Plotando funções hiperbólicas

Para plotarmos $f(x) = senh(x)$ escrevemos sinh(x); para $f(x) = cosh(x)$ escrevemos cosh(x); e para $f(x) = tanh(x)$ escrevemos tanh(x).

7.7 Exercícios

Exercício 35 *Plote os gráficos das funções abaixo, e determine seu domínio, imagem, amplitude e período. Analise também o comportamento dos gráficos nos quais existem deslocamentos verticais e/ou horizontais. Em seguida, faça uma comparação do gráfico da função em questão com o gráfico da função* $f(x) = sen(x)$.

a) $f(x) = 2sen(x)$

b) $f(x) = -3 + sen(x)$

c) $f(x) = sen(2x)$

d) $f(x) = sen\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$

e) $f(x) = 2 + sen(x + \pi)$

f) $f(x) = 2 - sen(x + \pi)$

Exercício 36 *Plote os gráficos das funções abaixo, e determine seu domínio, imagem, amplitude e período. Analise também o comportamento dos gráficos nos quais existem deslocamentos verticais e/ou horizontais. Em seguida, faça uma comparação do gráfico da função em questão com o gráfico da função $f(x) = cos(x)$.*

a) $f(x) = \frac{1}{2}cos(x)$

b) $f(x) = 2 + cos(x)$

c) $f(x) = cos\left(\frac{x}{2}\right)$

d) $f(x) = cos(\pi + x)$

e) $f(x) = 1 + cos(x + \pi)$

Exercício 37 *Plote os gráficos das funções abaixo, e determine seu domínio, imagem, e período. Analise também o comportamento dos gráficos nos quais existem deslocamentos verticais e/ou horizontais. Em seguida, faça uma comparação do gráfico da função em questão com o gráfico da função $f(x) = tg(x)$.*

a) $f(x) = \frac{1}{3}tg(x)$

b) $f(x) = 2 + tg(x)$

c) $f(x) = tg(3x)$

d) $f(x) = tg(\pi - x)$

Capítulo 8

Polinômios de grau superior

O capítulo propõe análise gráfica de funções polinomiais, bem como resolução destas através do algoritmo de Briot-Ruffini. Ainda, o aluno aprenderá a plotar uma família de funções no software Winplot.

Definição 18 *Uma função f é chamada de função polinomial se, para um número n inteiro e não negativo, temos:*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + a_{n-2} x^{n-2} + \cdots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

com a_i constantes, para $i = 0, 1, 2, ..., n$.

Exemplo 47

1. $f(x) = x^4 - 3x^2 + 2$
2. $g(x) = x^4 - 2$
3. $h(x) = \dfrac{-x^3}{2} + 2x^2 - 4$
4. $\psi(x) = -x^6 + 5$

Vamos analisar graficamente a $f(x)$ e a $g(x)$. (Figura 8.1 e 8.2)

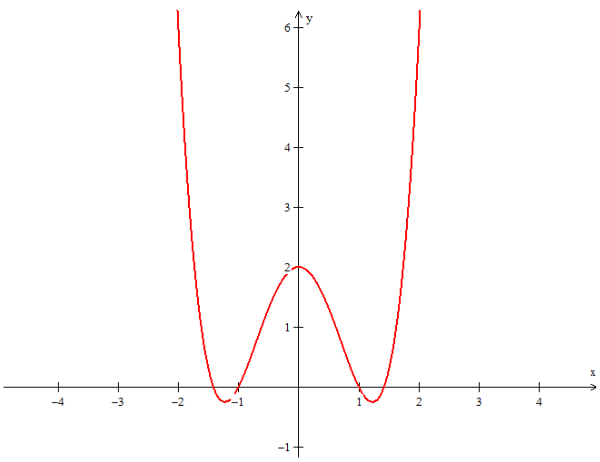


Figura 8.1: Gráfico da $f(x)$.

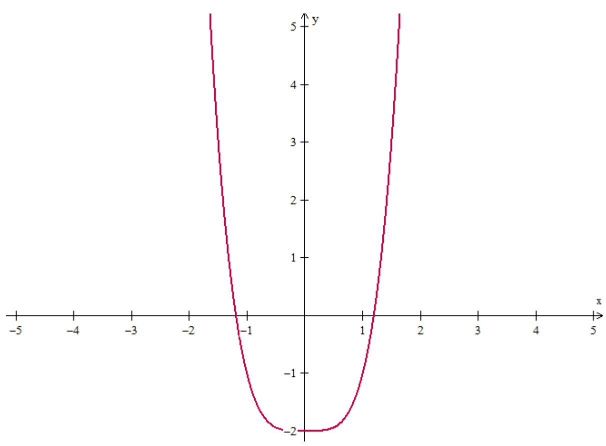


Figura 8.2: Gráfico da $g(x)$.

8.1 Gráficos

O gráfico de f, da mesma maneira que a imagem, é determinado pelo grau do polinômio e pelo coeficiente a_n.

Observação 7 *Sempre que o coeficiente da variável de* ***maior grau*** *for multiplicado por um valor k, a função tende a se contrair ou se expandir. Assim:*

i) Quanto maior o valor de k, mais contraído será o gráfico da função.

ii) Quando menor o valor de k, mais expandido será o gráfico da função.

Assim, se fôssemos analisar geometricamente a variação dos gráficos $f(x)$ e $g(x)$ do Exemplo 1 quando o coeficiente da variável de maior grau é multiplicado por um valor k, teríamos uma família de funções, como mostrado abaixo:

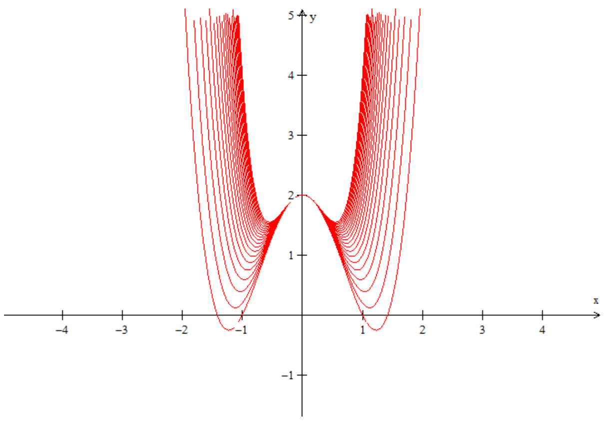


Figura 8.3: Família de funções de $f(x)$.

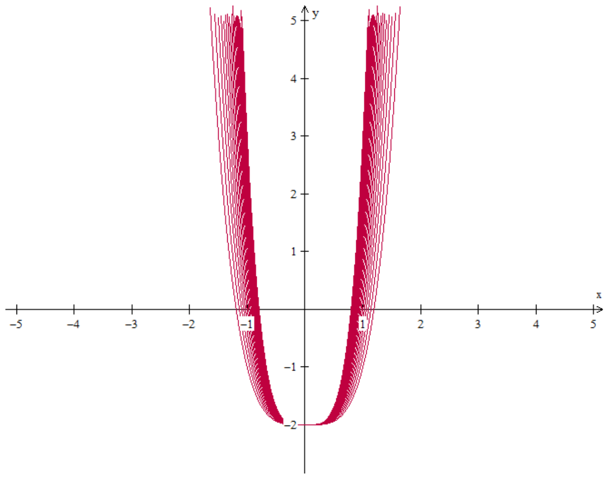


Figura 8.4: Família de funções de $g(x)$.

Winplot – Família

Para plotarmos uma família de determinada função, devemos definir certo parâmetro na equação da mesma. Ou seja, se quisermos plotar a família de funções variando o coeficiente angular e linear de uma função do 1º grau, por exemplo, devemos definir tais coeficientes como um valor arbitrário k.

Na Figura 8.4 da Observação 1, plotamos a função $g(x) = kx^4 - 2$ e encontramos uma família de funções ao variar o parâmetro k. Para encontrar tal família, no **Inventário**, clicamos em **Família** (Figura 8.5) e a janela da Figura 8.6 será aberta. No item **parâmetro**, escrevemos k e, em **mínimo** e **máximo** definimos o intervalo de variação do parâmetro (no caso, foi de 1 para mínimo e 5 para máximo). Em **passos** escolhemos quantas funções queremos plotar neste intervalo (no caso, foram 20 passos).

Se marcarmos a caixa **olhar**, podemos visualizar as funções sendo plotadas e, em **atraso** definimos a duração para visualizarmos, ou seja, quanto maior o atraso, mais lentamente elas serão plotadas.

Por fim, clicamos em **Definir** para plotar a família de funções que desejamos.

Observa-se ainda que, no caso da Figura 8.4 da Observação 1, variamos o parâmetro que acompanhava a variável de maior grau e, portanto, a família de funções obteve determinado comportado. Podemos atribuir outros parâmetros e variá-los conforme desejamos para obter diferentes comportamentos.

Figura 8.5: Em destaque, o ícone **família** na janela **Inventário**.

Figura 8.6: Janela **família**.

Exemplo 48 *Plote o gráfico da função $f(x) = kx^4 - 3$ e, em seguida, construa sua família.*

8.2 O Algoritmo de Briot-Ruffini

Para resolver equações de grau maior que 2, podemos fazer uso do algoritmo de Briot-Ruffini, o qual permite reduzir o grau da equação, de forma a torná-la mais simples. Assim, poderemos descobrir as demais raízes com maior facilidade.

Para isso, façamos uma tabela (Figura 8.7) e vamos preenchê-la da seguinte maneira: Seja $p(n) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x^1 + a_0 x^0$. Na parte superior, coloca-se os coeficientes dos termos x^m até x^0 do polinômio, sem esquecer dos coeficientes nulos. Em seguida, no canto superior esquerdo coloca-se a raiz que já é conhecida. A partir disto, a sequência de passos é a seguinte:

1) Copia-se o primeiro coeficiente (a_m) para a linha de baixo;

2) Multiplica-se o primeiro coeficiente pela raiz;

3) O valor obtido na multiplicação é somado ao segundo coeficiente (a_{m-1});

4) O valor final desta soma é colocado logo abaixo do segundo coeficiente (a_{m-1});

5) O valor obtido no processo anterior é multiplicado pela raiz de $f(x)$;

6) Este resultado é somado ao valor do terceiro coeficiente (a_{m-2});

7) O valor final desta soma é colocado logo abaixo do terceiro coeficiente (a_{m-2});

E assim sucessivamente, até o último coeficiente.

A raiz de $f(x)$ corresponde ao valor da raiz da equação já conhecido, e o valor de p é o resultado da soma. Note que o grau da equação vai diminuindo após cada etapa, até tornar-se uma equação do 2º grau. Desta forma, podemos resolvê-la fazendo uso da fórmula de Bháskara.

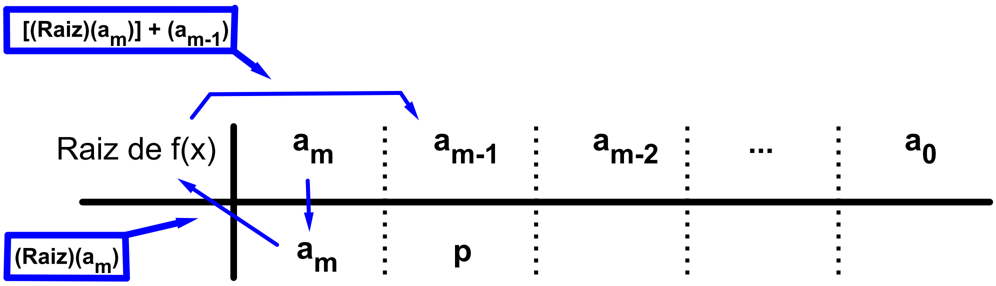


Figura 8.7: Tabela demonstrativa do Algoritmo de Briot-Ruffini.

Exemplo 49 *Vamos determinar as raízes da seguinte função*

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = 0$$

Utilizando o algoritmo de Briot-Ruffini temos:

1	1	−9	29	39	18
	1	−8	21	−18	0
2	1	−8	21	−18	0
	1	−6	9	0	0

$\boxed{f(x) = (x^3 - 8x^2 - 21x - 18)}$

$\boxed{f(x) = (x^2 - 6x + 9).(x - 1).(x - 2)}$

$\boxed{(x - 3)^2.(x - 1).(x - 2)}$

Assim, a equação:

$$f(x) = x^4 - 9x^3 + 29x^2 - 39x + 18 = (x - 1)(x - 2)(x - 3)^2 = 0$$

Portanto, suas raízes são $x = 1$*,* $x = 2$ *e* $x = 3$*.*

8.3 Exercícios

Exercício 38 *Plote os gráficos dos polinômios*

$$P(x) = x^3 + 5x^2 - 2x - 24$$
$$Q(x) = x^3 - 3x^2 - 10x + 24$$

Cruzam o eixo das ordenadas em

a) nenhum ponto

b) dois pontos abaixo da origem

c) dois pontos acima da origem

d) dois pontos simétricos à origem

e) no mesmo ponto

Têm em comum

a) nenhum ponto

b) um ponto

c) dois pontos

d) três pontos

e) quatro pontos

Exercício 39 *Determine* A, B, *e* C *na decomposição*

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1}$$

Exercício 40 *Determine* $m \in \mathbb{R}$ *para que o polinômio* $P(x) = (m-4)x^3 + (m^2-16)x^2 + (m+4)x + 4$ *seja de grau* 2.

Exercício 41 *Sendo* $P(x) = ax^4 + bx^3 + c$ *e* $Q(x) = ax^3 - bx - c$, *determine os coeficientes* a, b *e* c, *sabendo que* $P(0) = 0$, $P(1) = 0$ *e* $Q(1) = 2$.

Bibliografia

[1] BIDEL, A.C.L.; DALMOLIN, D.; HALBERSTADT, F.F.; SOMAVILLA, F. Funções elementares com o Winplot. Grupo PET Matemática da Universidade Federal de Santa Maria - 2011.

[2] FILHO, B. B.; SILVA, C. X. Matemática Aula por Aula. v.1, 1.ed. São Paulo: Editora FTD, 2003.

[3] LIMA, E.L.; CARVALHO, Paulo C. P.; WAGNER, E.; MORGADO, A.C. A Matemática do Ensino Médio. v.1, 9.ed. Rio de Janeiro: Editora SBM, 2006.