

JORNAL UMA TEMÁTICA

PET

InterPET 2024

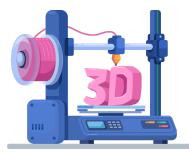
No dia 3 de agosto de 2024, foi realizado mais um InterPET, organizado pelo PET Matemática em parceria com o PET Ciências Agrárias – campus Frederico Westphalen. O evento teve como tema "**Mudanças Climáticas e os Extremos Climáticos no RS**", apresentado pela Prof.^a Dr.^a Nathalie Tissot Boiaski.



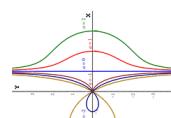
12 ARTIGOS DE DIVERSAS TEMÁTICAS PUBLICADOS!



Harmonia Celeste



Impressão 3D



Curvas
Matemáticas



E MUITO MAIS!

38^a EDIÇÃO
ANO 17

2025

4 Editorial

5 Atuais integrantes do PET Matemática

8 Harmonia Celeste: quando os planetas se alinham

Por Amanda Monte de Souza

9 Tetração

Por Augusto Pozzebon de Oliveira,

10 Por que $2+2 = 4$?

Por Brenda Barichello Landim

11 Propriedades Fundamentais do Conjunto de Cantor

Por Fabiane Sene da Luz

12 Modelando ideias: uma introdução sobre como planejar e produzir objetos a partir da impressão 3D

Por João Fernando Reich Scezny

SUMÁRIO

14 Curvas Matemáticas

Por Júlia Poloniato de Salles

16 Uma introdução aos conjuntos de Julia e Mandelbrot

Por Mariana Tacques

18 Uma introdução às Equações de Navier-Stokes

Por Matheus Brum

A Poupança como uma Temática de Educação

Financeira Escolar no Ensino Fundamental

Por Matias Corrêa do Amaral

Funiculite em Equinos Castrados: Uma Revisão

sobre Diagnóstico, Causas e Tratamento

Por Nelsiele Rocha da Silva Vieira

22 Uma Breve Biografia de David Hilbert

Por Rafael Schwertner

23 Teorema do Produto de Cauchy: da teoria às

aplicações

Por Thalita Alves Veron

EDITORIAL

É com orgulho que o PET Matemática torna pública a **38ª edição** do **Jornal Upa Temática**, a primeira do ano de 2025. Esta edição aborda diversos assuntos de cunho matemático e totaliza **12 artigos publicados**, os quais foram elaborados por petianos ativos no programa e egressos.

Na matéria de capa, foi destacado o **InterPET realizado em agosto**, que contou com a parceria do grupo PET Ciências Agrárias – campus Frederico Westphalen, e abordou as mudanças climáticas no Rio Grande do Sul, tema especialmente relevante diante da crise climática que atingiu o estado em maio de 2024.

Além desse evento, aproveitamos este espaço para registrar também uma das atividades de **extensão** e uma de **ensino** desenvolvidas pelo grupo ao longo do primeiro semestre letivo de 2025.

Dessa forma, o PET Matemática seguiu desenvolvendo atividades de extensão em parceria com o **Centro de Referência Familiar Recanto do Sol (CEFASOL)**, com o objetivo de auxiliar crianças e adolescentes na aprendizagem de Matemática, por meio de aulas de reforço e atividades lúdicas. Além disso, foi realizado um **Minicurso de Python**, enquadrado no eixo de ensino, com o objetivo de familiarizar os calouros dos cursos de Matemática com a linguagem de programação Python, por meio de uma atividade prática envolvendo o tópico de função quadrática.

CEFASOL



MINICURSO DE PYTHON



Por fim, gostaríamos de compartilhar que ao início desse semestre ocorreu mais um processo seletivo para o ingresso de acadêmicos no grupo PET Matemática. Na oportunidade ingressaram **quatro novos petianos**, aos quais desejamos uma participação enriquecedora na sua formação profissional e pessoal!

ATUAIS INTEGRANTES DO PET MATEMÁTICA



Tutora desde dezembro/2023

Docente do Departamento de Matemática da UFSM

Faxinal do Soturno - RS



Petiana desde nov/22
Matemática - Bacharelado
8º semestre
Rosário do Sul - RS



Petiano desde abril/24
Matemática - Licenciatura
6º semestre
Santa Cruz do Sul - RS



Petiana desde jun/25
Matemática - Bacharelado
2º semestre
Cachoeira do Sul - RS



Petiana desde out/22
Matemática - Bacharelado
8º semestre
Coronel Bicaco - RS

ATUAIS INTEGRANTES DO PET MATEMÁTICA



Petiano desde jun/25
Matemática – Bacharelado
2º semestre
Uruguaiana – RS



Petiano desde jun/25
Matemática – Bacharelado
6º semestre
São Gabriel – RS



Petiano desde maio/24
Matemática – Licenciatura
4º semestre
Erechim – RS



Petiana desde nov/23
Matemática – Licenciatura
6º semestre
Pinhal Grande – RS



Petiana desde abril/24
Matemática – Licenciatura
9º semestre
Salto do Jacuí – RS

ATUAIS INTEGRANTES DO PET MATEMÁTICA

MATHEUS



Petiano desde maio/24
Matemática - Licenciatura
10º semestre
Unistalda - RS

MATIAS



Petiano desde maio/24
Matemática - Licenciatura
5º semestre
Bozano - RS

NELSIELE



Petiana desde abril/23
Matemática - Licenciatura
6º semestre
Restinga Sêca - RS

TALES



Petiano desde maio/25
Matemática - Licenciatura
2º semestre
Santa Maria - RS

THALITA



Petiana desde out/22
Matemática - Licenciatura
10º semestre
Tupanciretã - RS

Harmonia Celeste: Quando os Planetas se Alinham

Amanda Monte de Souza, *UFSM*.

IMAGINE olhar para o céu noturno e ver uma linha quase perfeita de planetas brilhando lado a lado. Esse fenômeno, conhecido como alinhamento planetário, é raro e fascinante. Cada planeta do Sistema Solar possui sua própria órbita, com tempos distintos de rotação e revolução. Isso significa que cada um tem dias e anos únicos, determinados pelo tempo que leva para girar em torno de si mesmo e para completar uma volta ao redor do Sol, isto é, os fenômenos de rotação e revolução. A saber, frequentemente se chama o movimento da Terra de translação, mas isso é um erro do ponto de vista físico, pois a palavra “translação” significa “movimento de um corpo em que todas as partículas têm em cada instante a mesma velocidade, e esta mantém uma direção constante”. Esta definição equivale a dizer que a translação é o deslocamento de um corpo, em movimento uniforme, ao longo de uma linha reta. Isso, obviamente, não é o comportamento da Terra ao redor do Sol.

Figura 1. Planetas e suas órbitas



Fonte: iStock by Getty Images (2020).

O alinhamento planetário é um termo usado em astronomia para descrever o evento quando vários planetas se agrupam em uma pequena área do céu. Os planetas do nosso Sistema Solar nunca formam uma linha perfeitamente reta no espaço, pois suas órbitas não encontram-se no mesmo plano. Todavia, em certos momentos, os planetas se agrupam suficientemente perto em um lado do Sol que aparecem juntos no céu. No ano de 2025, isto ocorre com mais precisão no dia 28 de fevereiro, onde os sete planetas - Mercúrio, Vênus, Marte, Júpiter, Saturno, Urano e Netuno - estão observáveis no céu, sendo Urano e Netuno visíveis apenas com uso de telescópios.

Supondo que estiverem bem alinhados, este fenômeno acontecerá novamente apenas 33.586.072.340.020.200 (trinta e três quatrilhões quinhentos e oitenta e seis trilhões setenta e dois bilhões trezentos e quarenta milhões vinte mil e duzentos) anos depois.

A previsão destes eventos pode ser obtida sem muitas dificuldades, utilizando a decomposição de fatores primos. Sabendo a duração dos anos de cada planeta, basta calcular o mínimo múltiplo comum (MMC) entre os elementos que

gostaríamos que se alinhasssem. O alinhamento dos planetas é ilustrado na Figura 2.

Figura 2. Alinhamento de Planetas



Fonte: Shutterstock (2024).

Com a tabela I observamos que enquanto a Terra dá uma volta em torno do Sol, Mercúrio já o fez 4,375 vezes (basta fazer 365 dividido por 88), por exemplo. Considerando que os 7 planetas se alinhem em 2025, isto acontecerá novamente em $2025 + mmc(88, 225, 687, 4.332, 10.760, 30.681, 60.190)$, ou seja, no ano 33.586.072.340.022.225 (trinta e três quatrilhões quinhentos e oitenta e seis trilhões setenta e dois bilhões trezentos e quarenta milhões vinte e dois mil e duzentos e vinte e cinco). Note que, por terem um tempo de revolução menor, Mercúrio e Vênus poderão estar alinhados em $2025 + mmc(88, 225) = 2025 + 19800 = 21825$.

Tabela I: Período de revolução dos planetas.

Planeta	Período de revolução (dias terrestres)
Mercúrio	88
Vênus	225
Marte	687
Júpiter	4.332
Saturno	10.760
Urano	30.681
Netuno	60.190

É importante observar que estes alinhamentos e outros fenômenos nas órbitas dos planetas não afetam a atmosfera da Terra, apenas nos proporcionam a experiência de observar a beleza desses corpos celestes.

Referências:

- [1] **PlanetáRio**, Disponível em: <https://encurtador.com.br/IeRE1>. Acesso em: 09 jan. 2025.
- [2] **KhanAcademy**, Disponível em: <https://encurtador.com.br/1EAqd>. Acesso em: 09 jan. 2025.
- [3] **Vito Technology, Inc.**, Disponível em: <https://encurtador.com.br/J2T7a>. Acesso em: 09 jan. 2025.

Tetração

Augusto Pozzebon de Oliveira, *UFSM*.

Você já ouviu falar sobre a tetração, também conhecida como hiper-4? A tetração é um hiper operador, o primeiro após a exponenciação. Em 1947, o matemático inglês Rubem Louis Goodstein (Figura 1) criou um método para nomear as hiperoperações, sendo o prefixo grego do “nível” do hiper operador mais o sufixo “-ção”.

Figura 1. Matemático Rubem Louis Goodstein



Fonte: Google Imagens (2025).

Como a exponenciação representa o “nível três”, o próximo termo foi batizado de *tetra* (“quarto nível”), mais o sufixo “-ção”, assim surgindo a palavra **tetração**. Além disso, uma notação foi criada para expressar esses números muito grandes de forma compacta.

Mas, como funciona essa notação? É bem simples, a tetração é representada da seguinte forma:

$${}^n a = a^{a^{\dots^a}}$$

Onde a é exponenciado a si mesmo n vezes.

Ademais, é definida dessa maneira:

Definição: Para qualquer número real positivo $a > 0$ e inteiro não-negativo $n \geq 0$, definimos ${}^n a$ por:

- ${}^n a = 1$, se $n = 0$;
- ${}^n a = a({}^{n-1} a)$, se $n > 0$.

Para a realização do cálculo devemos respeitar a exponenciação, que deve ser feita da direita para a esquerda. Observe o exemplo abaixo para melhor entendimento.

$$\begin{aligned} {}^4 2 &= 2^{2^{2^2}} \\ &\Rightarrow 2^{(2^{(2^2)})} = 2^{(2^4)} \\ &\Rightarrow 2^{(16)} = 65536. \end{aligned}$$

Perceba que a tetração é diferente de

$${}^4 2 \neq [(2^2)^2]^2.$$

Pois,

$$\begin{aligned} [(2^2)^2]^2 &= 2^{2 \cdot 2 \cdot 2} \\ &\Rightarrow 2^8 = 256. \end{aligned}$$

Essa diferença ocorre, visto que a regra de partir a exponenciação de cima para baixo não foi respeitada.

Há também algumas outras notações relacionadas à tetração:

- $a \uparrow\uparrow n$, chamada de Notação de Knuth;
- $a \rightarrow n \rightarrow 2$, chamada de Notação de seta encadeada de Conway;
- ${}^n a = \exp_a^n(1)$, chamada de Notação da exponencial iterada;
- $a^{(4)} n$, *hyper*₄(a, n), chamado de Notação de hiper operador.

Agora, voltando no exemplo anterior, substituindo $a = 2$ por $a = 3$, ou seja, ${}^4 3$. Qual o resultado dessa conta?

Note que,

$$\begin{aligned} {}^4 3 &= 3^{3^{3^3}} \\ &\Rightarrow 3^{3^{27}} = 3^{7.625.597.484.987}. \end{aligned}$$

Com essa simples mudança, obtém-se um número extremamente grande. Esse é o poder da tetração, uma notação simples que condensa um massivo número.

Infelizmente, apesar de ser extremamente interessante, suas aplicações são bastante limitadas. Atualmente, a teoria é explorada principalmente na área de Matemática Pura.

E aí, vocês gostaram de saber mais sobre os hiper operadores, em especial, sobre a tetração? É impressionante a rapidez com que os números crescem nessa operação. Se achou interessante, não pare por aqui, há muito mais para explorar sobre o hiper-4 e seus sucessores. Boa sorte.

Referência:

- [1] GOODSTEIN, R. L. **Transfinite ordinals in recursive number theory**. Journal of Symbolic Logic, v. 12, n. 4, p. 123-129, dez. 1947.

Por que $2+2 = 4$?

Brenda Barichello Landim, *UFSM*.

MUITAS vezes nós matemáticos já nos deparamos com brincadeiras e/ou piadas do tipo “por que $1 + 1 = 2$?” ou “por que $2 + 2 = 4$?”? Você, em algum momento, já se perguntou porquê isso acontece? Por que aprendemos desde crianças a somar da forma que somamos? Como toda teoria matemática, existe uma justificativa por trás disso e eu vou explicar um pouquinho para vocês sobre ela nesse artigo!

Primeiramente, temos que olhar para o conjunto dos Números Naturais \mathbb{N} e a forma como este foi construído. Conforme Lima (2014), ele pode ser caracterizado por três fatos, chamados Axiomas de Peano:

1. Existe uma função injetiva $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$. A imagem $s(n)$ de cada número natural n chama-se o sucessor de n .
2. Existe um único número natural $1 \in \mathbb{N}$ tal que $1 \neq s(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
3. Se um conjunto $X \subset \mathbb{N}$ é tal que $1 \in X$ e $s(X) \subset X$ (isto é, $n \in X \Rightarrow s(n) \in X$) então $X = \mathbb{N}$.

Com menos rigor, podemos reformular esses três fatos da seguinte forma:

1. Todo número natural tem um sucessor, que ainda é um número natural; além disso, números diferentes têm sucessores diferentes.
2. Existe um único número natural 1 que não é sucessor de nenhum outro.
3. Se um conjunto de números naturais contém o número 1 e contém também o sucessor de cada um dos seus elementos, então esse conjunto contém todos os números naturais.

Perceba que neste caso, não consideramos o 0 como elemento de \mathbb{N} .

Dessa forma, a partir desses axiomas, podemos definir duas operações para o conjunto dos naturais: adição e a multiplicação. Nesse sentido, a adição associa a um par (m, n) a sua soma $m + n$ e a multiplicação associa esse par ao seu produto $m * n$, onde m, n são números naturais. De forma mais rigorosa, definimos a adição, $+ : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, de modo recorrente, por:

- i. $\forall n \in \mathbb{N}, n + 1 = s(n)$
- ii. $\forall m, n \in \mathbb{N}, m + s(n) = s(m + n)$

E, a multiplicação, $* : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, também de modo recorrente, definimos por:

- i. $\forall n \in \mathbb{N}, n * 1 = n$
- ii. $\forall m, n \in \mathbb{N}, m * s(n) = (m * n) + n$

Agora que já temos essas duas operações bem definidas, podemos pensar em responder a pergunta “por que $2+2 = 4$?”? Ou, de forma geral, “como se soma?”.

Para isso, perceba que a definição nos garante que somar 1 a um número resulta no seu sucessor. Então:

- $1 + 1 = 2$ pois 2 é o sucessor do 1 ;

- $3 + 1 = 4$ pois 4 é o sucessor do 3 .

Acho que deu para entender a jogada né? Se somou 1 , então temos um sucessor! Mas, e quando somamos mais que 1 ? Por exemplo, quando queremos somar $4 + 3$? Vejamos o que a definição nos diz!

Pelo item ii. temos que a soma se dará da seguinte forma:

- $4 + 3 = 7$ pois 7 é o sucessor do sucessor do sucessor do 4 . Veja:

$$4 + 3 = 4 + (2 + 1) = (4 + 2) + 1 = 6 + 1 = 7$$

Perceba que só sabemos operar para encontrar o sucessor, ou seja, só sabemos somar 1 !

Vamos tomar outro exemplo:

- $2 + 3 = 5$ pois 5 é o sucessor do sucessor do sucessor do 2 . Note que:

$$2 + 3 = 2 + (2 + 1) = (2 + 2) + 1 = 4 + 1 = 5$$

Então, de forma análoga, agora sabemos o porquê $2 + 2$ resulta em 4 , pois 4 é o sucessor do sucessor do 2 ! Veja:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

Mesmo que não soubéssemos disso formalmente, desde crianças aprendemos a ir somando “um por um”, seja utilizando os dedos, palitinhos e/ou material dourado. Sendo assim, aprendemos a ir somando sempre 1 para chegar ao sucessor de forma recorrente, bem como é na teoria!

Do mesmo modo, há uma justificativa do porquê a multiplicação, já mencionada nesse texto, é da forma que é. Como o foco do artigo é adição, vou dar apenas um exemplo de como é a multiplicação quando feita seguindo a rigor a definição:

- $2 * 2 = 4$, de fato pois $2 * 2 = (1 + 1) * 2 = 1 * 2 + 1 * 2 = 2 + 2$

E, como já vimos: $2 + 2 = 4$!

Repare que precisamos da adição para usar a definição de multiplicação, por isso na escola aprendemos primeiro a somar para só depois aprendermos a multiplicar, pois uma depende da outra!

Essa é apenas uma pequena curiosidade sobre as primeiras operações que aprendemos quando entramos na escola. Mas, não deixe de notar: até as coisas mais simples dentro da Matemática, como somar e multiplicar, possuem justificativas rigorosas e bem fundamentadas por trás, isso garante que a teoria funcione de forma exata!

Referências:

- [1] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: funções de uma variável**. Rio de Janeiro: IMPA, 2014. 198 p.

Propriedades Fundamentais do Conjunto de Cantor

Fabiane Sene da Luz, UFSM.

ESTE artigo busca explorar algumas das principais propriedades do Conjunto de Cantor, apresentado por Georg Cantor em 1883³, e representado por \mathcal{C} , sendo amplamente utilizado em Análise, Topologia e Teoria da Medida.

O conjunto de Cantor é um subconjunto do intervalo $I = [0, 1]$, obtido por meio da remoção sucessiva do terço central de cada subintervalo. Neste artigo, destacamos algumas das suas propriedades fundamentais, como o fato de ser fechado, compacto, não enumerável, possuir interior vazio e ter medida de Lebesgue nula.

Os elementos desse conjunto possuem **expansão ternária** (base 3)¹ utilizando apenas os dígitos 0 e 2, ou seja:

$$\mathcal{C} = \left\{ x \in [0, 1] : x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i_n}{3^n}, i_n \in \{0, 2\} \right\}. \quad (1)$$

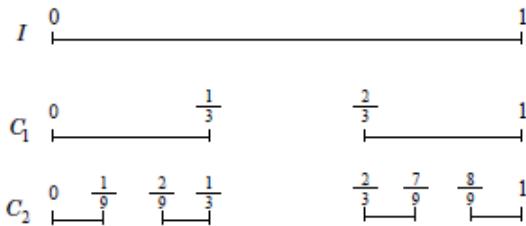
Cada número no conjunto de Cantor pode ser escrito em base 3 sem o dígito 1, pois os números que contêm esse dígito são exatamente aqueles removidos durante a construção do conjunto. Desta forma, sua representação ternária contém apenas zeros (0) e dois (2).

A construção do conjunto de Cantor ocorre por meio da remoção sucessiva do terço aberto central do intervalo $[0, 1]$ ¹. O conjunto final consiste nos pontos que nunca são eliminados nesse processo. Inicialmente, removemos o subintervalo $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, restando os intervalos $[0, \frac{1}{3}] \cup [\frac{2}{3}, 1]$, formando assim o conjunto \mathcal{C}_1 . Posteriormente, removemos o terço central de cada intervalo remanescente, obtendo $\mathcal{C}_2, \mathcal{C}_3, \dots$, continuando o processo infinitamente (conforme ilustrado na figura 1). Assim, temos:

$$I \supset \mathcal{C}_1 \supset \mathcal{C}_2 \supset \mathcal{C}_3 \dots \supset \mathcal{C}_{n-1} \supset \mathcal{C}_n \supset \dots \quad (2)$$

onde \mathcal{C}_n é constituído pelos pontos de \mathcal{C}_{n-1} excluindo os terços médios de cada intervalo.

Figura 1. Construção do conjunto de Cantor \mathcal{C}



Fonte: Alves¹ (2008).

O conjunto de Cantor é **fechado**, pois a união dos intervalos abertos removidos forma um conjunto aberto¹, logo seu complemento é fechado.

Além disso, ele é **compacto**, visto que é um subconjunto fechado e limitado do espaço métrico $[0, 1]$. Pelo Teorema de

Heine-Borel⁵, um subconjunto de \mathbb{R} é compacto se e somente se for fechado e limitado. Como \mathcal{C} satisfaz essas condições, concluímos que ele é compacto.

Outra propriedade essencial de \mathcal{C} é ser **não enumerável**, ou seja, não há uma bijeção $f : \mathbb{N} \mapsto \mathcal{C}$ ⁴. Isso ocorre porque cada elemento de \mathcal{C} pode ser representado por uma sequência infinita de escolhas entre 0 e 2 na expansão ternária. O número de tais sequências é equivalente ao número de subconjuntos dos números naturais, que possui a cardinalidade do contínuo. Como o intervalo $[0, 1]$ é não enumerável, segue que \mathcal{C} também é.

Destaca-se ainda que o conjunto de Cantor tem **interior vazio**, ou seja, $\text{int}(\mathcal{C}) = \emptyset$. Se contivesse um intervalo aberto, conteria algum subintervalo de $[0, 1]$, mas qualquer intervalo aberto inclui pontos removidos na construção, impossibilitando sua presença em \mathcal{C} .

Araújo et al. demonstram que o conjunto de Cantor tem **medida de Lebesgue nula**, ou seja, ocupa nenhum espaço na reta real, apesar de conter infinitos pontos. Isso se dá porque, em cada etapa, removemos um terço dos intervalos remanescentes. Como a soma das medidas dos intervalos removidos tende a 1, a medida do conjunto restante é 0.

Conclui-se, portanto, que o conjunto de Cantor desafia a intuição matemática, pois, apesar de ser não enumerável como $[0, 1]$, possui medida nula. Além disso, ele contém pontos isolados e de acumulação simultaneamente, tornando-se um exemplo peculiar de espaço topológico.

Em Análise Real, ele é utilizado para construir funções contínuas não diferenciáveis em nenhum ponto, como a função ternária de Cantor¹.

Por fim, o conjunto de Cantor possui aplicações na Teoria da Medida, Teoria dos Conjuntos, computação, criptografia, física e sistemas dinâmicos, incluindo estruturas com comportamento caótico.

Referências:

- [1] ALVES, M. T. **O conjunto de Cantor.** Trabalho de Conclusão de Graduação em Matemática – Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2008.
- [2] ARAUJO, W. V. de, et al.. **O conjunto de Cantor e a função de Cantor-Lebesgue.** Brazilian Journal of Development, v. 8, n. 7, p. 53080–53088, 2022.
- [3] DALPIAZ, M. R. **Um estudo sobre fractais: origem e proposta didática para aplicação em aula.** Dissertação de Mestrado em Matemática – Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Curitiba, 2016.
- [4] LIMA, Elon Lages. **Análise Real: Funções de uma variável.** Rio de Janeiro: IMPA, 2009. 198 p.
- [5] ZAHN, M. **Análise real.** São Paulo: Editora Blucher, 2022. E-book. p.210. ISBN 9786555065398.

Modelando ideias: uma introdução sobre como planejar e produzir objetos a partir da impressão 3D

João Fernando Reich Scezny, UFSM.

A impressão 3D pode ser utilizada para criar infinitos objetos, desde os mais simples até os mais complexos. Neste artigo, abordaremos o básico das principais etapas da impressão 3D (modelagem, fatiamento e impressão), fornecendo dicas e truques para auxiliar na realização do processo. Ao longo do texto, acompanhamos a criação de uma ficha customizada, que é exemplificada pela "Figura 1". Além disso, aparecerão alguns nomes de programas gratuitos que você pode instalar ou acessar para preparar os seus próprios projetos.

Figura 1. Ficha Exemplo



Fonte: Figura usada na 15º questão da Prova Mirim da OBMEP (2023).

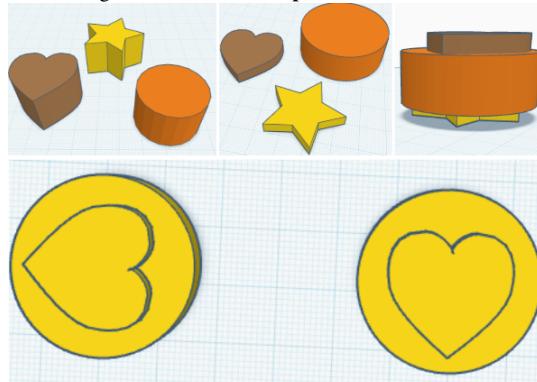
Antes de irmos para a impressora, devemos produzir uma modelagem digital do objeto desejado. Através de um *software* de modelagem qualquer, conseguiremos criar do zero várias formas. Quando desejamos imprimir objetos relativamente simples (paralelogramos, números ou letras), muitas vezes, estas formas poderão ser encontradas prontas dentro do próprio *software*. Entretanto, nem sempre pretendemos construir objetos elementares, portanto, precisaremos usar as ferramentas disponibilizadas no programa para mesclar diferentes formas e criar novos objetos.

Por exemplo, vamos pensar no processo utilizado na criação da ficha apresentada na "Figura 1":

- Escolher um cilindro para ser o conector das duas faces;
- Encontrar um sólido com formato de estrela;
- Encontrar um sólido com formato de coração
- Ajustá-las conforme as proporções desejadas;
- Posicionar as três peças de acordo com o estipulado na figura, criando um relevo a partir das formas de estrela e o coração;
- Selecionar todas as peças;
- Aplicar a ferramenta "agrupar objetos".

Desta forma, usamos algumas das ferramentas oferecidas no programa para gerar um objeto original, distindo dos disponíveis inicialmente. Em seguida, na "Figura 2", será possível observar um esboço simples do procedimento adotado para a criação da nova figura.

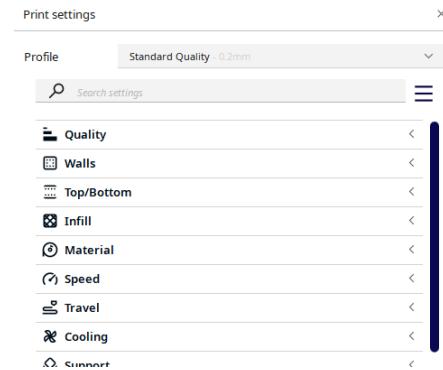
Figura 2. Modelagem de "Ficha Exemplo"



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Finalizada a modelagem, podemos exportar o arquivo do objeto para a próxima etapa, em um *software* de fatiamento de sua preferência. O processo de fatiamento tem como finalidade determinar todas as características que você pretende atribuir ao objeto, por exemplo: tamanho, tempo de impressão, temperatura do material e da impressora durante a impressão, suportes, qualidade do acabamento, entre outros. Em outras palavras, o fatiamento funciona como um intermediador, interpretando a modelagem e descrevendo em formato de códigos todos os passos a serem seguidos pela impressora. Observe, na "Figura 3", uma lista de possíveis configurações que podem ser alteradas através do programa.

Figura 3. Configurações de Fatiamento



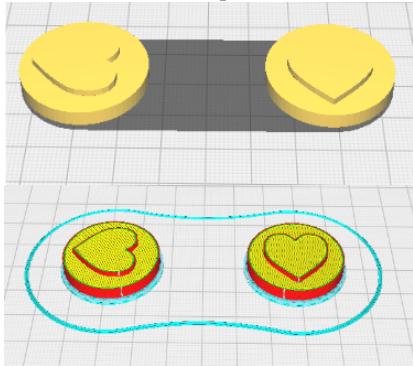
Fonte: Captura de tela do software Cura 3D, versão 5.9.1, realizada em 25. fev. 2025.

Inclusive, é importante que você conheça previamente o material a ser adotado na impressão, pois algumas características como a temperatura de derretimento, varia de acordo

com o plástico escolhido. No geral, modelamos com dois tipos plásticos: PLA (de fácil impressão e conveniente para protótipos ou objetos simples) ou ABS (mais resistente ao calor e ideal para peças que precisam de maior durabilidade). Vale salientar, que caso uma temperatura inadequada seja configurada, há grandes chances de o objeto sair completamente desconfigurado na última etapa.

Portanto, devemos ficar muito atentos às alterações que realizamos durante o fatiamento, pois existe a possibilidade de estabelecermos configurações incompatíveis com a impressora. Definir alterações inadequadas pode acarretar em complicações durante o processo de impressão, resultando em objetos defeituosos ou inacabados. Na "Figura 4", é apresentado um modelo de fatiamento, baseado no exemplo inicial.

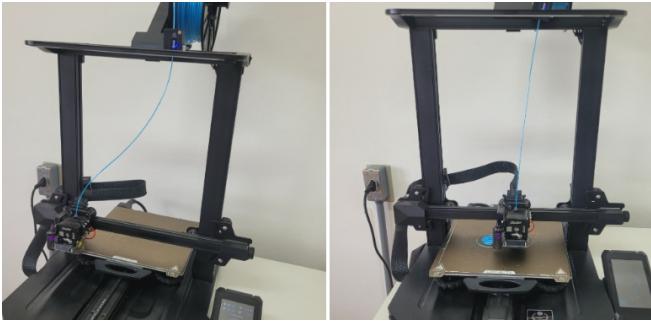
Figura 4. Fatiamento de "Ficha Exemplo"



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Para a última etapa, vamos exportar o arquivo do fatiamento para um cartão de memória compatível com a impressora 3D. Na parte superior da impressora podemos mudar o rolo de filamento plástico. Inserindo o cartão de memória e conectando o filamento ao bico da impressora, basta selecionar o arquivo desejado que a máquina iniciará o processo de impressão, como representado pela "Figura 5".

Figura 5. Começo da Impressão de "Ficha Exemplo"

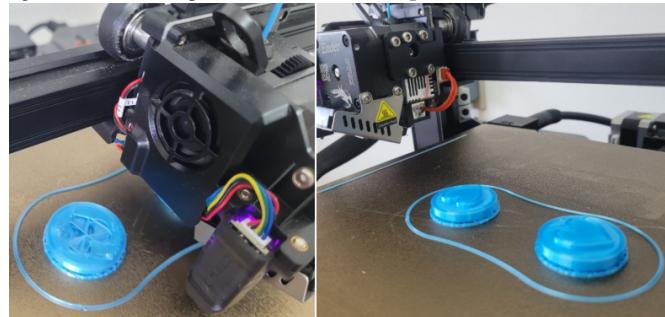


Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Nos primeiros minutos, a mesa e o bico irão atingir a temperatura determinada no processo de fatiamento. Em seguida, o bico começará a derreter o filamento ao decorrer da mesa, formando as peças através de camadas. O visor digital demarca o andamento percentual da impressão, sendo possível visualizar o tempo restante e a conclusão do projeto. Quando

isto acontecer, basta esperar alguns minutos para a mesa esfriar levemente, possibilitando a remoção da base de impressão e, posteriormente, do objeto. Note que na "Figura 6", o bico da impressora retorna para a sua posição inicial.

Figura 6. Fim da Impressão de "Ficha Exemplo"



Fonte: Elaborado pelo autor (2025).

Observação: Se o projeto chegar à etapa final e apresentar defeitos, é importante não ser precipitado ao assumir a origem do problema, culpando uma etapa específica. Por exemplo, imagine que um objeto esteja na metade do processo de impressão e comece a se soltar da mesa. Parece tentador atribuir a culpa à impressora 3D, certo? Não necessariamente! Embora a mesa possa realmente soltar a peça em determinadas situações, também pode haver uma má configuração na etapa de fatiamento, caso a temperatura tenha sido ajustada abaixo do ideal. Ou seja, ao nos deparamos com uma falha, é válido analisarmos todo o trabalho desenvolvido, na tentativa de identificar diferentes causas.

A partir da leitura deste artigo, espero ter lhes dado um breve vislumbre sobre a impressão 3D. Entretanto, muitas ocasiões e empecilhos ainda ocorrerão para quem deseja se aventurar neste mundo, pois não há como abranger todas as possíveis adversidades em uma folha de jornal. Logo, tenham em mente que muitos objetos sairão "diferentes do esperado" e a prática é essencial para compreender os erros ao longo do processo.

Referências:

- [1] OBMEP – Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas. Figura usada na 15º questão da prova mirim. 2023. Disponível em: <https://www.obmep.org.br>. Acesso em: 10 fev. 2025.
- [2] Scezny, João. Modelagem de "Ficha Exemplo". Criado no software Tinkercad. 2025.
- [3] Scezny, João. Modelagem de "Ficha Exemplo". Criado no software Ultimaker Cura. 2025.

Curvas Matemáticas

Júlia Poloniato de Salles, *UFSM*.

O presente artigo tem como objetivo mostrar a aplicabilidade das curvas planas no nosso dia-a-dia por meio do brinquedo Espírografo. Este consiste em um conjunto de peças de plástico: anéis, rodas, triângulos, entre outras formas dentadas com a finalidade das suas engrenagens encaixarem e não deslizarem formando atrativas curvas matemáticas.

Desde 1908 já existiam brinquedos com engrenagens, como, por exemplo, *The Marvelous Wondergraph*. Entre os anos de 1881 e 1900 o Espírografo foi inventado pelo matemático Bruno Abdank-Abakanowicz que não viu sua invenção ser desenvolvida e conhecida através da apresentação do *Spirograph*, pela primeira vez, na Feira Internacional de Brinquedos de Nuremberg, em 1965, feita por Denys Fisher. Assim, Fisher o produziu na Grã-Bretanha e vendeu seus direitos para a empresa *Kenner Products*, que inicia suas vendas nos Estados Unidos em 1966.

Para manipulá-lo basta fixar uma peça de plástico sobre uma folha de papel. Em seguida, pegamos outra parte e encaixamos na peça já fixada na folha. Após, inserimos uma caneta e localizamos sua ponta num furo da peça que ficará móvel e começamos a girá-la. Desta forma, ficará um rastro da caneta no papel, ou seja, uma das curvas formada pelo brinquedo, como mostra a Figura 1.

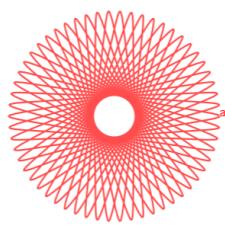
Figura 1. Exemplo de Espírografo



Fonte: Imagens Google.

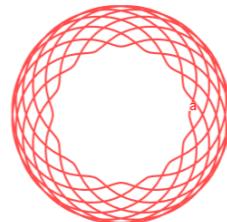
Mas o que este brinquedo tem a ver com Matemática? Ora, ele é capaz de produzir dois tipos de curvas, como mostram as Figuras 2 e 3:

Figura 2. Exemplo de Hipotrocoide



Fonte: Arquivo pessoal.

Figura 3. Exemplo de Epitrocoide



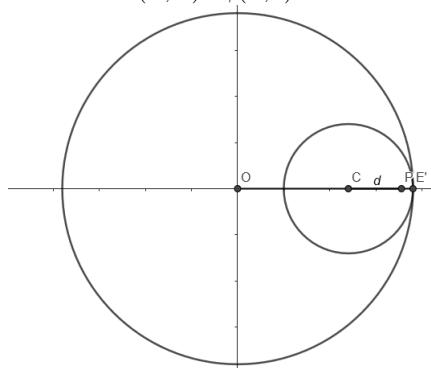
Fonte: Arquivo pessoal.

Contudo, há diferença nessas duas curvas. A Hipotrocoide (Figura 2) é uma curva plana descrita pela trajetória de um ponto P, que está no interior de uma circunferência de raio r que tangencia e flui dentro de outra circunferência fixa de raio R, onde $R > r > 0$. Similarmente ocorre na Epitrocoide (Figura 3), embora diferenciando a trajetória feita pelo ponto da circunferência móvel de raio r que gira externamente à circunferência fixa de raio R.

Sob esse viés, podemos descobrir o valor do ponto P em qualquer instante, para isso precisamos encontrar as coordenadas da curva em função de um parâmetro, a fim de definir a unicidade de qualquer ponto, ou seja, suas equações paramétricas: $P(t) = (x(t), y(t))$.

Assim, considere uma circunferência $\phi(C, r)$, onde d é a distância de P até o centro. Suponha que ϕ tangencie uma circunferência $\lambda(O, R)$, fixa centrada na origem, de tal forma que o centro C esteja sobre o eixo O_x .

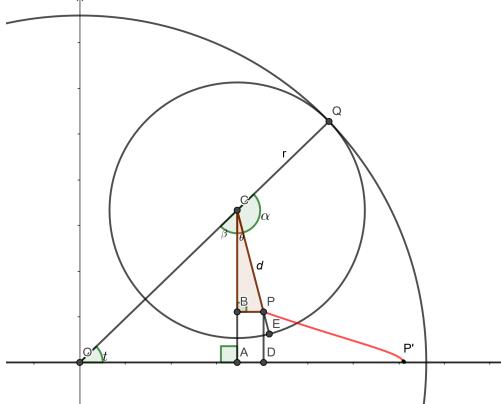
Figura 4. Circunferências $\lambda(O, R)$ e $\phi(C, r)$



Fonte: Arquivo pessoal.

Desse modo, quando ϕ começa a girar internamente, sem deslizar tangenciando λ é notório a trajetória de P, que forma $\angle QOE'$, cuja medida em radianos é o parâmetro t .

Figura 5. Exemplo de Espirógrafo



Fonte: Arquivo pessoal.

Dessa maneira, podemos tirar algumas relações:

$$\begin{cases} x(t) = \overline{OD} = \overline{OA} + \overline{AD} \\ y(t) = \overline{PD} = \overline{BA} \end{cases}$$

Note que, $\overline{AD} = \overline{BP}$ e $\overline{BA} = \overline{CA} - \overline{CB}$, assim temos:

$$\begin{cases} x(t) = \overline{OA} + \overline{BP} \\ y(t) = \overline{CA} - \overline{CB} \end{cases}$$

Em relação ao triângulo OCA : $\overline{OC} = \overline{OQ} - \overline{CQ} = R - r$; $\overline{OA} = (R - r) \cos t$; $\overline{AC} = (R - r) \operatorname{sen} t$, portanto:

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + \overline{BP} \\ y(t) = (R - r) \operatorname{sen} t - \overline{CB} \end{cases}$$

Em relação ao triângulo CBP : $\overline{BP} = d \cdot \operatorname{sen}(\theta)$; $\overline{CB} = d \cdot \cos(\theta)$. Desse modo:

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ y(t) = (R - r) \operatorname{sen} t - d \cdot \cos(\theta) \end{cases}$$

Entretanto, não é possível escrever $P = (x(t), y(t))$ em função de θ . Diante disso, precisamos encontrar θ em relação a t . Por definição, o comprimento do arco $OE' = R \cdot t$. Mas, os arcos $QE = QE'$, e $QE = r \cdot \alpha$, então temos:

$$QE' = QE \implies$$

$$R \cdot t = r \cdot \alpha \implies$$

$$\alpha = \frac{R \cdot t}{r}$$

No triângulo OCA :

$$\frac{\pi}{2} + \beta + t = \pi \implies$$

$$\beta = \pi - \frac{\pi}{2} - t \implies$$

$$\beta = \frac{\pi}{2} - t$$

Os $\angle OCE$ e $\angle ECQ$ formam um par linear, ou seja, $\beta + \theta + \alpha = \pi$. Substituindo os valores encontrados dos ângulos, teremos:

$$\begin{aligned} \beta + \theta + \alpha &= \pi \implies \\ \left(\frac{\pi}{2} - t \right) + \theta + \left(\frac{R \cdot t}{r} \right) &= \pi \implies \\ \theta = \pi - \frac{\pi}{2} + t - \frac{R \cdot t}{r} &\implies \\ \theta &= \frac{\pi}{2} + \left(\frac{(r - R)t}{r} \right) \end{aligned}$$

Descoberto o valor de θ podemos substituí-lo em $x(t)$ e $y(t)$:

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{(r - R)t}{r} \right) \\ y(t) = (R - r) \operatorname{sen} t - d \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} + \frac{(r - R)t}{r} \right) \end{cases}$$

Usando as seguintes igualdades trigonométricas:

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right) = -\operatorname{sen}(\gamma)$$

$$\operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \gamma \right) = \cos(\gamma)$$

$$\cos(-\gamma) = \cos(\gamma)$$

$$\operatorname{sen}(-\gamma) = -\operatorname{sen}(\gamma)$$

Iremos obter a parametrização da hipotrocoide:

$$\begin{cases} x(t) = (R - r) \cos t + d \cdot \cos \left(\frac{(R - r)t}{r} \right) \\ y(t) = (R - r) \operatorname{sen} t - d \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{(R - r)t}{r} \right) \end{cases}$$

Analogamente, fazendo passos similares para a Epitrocoide chegaremos na sua parametrização:

$$\begin{cases} x(t) = (R + r) \cos t - d \cdot \cos \left(\frac{(R + r)t}{r} \right) \\ y(t) = (R + r) \operatorname{sen} t - d \cdot \operatorname{sen} \left(\frac{(R + r)t}{r} \right) \end{cases}$$

Logo, podemos notar que as equações paramétricas não são tão atrativas quanto seus desenhos, os quais seriam difíceis de realizar à mão pela periodicidade, porém isso é diálogo para outro artigo.

Referências:

- [1] Juscelino Wanderson de Oliveira, Curvas Planas Parametrizadas, Curvas Cicloidais e Espirógrafo; 2018. Disponível em: <https://repositorio-aberto.up.pt/bitstream/10216/118705/2/312142.pdf>
- [2] Espirógrafo, em WIKIPÉDIA: a encyclopédia livre; 2023. Disponível em: <https://pt.wikipedia.org/wiki/Espirógrafo>

Uma introdução aos conjuntos de Julia e Mandelbrot

Mariana Tacques, *UFSM*.

O conjunto de Julia associado a um polinômio qualquer $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n$ definido no plano complexo \mathbb{C} com coeficientes complexos e $n \geq 2$, criado em 1918 por Gaston Julia (1893-1975), é um objeto fractal com uma estética e propriedades intrigantes. Cada conjunto de Julia é obtido a partir do estudo das iteradas de um polinômio da forma $f(z)$, possuindo assim, conexão com a teoria de Sistemas Dinâmicos.

Para compreender a definição do conjunto de Julia, inicialmente vejamos o que é a órbita de um ponto. Considere um polinômio qualquer $f(z)$ no plano complexo e fixado $z_0 \in \mathbb{C}$, a **órbita** de z_0 é o conjunto $\mathcal{O}(z_0) = \{f^n(z_0) : \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} = \{z_0, f(z_0), f^2(z_0), \dots, f^n(z_0), \dots\}$, onde $f^n = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{n \text{ vezes}}$. Por exemplo, a órbita do ponto 3 com

relação ao polinômio $f(z) = z^2$, é o conjunto $\mathcal{O}(3) = \{3, 9, 81, 6561, \dots\}$. Ainda, uma órbita é dita **finita** se possui um número finito de elementos, do contrário, é chamada de **infinita**.

Segundo Falconer (2003, p.215), fixado um polinômio $f(z)$ no plano complexo, o **conjunto de Julia** $J(f)$ de f é formado pela fronteira do conjunto de pontos cujas órbitas não escapam para o infinito, ou seja, $J(f) = \partial K(f)$, onde $K(f) = \{z \in \mathbb{C} : f^k(z) \not\rightarrow \infty\}$. Observe que, existem pontos cujas órbitas tendem ou não para o infinito. Para o polinômio $f(z) = z^2$, tem-se que $J(f) = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, isto é, o círculo unitário no plano complexo. Pode-se justificar que, para qualquer polinômio $f(z)$, os conjuntos $K(f)$ e $J(f)$ são não-vazios e compactos, com $J(f) \subset K(f)$.

O conjunto de Julia pode ser entendido como um conjunto repulsor dinâmico no plano complexo. Dessa forma, uma maneira eficaz de construir os conjuntos de Julia (sempre por meio de softwares) é colorir os pontos com uma cor x cujas órbitas são finitas, e colorir os pontos cujas órbitas são infinitas de cor y . O conjunto de Julia do polinômio escolhido é então, a fronteira entre as duas regiões.

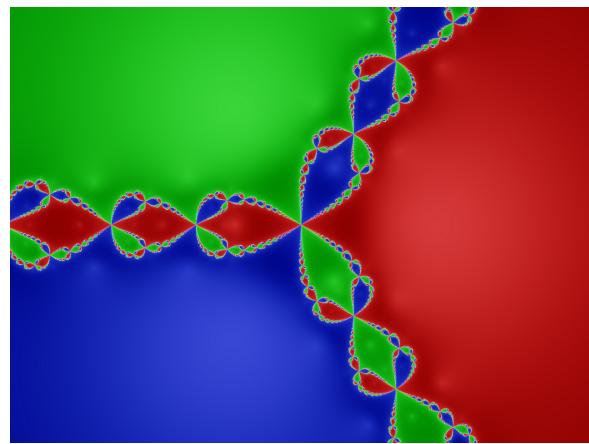
Segundo Layek (2015, p.597), para cada polinômio $f(z)$, o conjunto de Julia $J(f)$ é não enumerável, não contém pontos isolados e além disso, ou é totalmente conexo ou totalmente desconexo (essa propriedade de conexidade é também válida para o conjunto $K(f)$ associado). Ademais, possui a propriedade fractal de dimensão não inteira e autossimilaridade. Algumas destas propriedades são similares as apresentadas pelo Conjunto de Cantor, exemplo notório na teoria dos conjuntos fractais.

Os conjuntos do tipo $J(f)$ são estruturas onde podem ser explorados diversos conceitos da geometria fractal e dos sistemas dinâmicos, como a iteração de uma função com-

plexa, conexidade de conjuntos e comportamentos periódicos e caóticos, os quais são importantes propriedades dentro de tais estudos.

Quando aplicado em outros campos da matemática além de Geometria Fractal e Sistemas Dinâmicos, os polinômios complexos podem gerar novos conjuntos de Julia. Um exemplo disso se dá a partir do estudo do método de Newton sobre um polinômio complexo, sugerido inicialmente pelo matemático Arthur Cayley (1821-1895). Dado um polinômio $f(z)$ no plano complexo e denotando por $g(z)$ a função do método de Newton cujas iteradas geram as raízes de $f(z)$, ocorre que pontos fixos de $g(z)$ serão as raízes do polinômio $f(z)$ com uma propriedade especial: serão atratores! Isto significa que o plano complexo será dividido em regiões (as quais serão chamadas de **domínios de atração**) cujas órbitas dos pontos irão tender as raízes de $f(z)$. A fronteira entre essas regiões, será um conjunto de Julia associado a função $g(z)$. Na figura 3, está representado o conjunto de Julia gerado pelo método de Newton aplicado ao polinômio $f(z) = z^3 - 1$, cujas raízes são $1, e^{i2\pi/3}$ e $e^{i4\pi/3}$. O domínio de atração de $1, e^{i2\pi/3}$ e $e^{i4\pi/3}$ é a região em vermelho, verde e azul, respectivamente.

Figura 1: Método de Newton aplicado ao polinômio $f(z) = z^3 - 1$

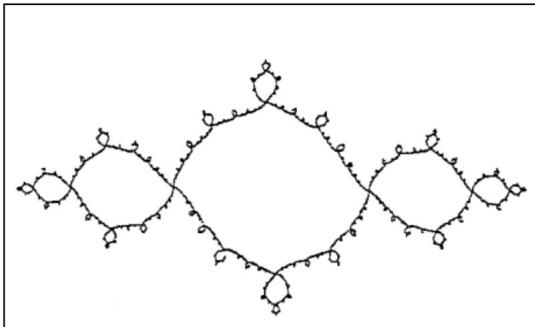


Fonte: FREITAS, Artur (2010).

A partir de agora, será considerado o conjunto de Julia definido a partir de um polinômio complexo quadrático da forma $f_c(z) = z^2 + c$, onde z e c são números complexos. Nesse contexto, c é considerado uma constante fixa e o conjunto de Julia associado será denotado simplesmente por J_c . Como citado anteriormente, a natureza dos conjuntos J_c , pode ser conexa ou totalmente desconexas. Como ilustração disso, nas Figuras 2 e 3 abaixo, considerou-se a constante

$c = 1 + 0.05i$ para gerar um conjunto conexo, e a constante $c = 0.66i$ para gerar um conjunto desconexo, respectivamente.

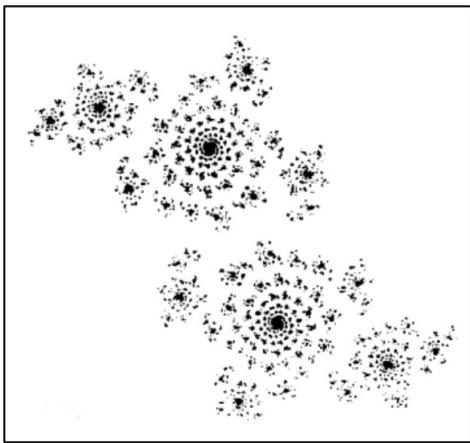
Figura 2: Conjunto conexo



Fonte: Falconer (2003)

Dado um polinômio $f_c(z)$, como determinar se o conjunto de Julia J_c associado é ou não conexo? Para responder isso, toma-se o conjunto de Mandelbrot M , criado em 1979 pelo considerado pai da geometria dos fractais Benoit Mandelbrot (1924-2010). Fixado um valor inicial $z_0 \in \mathbb{C}$, o conjunto de Mandelbrot M , é a região do plano complexo formada pelos parâmetros c cuja sequências definidas recursivamente por $z_{k+1} = z_k^2 + c$, com $k = 0, 1, 2, \dots$, não vão para infinito quando $k \rightarrow \infty$. Observe que, a órbita dos polinômios $f_c(z)$ satisfaz a equação de recorrência do conjunto de Mandelbrot M . Assim, como o conjunto de Julia J_c e o conjunto $K(f_c)$ são conexos ou desconexos simultaneamente (pois J_c é a fronteira de $K(f_c)$), segue que o conjunto de Mandelbrot é formado pelos valores de c onde J_c é conexo, isto é, $M = \{c \in \mathbb{C} : J_c \text{ é conexo}\}$.

Figura 3: Conjunto desconexo



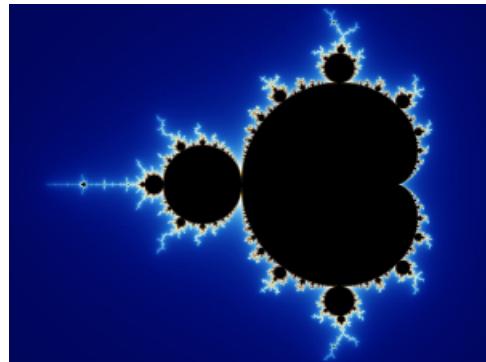
Fonte: Falconer (2003)

É possível caracterizar ainda o conjunto de Mandelbrot M como, a região do plano complexo formada pelos parâmetros c de modo que a órbita da origem $f_c^k(0)$ não tende para o infinito. Consequentemente, é necessário analisar apenas a órbita da origem de um polinômio $f_c(z)$, para determinar se o conjunto de Julia J_c associado é ou não conexo. A escolha da origem para essa caracterização não é arbitrária.

Está relacionada com o fato de a origem ser um (e único) ponto crítico de todos os polinômios $f_c(z)$.

É importante ressaltar que os conjuntos de Julia e o conjunto de Mandelbrot são determinados a partir de variáveis distintas. Cada conjunto de Julia J_c está associado às órbitas de um único polinômio $f_c(z)$, onde este varia em todo o plano complexo. Ou seja, para cada parâmetro c , determinase um único conjunto de Julia. Por outro lado, o conjunto de Mandelbrot M é um subconjunto dos parâmetros c do plano complexo e ele não está relacionado com as órbitas da equação de recorrência que o define. O visual de tal conjunto (denotado pela Figura 4) é composto por um cardióide ao centro que é cercado por estruturas que se assemelham á brotos em sua borda. Estas estruturas são, em menor escala, uma cópia da imagem principal, ou seja, (M) é um conjunto que exibe a propriedade de autossimilaridade.

Figura 4: Conjunto de Mandelbrot



Fonte: Universidade Federal de Juiz de Fora (2020).

Por fim, entende-se que este estudo introdutório sobre tais conjuntos é imprescindível para posteriores formalizações de conceitos que foram explicitados neste texto. Além disso, o estudo dos conjuntos de Julia e Mandelbrot estão fortemente ligados ao método de Newton Fractal citado acima, sendo de grande valia o conhecimento de tais estruturas para posteriores avaliações de como alguns polinômios reagem a este método, quais propriedades se mantém e até mesmo a verificação da possibilidade de gerar ou não imagens parecidas com $f(z)$ e (M) .

Referências:

- [1] LAYEK.C.G. An Introduction To Dynamical Systems and Chaos. Bankura: Springer, 2015.
- [2] De onde veio o Conjunto de Mandelbrot? Fractalize: Modelagem Fractal nas Ciências e Engenharias, 23 dez. 2020. Disponível em: <https://www2.ufjf.br/fractalize/2020/12/23/conjunto-de-mandelbrot/>. Acesso em: 13 fev. 2025.
- [3] FREITAS, Artur. Um estudo do método de Newton fractal para resolução de equações (2010).
- [4] FALCONER, K. Fractal Geometry: Mathematical Foundations and Applications. John Wiley Sons, 2003.

Uma Introdução às Equações de Navier-Stokes

Matheus Brum, *UFSM*.

Este artigo tem como objetivo apresentar as Equações de Navier-Stokes e suas aplicações em problemas de Dinâmica de Fluidos. Nesse contexto, destaca-se que, em 1822, o engenheiro e físico francês *Claude-Louis Navier* (1785–1836) deduziu um sistema de equações que descrevia, de forma aproximada, o comportamento de certos fluidos. Vinte anos depois, o matemático e físico irlandês *Sir George Gabriel Stokes* (1819–1903), partindo de um modelo distinto, aprimorou essa formulação. Como resultado, as equações passaram a ser conhecidas como Equações de Navier-Stokes, em homenagem a ambos.

Além disso, as Equações de Navier-Stokes são Equações Diferenciais Parciais (EDPs) que descrevem o escoamento de fluidos e são amplamente utilizadas na modelagem do clima, das correntes oceânicas e entre outros. No entanto, na prática, apenas os casos mais simples podem ser resolvidos analiticamente, pois essas são EDPs não-lineares na maioria das situações reais, o que dificulta a obtenção de solução.

Quanto à dedução dessas equações, é fundamental estabelecer algumas definições essenciais. Dessa forma, existem duas maneiras de descrever o movimento de um fluido, a primeira delas é a chamada *descrição lagrangiana*, a qual acompanha o movimento de cada partícula individualmente.

Uma abordagem alternativa para descrever a trajetória de uma partícula é considerar a velocidade $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ da partícula na posição \mathbf{x} em um instante t . A função \mathbf{v} chama-se e esta é a *descrição euleriana*.

Outra definição importante é a da *Derivada Material* de uma função $f(\mathbf{x}, t)$, denotada por $\frac{Df}{Dt}$, que representa a taxa de variação de f ao longo da trajetória da partícula no instante t . A Derivada Material é calculada da seguinte forma:

$$\frac{Df}{Dt} = \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\partial f}{\partial t}$$

onde ∇ denota o gradiente e \cdot o produto interno.

Além disso, consideremos o *Teorema do Transporte*, que permite calcular a taxa de variação de uma propriedade de um fluido. Seja

$$\phi : \Omega \times (0, T) \rightarrow \Omega \times (0, T)$$

um difeomorfismo, f uma função regular definida em $\Omega \times (0, T)$, e $\Omega_t = \phi(\Omega_0, t)$ uma região onde se pode aplicar o Teorema da Divergência. Então, temos:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f(x, t) dx = \int_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \nabla \cdot \mathbf{v} \right) (x, t) dx$$

onde $\nabla \cdot \mathbf{v}$ é a divergência do campo de velocidade \mathbf{v} .

Ademais, a definição da *Conservação da Massa* expressa o fato de que o fluido é um meio contínuo e é descrita da seguinte forma:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \quad (1)$$

A partir desta equação, temos que se ρ for constante, então o fluido é incompressível, ou seja, $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$.

Por fim, consideramos a *Conservação do Momento*, a qual é descrita pela seguinte equação:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} + \operatorname{Div} \boldsymbol{\mathcal{S}} \quad (2)$$

onde $\rho \mathbf{f}$ representa as forças externas que atuam no fluido e $\operatorname{Div} \boldsymbol{\mathcal{S}}$ as forças internas.

Porém, as equações (1) e (2) são insuficientes para descrever o fluido. Assim, vamos relacionar $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ com as outras variáveis, ou seja, vamos considerar $\operatorname{Div} \boldsymbol{\mathcal{S}} = -\nabla p$, em que p é a função pressão.

Ao tentarmos obter formas para matriz $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ que incluam forças de viscosidade, argumentos físicos e matemáticos, permitem-nos concluir que, em primeira aproximação, $\boldsymbol{\mathcal{S}}$ deve ser dada por

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = -pI + \mu'(\operatorname{div} \mathbf{v})I + \mu(G + G^t), \quad (3)$$

onde, μ e μ' são constantes, G^t denota a transposta de G , que denota a matriz $\nabla \mathbf{v}$:

$$G = \nabla \mathbf{v} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Para completar o sistema formado pelas equações em (1), (2) e (3) podemos supor que o fluido é incompressível. Isto implica em duas simplificações: O termo $\mu' \operatorname{div} \mathbf{v}$ desaparece e mostra-se a igualdade $\operatorname{div}(G + G^t) = \Delta \mathbf{v}$.

Então, a equação (2) escreve-se como:

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \mathbf{f} - \nabla p + \mu \Delta \mathbf{v}$$

conhecida como a *Equação de Navier-Stokes*.

E aí, gostou de aprender sobre as Equações de Navier-Stokes? Se a resposta for sim, em breve haverá um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) aprofundando esse assunto. Fique de olho, você não pode perder!

Referências

- [1] ÁLVARES, Ever Elías Vásquez. **Um estudo das equações de Navier-Stokes com condições de fronteira de tipo Navier**. 2019. Dissertação (Mestrado em Matemática Pura e Aplicada) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, SC, 2019.
- [2] MELO, Severino Toscano & NETO, Francisco Moura, **Mecânica dos Fluidos e Equações Diferenciais**. Rio de Janeiro: IMPA, 2000.

A Poupança como uma Temática de Educação Financeira Escolar no Ensino Fundamental

Matias Corrêa do Amaral, *UFSM*.

A Educação financeira tem se tornado um tema essencial no contexto escolar, dado o impacto direto das decisões financeiras na qualidade de vida dos indivíduos. A poupança é uma das principais formas de investimento utilizadas no Brasil, caracterizando-se pela sua segurança e isenção de custos, apesar do baixo rendimento. Do ponto de vista da Educação Financeira Escolar, mais do que apenas acumular dinheiro, é fundamental desenvolver habilidades como planejamento, controle de despesas e estabelecimento de metas.

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) recomenda a inclusão de tópicos como taxas de juros, inflação e investimentos, reforçando a importância da educação financeira desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Essa diretriz ressalta a importância de preparar os alunos para usar o dinheiro de forma consciente, entender o valor do consumo e tomar decisões financeiras fundamentadas.

Diante do exposto, este trabalho tem como objetivo apresentar um mapeamento de dissertações e teses que abordam a noção de poupança no Ensino Fundamental. Para tanto, segue uma perspectiva qualitativa e considera os repositórios da Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e do Catálogo de Teses e Dissertações-CAPES. Por meio dos termos de busca “poupança”, “fundamental” e “matemática”, conectados pelo operador booleano AND, até o dia seis de junho de 2024, foram identificadas nove dissertações.

Os dados coletados foram sistematizados considerando informações institucionais (autor, título, orientador, programa e instituição) e aspectos metodológicos (objetivos, palavras-chave, conceitos abordados, sujeitos pesquisados, atividades didáticas e principais resultados). Para assegurar a relevância dos estudos para o contexto escolar, foram excluídas duas pesquisas: uma sobre a poupança na compra de escravos no Rio de Janeiro no século XIX e outra relacionada a portfólios de investimentos financeiros. Assim, o corpus final de análise foi composto por sete dissertações, organizadas cronologicamente e codificadas de P1 a P7.

Os resultados apontam que quatro dissertações estão vinculadas ao Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional, duas ao Programa de Mestrado Profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora e uma ao Programa de Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Anhanguera, ambos da área de Ensino. As análises revelam que P1, P6

e P7 abordam conceitos matemáticos como porcentagens, juros simples e compostos, taxas, descontos e sistemas de amortização. P4 inclui função afim, exponencial e logarítmica, progressões e variações cambiais e inflacionárias. Quanto às atividades didáticas, P4 não apresenta propostas, enquanto P1 e P6 contêm apenas sugestões. Já P2, P3, P5 e P7 analisam a aplicação das atividades, com destaque para P3 e P5, que utilizam a Teoria dos Campos Semânticos.

A Figura 1 apresenta um resumo das pesquisas analisadas:

Figura 1. Quadro das pesquisas analisadas.

P	Título	Autor(a) Orientador(a)	IES PPG	Atividades Didáticas	Público
1	A Educação Financeira no Ensino Médio através de proposta aplicada a financiamentos imobiliários pelo sistemas SAC e Price.	Rodrigo Affonso Lima Cláudia Ferreira Reis Concordio	UFRRJ PROFORMAT	Somente a proposta	2º ano (EM)
2	Educação Financeira e o Contexto Escolar do Estudante No Ensino Fundamental II.	Aloisio Pedro Hammes Janice Teresinha Reichert	UIFFS PROFORMAT	Implementa seis atividades	8º ano (EF)
3	Educação Financeira: a noção de poupança nos anos iniciais do ensino fundamental.	Dailiane de Fátima Souza Cabral Amarildo Melchiades da Silva	UFJF PPGEM	Implementa duas tarefas	2º ano (EF)
4	Educação Financeira: uma Sequência Didática para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Paulo Roberto Pereira Jair Donadelli Júnior	UFABC PROFORMAT	-	(EF) e (EM)
5	Educação Financeira: a noção de poupança no ensino fundamental	Luciana Maria da Silva Rego Amarildo Melchiades da Silva	UFJF PPGEM	Implementa oito atividades	8º ano (EF)
6	Matemática financeira: finanças do cotidiano e financiamento imobiliário.	Luiz Antonio de Lima Nelson Dantas Louza Júnior	UFJF PROFORMAT	Somente a proposta	3º ano (EM)
7	Educação Financeira: uma Sequência Didática para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio	Murillo Aurélio de Moura Araújo Antônio Sales	UNIDERP MECMAT	Implementa seis atividades	8º e 9º anos (EF)

Fonte: O autor (2024).

Após a análise das pesquisas, é possível observar que a maioria explora a poupança como ferramenta pedagógica para a compreensão de conceitos matemáticos, especialmente relacionados a taxas de juros, progressões e sistemas de amortização. Isso demonstra a importância de vincular a Matemática Financeira ao cotidiano dos alunos, promovendo uma aprendizagem mais significativa e aplicável à realidade.

Além disso, os dados evidenciam que a inclusão de atividades práticas e contextualizadas auxilia na compreensão dos conceitos financeiros pelos estudantes. A abordagem que privilegia o protagonismo discente, como ocorre em P2, parece ser mais eficaz para promover uma aprendizagem significativa. Estratégias como simulações financeiras, resolução de problemas reais e o uso de tecnologia podem aprimorar ainda mais o ensino da poupança e de outros temas

financeiros.

Os conceitos matemáticos abordados nas dissertações analisadas são variados, abrangendo porcentagens, juros simples e compostos, taxas de juros e descontos (P1, P6, P7); funções afim, exponencial e logarítmica, progressões aritméticas e geométricas, variação cambial e inflação (P4); além de financiamento imobiliário e sistemas de amortização (P3, P5). A inclusão desses conteúdos nas práticas pedagógicas permite aos alunos compreender, de forma mais concreta, o impacto das decisões financeiras em seu cotidiano, promovendo o desenvolvimento de competências fundamentais para uma gestão consciente e crítica dos recursos financeiros.

Quanto às metodologias e atividades didáticas, apenas P4 não apresenta atividades, enquanto P1 e P6 trazem sugestões. Já P2, P3, P5 e P7 analisam a aplicação prática das atividades, com destaque para P3 e P5, que se baseiam na Teoria dos Campos Semânticos, e P2, que valoriza o protagonismo do aluno no aprendizado. Essas diferentes abordagens metodológicas refletem a importância da escolha de estratégias didáticas adequadas para potencializar a compreensão dos conceitos matemáticos e sua aplicabilidade na vida dos estudantes.

A análise das dissertações evidencia que a poupança, enquanto tema de educação financeira escolar, é abordada de diversas formas, com ênfase em conceitos matemáticos e metodologias diferenciadas. Os resultados indicam que a educação financeira no Ensino Fundamental deve integrar não apenas cálculos matemáticos, mas também discussões sobre planejamento financeiro e tomada de decisões.

O alinhamento das dissertações às diretrizes da BNCC destaca a importância da Educação Financeira no currículo para formar estudantes mais conscientes sobre os desafios econômicos. Além de ampliar a compreensão sobre poupança, consumo responsável e planejamento financeiro, essa abordagem desenvolve habilidades para tomadas de decisões informadas. A análise das pesquisas evidencia a necessidade de práticas pedagógicas inovadoras, como atividades interativas, resolução de problemas práticos e contextualização dos conteúdos com o cotidiano, tornando o ensino mais dinâmico e significativo para os alunos.

Sendo assim, este estudo reforça a importância de investir em práticas pedagógicas que incentivem a autonomia financeira desde os anos iniciais da educação básica. Isso promove não apenas conhecimento matemático, mas também habilidades essenciais para a vida, como planejamento, controle financeiro e consumo consciente.

Referências:

- [1] SILVA, Luciana Maria. **Educação Financeira Escolar:** a noção de Poupança no Ensino Fundamental, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática)- Pós-
- Graduação em Educação Matemática, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/10482>. Acesso em: 06 junho 2024.
- [2] CABRAL, Dailiane de Fátima Souza. **Educação Financeira Escolar:** a noção de Poupança nos anos iniciais do Ensino Fundamental, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Educação Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2019. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/11320>. Acesso em: 06 junho 2024.
- [3] PEREIRA, Paulo Roberto. **Educação Financeira:** Construindo um futuro digno para as novas gerações, 2019. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Matemática, Computação e Cognição, Universidade Federal do ABC, Santo André, 2019. Disponível em: <https://biblioteca.ufabc.edu.br/index.html>. Acesso em: 06 junho 2024.
- [4] HAMMES, Aloisio Pedro. **Educação Financeira e o Contexto Escolar do Estudante no Ensino Fundamental II,** 2018. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional)- Programa De Mestrado Profissional Em Rede Nacional PROFMAT, Universidade Federal Da Fronteira Sul, Chapecó, SC, 2018. Disponível em: <https://rd.uffs.edu.br/handle/prefix/2662>. Acesso em: 06 junho 2024.
- [5] LIMA, Luiz Antônio de. **Matemática Financeira:** finanças do cotidiano e financiamento imobiliário, 2022. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Juiz de Fora, Juiz de Fora, MG, 2022. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/14019>. Acesso em: 06 junho 2024.
- [6] LIMA, Rodrigo Affonso. **A Educação Financeira no Ensino Médio através de proposta aplicada a financiamentos imobiliários pelo sistemas SAC e Price,** 2017. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Centro de Tecnologia e Ciências, Universidade do Estado do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, RJ, 2017. Disponível em: <https://www.bdtd.uerj.br:8443/handle/1/4887>. Acesso em: 06 junho 2024.
- [7] ARAÚJO, Murillo Aurélio de Moura. **Educação financeira:** uma sequência didática para estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio, 2023. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática)- Universidade Anhanguera - Uniderp, Campo Grande, MS, 2023. Disponível em: <https://repositorio.pgsscognia.com.br//handle/123456789/57110>. Acesso em: 06 junho 2024.

Funiculite em Equinos Castrados: Uma Revisão sobre Diagnóstico, Causas e Tratamento

Nelsiele Rocha da Silva Vieira, UFSM.

A Castração é um procedimento comum na medicina veterinária de equinos, realizado por diversas razões, como o controle reprodutivo, comportamento indesejado ou prevenção de doenças. No entanto, essa intervenção pode levar a complicações pós-operatórias, sendo uma das mais preocupantes a funiculite, uma inflamação do cordão espermático. A funiculite em equinos castrados é uma condição que afeta principalmente animais de idade jovem ou aqueles submetidos à castração inadequada. Este artigo tem como objetivo abordar as causas, diagnóstico, consequências e tratamentos para a funiculite em equinos castrados.

A funiculite pode ocorrer como consequência de uma infecção bacteriana, trauma físico ou uma técnica inadequada durante a castração. O cordão espermático, que inclui vasos sanguíneos, nervos e ductos deferentes, é um alvo potencial para infecções que podem ser introduzidas durante o procedimento. Em muitos casos, a contaminação ocorre por meio de instrumentos não esterilizados ou ambiente inadequado, aumentando o risco de inflamação. A infecção pode se espalhar, resultando em complicações graves, que exigem tratamento imediato.

Além disso, a técnica de castração é um fator importante. Em alguns casos, a remoção incompleta dos testículos ou falhas na sutura podem deixar tecidos suscetíveis a infecções. A manipulação inadequada do cordão espermático durante o procedimento também pode causar trauma, resultando em inflamação local.

O diagnóstico da funiculite é predominantemente clínico, baseado na história do animal, sinais clínicos e exames físicos. Os sinais mais comuns incluem dor localizada, inchaço no local da castração, febre, e secreção purulenta ou sanguinolenta na região da incisão. Em casos mais graves, pode haver formação de abscessos ou até mesmo ruptura do cordão espermático. Exames laboratoriais, como cultura bacteriana do fluido purulento, podem ser realizados para identificar o agente infeccioso e determinar o tratamento antibiótico mais eficaz. A ultrassonografia também pode ser útil para avaliar a extensão da inflamação e verificar a presença de abscessos ou outras complicações internas.

O tratamento da funiculite geralmente envolve a administração de antibióticos, sendo fundamental a escolha adequada do medicamento, de acordo com o agente patogênico identificado. Em casos leves, a terapêutica antimicrobiana pode ser suficiente para resolver a infecção. Em casos mais graves, quando há formação de abscessos ou necrose, pode ser necessário realizar procedimentos cirúrgicos, como na figura 1.

Além do uso de antibióticos, o controle da dor também é um componente essencial do tratamento. Anti-inflamatórios

não esteróides (AINEs) são frequentemente utilizados para aliviar a dor e reduzir a inflamação. O monitoramento constante do estado do animal, com ajustes terapêuticos, pode ser necessário até a resolução completa da infecção.

Figura 1. Retirada de abscesso (funiculite)



Fonte: A autora (2022)

A prevenção da funiculite em equinos castrados envolve práticas adequadas de castração. Garantir que o ambiente seja estéril e que os instrumentos utilizados estejam devidamente limpos pode minimizar significativamente o risco de infecção. Além disso, a castração deve ser realizada por profissionais experientes, que saibam identificar potenciais complicações durante o procedimento. O acompanhamento pós-operatório também é essencial, com cuidados adequados no manejo da ferida e monitoramento para sinais precoces de inflamação ou infecção.

A funiculite em equinos castrados é uma complicação rara, mas grave, que pode resultar em desconforto significativo para o animal e complicações clínicas de longo prazo. A prevenção, por meio de técnicas cirúrgicas adequadas e cuidados pós-operatórios rigorosos, é a melhor forma de evitar essa condição. O diagnóstico precoce e o tratamento eficaz com antibióticos e suporte clínico adequado são fundamentais para a recuperação do animal. O conhecimento sobre essa condição é essencial para veterinários, proprietários e tratadores de equinos para garantir a saúde e bem-estar dos animais castrados.

Referências:

- [1] SMITH, Robert M.; GOETZ, Thomas E. **Funiculitis and other post-castration infections in horses.** Equine Veterinary Education, v. 28, n. 10, p. 534-539, 2016.
- [2] SNYDER, James R.; SMITH, John T. **Castration in horses: complications and management.** Veterinary Clinics of North America: Equine Practice, v. 28, n. 1, p. 133-147, 2012.

Uma Breve Biografia de David Hilbert

Rafael Schwertner, UFSM.

DAVID Hilbert foi um famoso matemático alemão do final do século XIX e início do século XX, tendo influenciado significativamente a forma de se abordar a Matemática, bem como a sua estruturação.

Hilbert, retratado na Figura 1, nasceu no dia 23 de janeiro de 1862, no antigo estado alemão da Prússia Oriental, em Königsberg, atual Kaliningrado, Rússia. Seu interesse pela matemática cresceu ao frequentar a escola intitulada *Wilhelm Gymnasium*, onde se graduou no que chamaríamos hoje de ensino médio.

Figura 1. David Hilbert, matemático alemão.



Fonte: Tutor Mac (2025).

David continuou seus estudos na Faculdade de Königsberg, conhecendo outros matemáticos influentes que o ajudaram a moldar sua trajetória. Em 1885, obteve seu PhD.

Após realizar, na época, os exames necessários para poder atuar como docente, começou a trabalhar na mesma universidade em que se graduou, lecionando em Königsberg de 1886 à 1895. Um ano depois, em virtude das suas boas relações e contatos que adquiriu durante sua formação, David foi convidado a assumir uma posição na prestigiada faculdade de Göttingen, lugar onde vários matemáticos importantes já haviam lecionado, entre eles Bernhard Riemann, Peter Gustav Lejeune Dirichlet e Carl Friedrich Gauss. Lá trabalhou até o fim de sua vida.

Hilbert possui muitos trabalhos originais, no entanto, os de maior destaque são as obras intituladas *Zahlbericht* (Comentário sobre Números), publicada em 1897, que aborda a teoria dos números invariantes, e a famosa *Grundlagen der Geometrie* (Fundamentos da Geometria), publicada em 1902, onde ele propõe 21 axiomas fundamentais da Geometria e demonstra a importância de cada um deles. Os Fundamentos da Geometria foram tão importantes que a obra foi publicada em 10 edições e é devido a esse trabalho que David Hilbert é considerado o matemático mais importante na área depois de Euclides. A obra é, também, um marco no tratamento mais axiomático da Geometria.

Além de seus trabalhos, Hilbert também é conhecido por apresentar no Congresso Internacional de Matemática,

realizado em Paris no ano de 1900, os famosos 23 Problemas de Paris. Tais problemas deveriam ser o foco para os matemáticos do século XX. A Conjectura de Goldbach, o Princípio de Extensão de Dirichlet e a Hipótese de Riemann são algumas destas incógnitas propostas. Desde então, muitos já foram resolvidos, mas mesmo com a virada do milênio, vários matemáticos ainda abdicam de um grande tempo de suas vidas visando resolver os problemas restantes.

Hilbert recebeu vários prêmios e honrarias ao longo de sua vida, sendo eles:

- **1901:** eleito membro honorário da Sociedade Matemática de Londres;
- **1905:** a Academia de Ciências da Hungria o mencionou em uma citação especial;
- **1910:** recebeu o prêmio *Bolyai* da Academia de Ciências da Hungria;
- **1928:** eleito membro da Real Sociedade de Londres;
- **1930:** após se aposentar, recebeu o título de cidadão honorário da cidade de Königsberg;
- **1939:** foi agraciado com o prêmio Mittag-Leffler pela Academia de Ciências da Suécia;
- **1942:** eleito membro honorário da Sociedade de Matemática Alemã.

Em 1930, Hilbert anuncia sua aposentadoria. Ainda nesse ano, realiza seu discurso intitulado *Naturerkennen und Logik* (O Entendimento da Natureza e Lógica), em sua cidade natal Königsberg. Nessa ocasião, ele reafirma sua paixão pela Matemática, proferindo ao final do discurso sua famosa frase: *Wir müssen wissen, wir werden wissen* (Nós precisamos saber, nós iremos saber).

Pouco depois, em 1933, com a chegada do nazismo ao poder da Alemanha e a remoção de todos os seus colegas professores judeus de Göttingen, Hilbert se torna melancólico e desgostoso com a situação política de seu país, passando a grande parte de seu tempo em longas caminhadas pelo campus.

Em 1942, em um de seus passeios, Hilbert cai e quebra o braço, o que lhe deixou inativo, e há quem diga que isso contribuiu para a sua morte, apenas um ano depois, em 14 de fevereiro de 1943.

Referências:

- [1] KAPLANSKY, Irving. **David Hilbert, German Mathematician.** Disponível em: <https://www.britannica.com/biography/David-Hilbert>, última edição em fevereiro, 2015. Último acesso em: 15 de fevereiro de 2025.
- [2] O'CONNOR, John J., ROBERTSON, Edmund F. **David Hilbert.** Disponível em: https://mathshistory-st-andrews.ac.uk.translate.goog/Biographies/Hilbert/?_x_tr_sl=en&_x_tr_tl=pt&_x_tr_hl=pt&_x_tr_pto=tc. Último acesso em: 15 de fevereiro de 2025.

Teorema do Produto de Cauchy: da teoria às aplicações

Thalita Alves Veron, UFSM.

O presente artigo tem como objetivo apresentar de forma mais detalhada a prova do teorema referente ao produto de duas séries numéricas absolutamente convergentes. Este resultado é conhecido como Produto de Cauchy, o qual foi idealizado pelo matemático francês Augustin-Louis Cauchy (1789 - 1857) e abordado no livro intitulado *Cours d' analyse de l'École Royale Polytechnique*, em meados de 1821.

Nessa mesma perspectiva, é válido enfatizar que o respectivo teorema pode ser utilizado na demonstração de uma propriedade da Função Exponencial no âmbito da Análise Matemática, bem como no produto de exponenciais de matrizes na área de Equações Diferenciais Ordinárias. Por conseguinte, segue abaixo o enunciado e a demonstração deste resultado.

Teorema 1. Sejam $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ séries numéricas absolutamente convergentes. E para cada $j = 0, 1, 2, \dots$, defina:

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}. \quad (1)$$

Então, a série $\sum_{j=0}^{\infty} c_j$ é absolutamente convergente e

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j \cdot \sum_{j=0}^{\infty} b_j = \sum_{j=0}^{\infty} c_j.$$

A série cujas parcelas são dadas por c_j como em (1), é conhecida como **Produto de Cauchy** das séries $\sum_{j=0}^{\infty} a_j$ e $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$.

Demonstração. Sejam $A = \sum_{j=0}^{\infty} |a_j|$ e $B = \sum_{j=0}^{\infty} |b_j|$ séries numéricas convergentes. Além disso, seja $C = \sum_{j=0}^{\infty} |c_j|$. E considere as somas parciais α_j , β_j e γ_j das séries A , B e C , respectivamente. Devemos provar que:

$$|\alpha_j \cdot \beta_j - \gamma_j| \rightarrow 0.$$

De fato, para cada j fixo, temos:

$$\alpha_j = a_0 + a_1 + \dots + a_j$$

$$\beta_j = b_0 + b_1 + \dots + b_j.$$

Efetuando $\alpha_j \cdot \beta_j$, vemos que esse produto é formado pelas parcelas da cor azul, que na Figura 1 formam um quadrado. Ainda, observe que γ_j não contém todas as parcelas desse quadrado. Em virtude disso, consideramos γ_{2j} (diagonal representada pelos termos da cor vermelha). Portanto, realizando o produto $\alpha_j \cdot \beta_j$, com $0 \leq j \leq 2j$, temos a Figura 1. Na sequência, é necessário provar que:

$$(1) |\alpha_j \cdot \beta_j - \gamma_{2j}| \rightarrow 0$$

$$(2) |\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j}| \rightarrow 0$$

Figura 1. Representação do produto entre α_j e β_j

$a_0 b_0$	$a_0 b_1$	\dots	$a_0 b_j$	$a_0 b_{j+1}$	$a_0 b_{j+2}$	$a_0 b_{j+3}$	\dots	$a_0 b_{2j}$
$a_1 b_0$	$a_1 b_1$	\dots	$a_1 b_j$	$a_1 b_{j+1}$	$a_1 b_{j+2}$	\dots	$a_1 b_{2j-1}$	
$a_2 b_0$	$a_2 b_1$	\dots	$a_2 b_j$	$a_2 b_{j+1}$	\dots	$a_2 b_{j-2}$		
		\vdots					\vdots	
				\dots	$a_{j-1} b_{j+1}$			
$a_j b_0$	$a_j b_1$	\dots	$a_j b_j$	\dots				
	\dots	$a_{j+1} b_{j-1}$					\vdots	
								$a_{2j} b_0$

Fonte: A autora (2025).

Assim, temos que provar (1). Logo,

$$\gamma_{2j} - (\alpha_j \cdot \beta_j) = \sum_{(k,l) \in J_1} + \sum_{(k,l) \in J_2},$$

tal que:

$$\begin{aligned} J_1 &= (k, l); 0 \leq k \leq j-1, j+1 \leq l \leq 2j-k \\ J_2 &= (k, l); 0 \leq l \leq j-1, j+1 \leq k \leq 2j-l \end{aligned}$$

Agora, provaremos que:

$$(1.1) \sum_{(k,l) \in J_1} a_k b_l \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(k,l) \in J_1} a_k b_l \right| &\leq |a_0 b_{j+1}| + \dots + |a_0 b_{2j}| + \\ &\quad |a_1 b_{j+1}| + \dots + |a_1 b_{2j-1}| + \\ &\quad \vdots \\ &\quad |a_{j-1} b_{j+1}| \\ &\leq |a_0 b_{j+1}| + \dots + |a_0 b_{2j}| + \\ &\quad |a_1 b_{j+1}| + \dots + |a_1 b_{2j}| + \\ &\quad \vdots \\ &\quad |a_{j-1} b_{j+1}| + \dots + |a_{j-1} b_{2j}| + \\ &\leq |a_0| \sum_{l=j+1}^{2j} |b_l| + \\ &\leq |a_1| \sum_{l=j+1}^{2j} |b_l| + \\ &\quad \vdots \\ &\leq |a_{j-1}| \sum_{l=j+1}^{2j} |b_l| + \\ &= \left(\sum_{k=0}^{j-1} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{l=j+1}^{2j} |b_l| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{l=j+1}^{2j} |b_l| \right) \\ &\leq A \cdot \left(\sum_{l=j+1}^{\infty} |b_l| \right). \end{aligned}$$

Logo, como $\sum_{j=0}^{\infty} b_j$ é convergente, temos que $\sum_{l=j+1}^{\infty} |b_l|$ tende a zero. Sendo assim, $\sum_{(k,l) \in J_1} a_k b_l \rightarrow 0$.

Ainda, devemos provar que:

$$(1.2) \quad \sum_{(k,l) \in J_2} a_k b_l \rightarrow 0$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{(k,l) \in J_2} a_k b_l \right| &\leq |a_{j+1} b_0| + \dots + |a_{j+1} b_{j-1}| + \\ &\quad |a_{j+2} b_0| + \dots + |a_{j+2} b_{j-2}| + \\ &\quad \vdots \\ &\quad |a_{2j} b_0| \\ &\leq |a_{j+1} b_0| + \dots + |a_{j+1} b_{j-1}| + \\ &\quad |a_{j+2} b_0| + \dots + |a_{j+2} b_{j-1}| + \\ &\quad \vdots \\ &\quad |a_{2j} b_0| + \dots + |a_{2j} b_{j-1}| + \\ &\leq |a_{j+1}| \sum_{l=0}^{j-1} |b_l| + \\ &\leq |a_{j+2}| \sum_{l=0}^{j-1} |b_l| + \\ &\quad \vdots \\ &\leq |a_{2j}| \sum_{l=0}^{j-1} |b_l| + \\ &= \left(\sum_{k=j+1}^{2j} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{j-1} |b_l| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=j+1}^{2j} |a_k| \right) \cdot \left(\sum_{l=0}^{\infty} |b_l| \right) \\ &\leq \left(\sum_{k=j+1}^{\infty} |a_k| \right) \cdot B. \end{aligned}$$

Então, temos que $\sum_{(k,l) \in J_2} a_k b_l \rightarrow 0$. Portanto, por (1.1), (1.2) segue que:

$$|\alpha_j \cdot \beta_j - \gamma_{2j}| \rightarrow 0.$$

Agora, provaremos que:

$$(2) \quad |\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j}| \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=0}^{2j} a_k b_{2j-k} \right| &\leq |a_0 b_{2j}| + \dots + |a_1 b_{2j-1}| + \\ &\quad |a_2 b_{2j-2}| + \dots + \\ &\quad |a_{j-1} b_{j+1}| + |a_j b_j| + |a_{j+1} b_{j-1}| + \\ &\quad |a_{j+2} b_{j-2}| + \dots + |a_{2j} b_0| \\ &= \sum_{k=0}^{2j} |a_k b_{2j-k}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{2j} |a_{2j} b_k| + \sum_{k=0}^{2j-1} |a_k b_{2j}| \\ &\leq \sum_{k=0}^{2j} |a_{2j}| |b_k| + \sum_{k=0}^{2j-1} |a_k| |b_{2j}| \\ &\leq |a_{2j}| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| + |b_{2j}| \sum_{k=0}^{\infty} |b_k|. \end{aligned}$$

Consequentemente, se $j \rightarrow +\infty$, temos que $a_j \rightarrow 0$ e $b_j \rightarrow 0$, pois $\sum a_j$ e $\sum b_j$ são convergentes. Então, $|\gamma_{2j-1} - \gamma_{2j}| \rightarrow 0$. Portanto, como $\gamma_{2j} \rightarrow \alpha_j \cdot \beta_j$ e $\gamma_{2j-1} \rightarrow \gamma_{2j}$, concluímos que $\gamma_{2j-1} \rightarrow \alpha_j \cdot \beta_j$. Logo,

$$|\alpha_j \cdot \beta_j - \gamma_j| \rightarrow 0.$$

□

No que tange às aplicações deste resultado, é imprescindível salientar que o Teorema do Produto de Cauchy é fundamental para a demonstração da propriedade $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$, da função definida por $x \mapsto e^x$, também conhecida como função exponencial de base “e”, ou simplesmente, função exponencial, como segue abaixo.

Demonstração. Considere

$$e^x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}, e^y = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{y^j}{j!}.$$

Na notação do teorema anterior:

$$a_j = \frac{x^j}{j!}, b_j = \frac{y^j}{j!}, c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k}.$$

Então:

$$c_j = \sum_{k=0}^j a_k b_{j-k} = \sum_{k=0}^j \frac{x^k}{k!} \frac{y^{j-k}}{(j-k)!}.$$

Provamos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{x^k}{k!} \frac{y^{j-k}}{(j-k)!} = e^x e^y.$$

Assim, note que:

$$e^{x+y} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(x+y)^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \left(\sum_{k=0}^j \binom{j}{k} x^k y^{j-k} \right)$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} \sum_{k=0}^j \frac{j!}{k!(j-k)!} \frac{x^k y^{j-k}}{1}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^j \frac{x^k y^{j-k}}{k!(j-k)!} = e^x e^y.$$

Concluindo então, que $e^x e^y = e^{x+y}$. □

Concomitantemente a isto, vale mencionar a aplicabilidade do Teorema do Produto de Cauchy no âmbito das Equações Diferenciais Ordinárias, em particular, no produto entre exponenciais de matrizes, conforme pode ser destacado a seguir.

Dessa forma, sejam I um intervalo e a_{ij}, b_j , funções contínuas em I , com valores reais ou complexos, tais que, $i, j = 1, \dots, n$. E ainda, considere um sistema de n equações da forma:

$$\begin{cases} x'_1 = a_{11}(t)x_1 + \dots + a_{1n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n1}(t)x_1 + \dots + a_{nn}(t)x_n + b_n(t), \end{cases}$$

este, que pode ser descrito por:

$$x'_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_j(t), i = 1, 2, \dots, n.$$

Nesse sentido, temos que uma família de funções $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ reais ou complexas de classe C^1 em um intervalo $I_0 \subset I$, denomina-se *solução deste sistema* em I_0 , se para todo $t \in I_0$, temos:

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)\phi_j + b_j(t), i = 1, 2, \dots, n.$$

Além disso, a equação matricial a seguir:

$$x' = A(t)x + b(t),$$

em que $A(t) = (a_{ij}(t))$, consiste em uma matriz de ordem n na qual os elementos são os termos $a_{ij}(t)$, e $b(t) = (b_j(t))$ é o vetor coluna, cujas as coordenadas são $b_j(t)$, esta que equivale ao sistema anterior, visto que, uma família $\{\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n\}$ é solução do sistema em I_0 se, e somente se, a aplicação $\phi = (\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n)$ é solução da equação acima em I_0 , ou seja, se

$$\phi'(t) = A(t)\phi(t) + b(t), \forall t \in I_0.$$

Dessa forma, segue abaixo a respectiva definição:

Definição 1. A matriz e^A definida por

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!},$$

chama-se *exponencial da matriz* A .

No que concerne à convergência de séries de matrizes, temos a seguinte definição:

Definição 2. Considerando $\{C_k\}$ uma sucessão de matrizes $m \times n$, em que os elementos são números reais ou complexos, temos que o elemento ij de C_k é designado por $c_{ij}^{(k)}$. Desse modo, se todas as mn séries da forma

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n \quad (2)$$

são convergentes, então a série de matrizes $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ é convergente, e a sua soma consiste na matriz $m \times n$, em que o elemento ij é a série (2).

Por conseguinte, após as respectivas definições, torna-se possível identificar a extensão do Teorema do Produto de Cauchy, para a multiplicação entre exponenciais de matrizes, por intermédio do teorema a seguir:

Teorema 2. Sejam $\sum_{k=0}^{+\infty} A_k = A$ e $\sum_{k=0}^{+\infty} B_k = B$, duas séries de matrizes em $L(\mathbb{R}, n)$ absolutamente convergentes. Seja (C_m) a sequência de matrizes definida por $C_m = \sum_{k=0}^m A_k B_{m-k}$, com $m \in \mathbb{N}$. Então, a série $\sum_{m=0}^{+\infty} C_m$ é absolutamente convergente e $\sum_{m=0}^{+\infty} C_m = AB$.

À vista disto, salienta-se que a aplicação do resultado acima pode ser abordada por meio da demonstração do seguinte teorema, o qual ratifica, então, que a lei de expoentes $e^A e^B = e^{A+B}$ nem sempre é válida para matrizes exponenciais.

Teorema 3. Sejam A e B duas matrizes $n \times n$ permutáveis, ou seja, $AB = BA$. Então, vale a seguinte relação

$$e^{A+B} = e^A e^B.$$

Demonstração. Considere

$$e^A = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{j!}, e^B = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}.$$

Por hipótese, $AB = BA$. Assim, pelo Binômio de Newton, temos que:

$$(A + B)^m = \sum_{k=0}^m \frac{m!}{k!(m-k)!} A^{m-k} B^k \\ = m! \sum_{k=0}^m \frac{A^{m-k}}{(m-k)!} \frac{B^k}{k!} = m! \sum_{j+k=m} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!}.$$

Desse modo, pelo Teorema 2, e sabendo que as séries $\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{A^j}{j!}$, $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{B^k}{k!}$ são absolutamente convergentes, então, temos o somatório

$$\sum_{m=0}^n \frac{(A + B)^m}{m!} = \sum_{m=0}^n \sum_{j+k=m} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!},$$

converge absolutamente. Em decorrência disto, segue que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n \frac{(A + B)^m}{m!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{m=0}^n \sum_{j+k=m} \frac{A^j}{j!} \frac{B^k}{k!} \\ \Rightarrow e^{A+B} = e^A e^B.$$

□

Tendo em vista os fatos supracitados, foi possível destacar as contribuições fundamentais do matemático August-Louis Cauchy no campo da Matemática, em particular, a relevância do Teorema do Produto de Cauchy, por intermédio da sua aplicabilidade em áreas como Análise Matemática, Equações Diferenciais Ordinárias, dentre outras.

E aí, gostou de saber um pouco mais sobre a demonstração deste resultado importante na área da Matemática, bem como algumas das suas aplicações? Se sim, confira as referências abaixo, garanto que irá se surpreender!

Referências:

- [1] GRABINER, Judith Victor. **The Origins of Cauchy's Rigorous Calculus**. Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1981. Disponível em: <http://users.uoa.gr/~spapast/TomeasDidaktikhs/Caychy/GrabinerOriginsOfCauchysRigorousCalculus.pdf>. Acesso em: 09 jan. 2025.
- [2] MEDEIROS, Adriano Alves de.; OLIVEIRA, Milton de Lacerda. **Equações Diferenciais Ordinárias**. Paraíba: Universidade Federal da Paraíba, 2014. Disponível em: https://mat.ufpb.br/milton/disciplinas/edo/livro_edo.pdf. Acesso em: 09 jan. 2025.
- [3] SPIVAK, Michael. **Calculus**. 2.ed. Barcelona: Editorial Reverté, S.A., 1992.

JORNAL UMA TEMÁTICA

PET

ACOMPANHE O PET MATEMÁTICA



ufsm.br/pet/matematica



pet.matematica@ufsm.br



@petmatematicaufsm



PET Matemática UFSM



PET Matemática UFSM



Sala 1328, prédio 13, Av. Roraima,
1000 - Camobi, Santa Maria, RS