UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

GRUPO DE ENSINO DE FÍSICA

CINEMÁTICA E DINÂMICA

Joecir Palandi
Dartanhan Baldez Figueiredo
João Carlos Denardin
Paulo Roberto Magnago

SANTA MARIA - RS
2010

PREFÁCIO

Os professores do Grupo de Ensino de Física da Universidade Federal de Santa Maria (GEF-UFSM) orientam acadêmicos de licenciatura nas disciplinas de Estágio Supervisionado em Ensino de Física e desenvolvem atividades de pesquisa em ensino e de extensão, procurando contribuir para o aperfeiçoamento dos professores do ensino médio. As atividades de extensão envolvem empréstimo de material instrucional para atividades experimentais, apresentação de cursos, oficinas e palestras e elaboração de cadernos didáticos.

De modo geral, a necessidade que os professores do ensino médio têm de educação continuada não fica satisfeita devido à dificuldade de acesso a atividades presenciais como oficinas e cursos de atualização e também devido à pouca oferta de material de apoio, como cadernos didáticos e artigos de divulgação. Além disso, entre esses professores, o livro texto goza de excessiva importância, determinando a seqüência dos conteúdos a serem trabalhados em sala de aula e o próprio método de ensino, que privilegia a solução de exercícios e problemas numéricos, como se a aplicação coerente das expressões matemáticas pudesse levar, por si mesma, à aprendizagem significativa. Por outro lado, os conhecimentos de Física são produzidos por meio de atividades teóricas e experimentais integradas e, por isso, a prática docente baseada apenas no trabalho com o livro texto apresenta a disciplina de modo parcial e incompleto. Esses três fatores representam importantes limitações ao ensino de Física na escola de ensino médio.

O GEF-UFSM defende que uma melhor compreensão dos conteúdos é alcançada quando o professor privilegia a discussão conceitual aprofundada dos princípios e leis fundamentais e de como eles operam no interior dos fenômenos, trabalhando paralelamente a notação matemática, o vocabulário, as representações gráficas, as escalas e as proporções. Essa compreensão não é alcançada pelo ensino centrado no professor, que privilegia a solução de exercícios e problemas numéricos e que conduz atividades experimentais isoladas, apenas para reproduzir fenômenos ou comprovar o valor numérico de uma ou outra constante, e sim através do processo que se estabelece pelo diálogo professor-aluno, construído a partir dos conhecimentos que os alunos já dominam. Nesse sentido, o GEF-UFSM defende uma abordagem ao ensino de Física em que a experimentação acompanhe a seqüência lógica dos conteúdos, com uma estratégia de integração à teoria, motivando o diálogo em sala de aula, apoiando a discussão conceitual e vinculando-a a elementos concretos na observação.

Este caderno foi elaborado para dar ao professor uma visão mais consistente e rigorosa do paradigma da Física, ajudando-o na elaboração de planejamentos em que os conteúdos sejam distribuídos ao longo da carga horária disponível de modo mais condizente com sua importância relativa, com estratégias de ensino mais próximas do modo de fazer ciência. O planejamento das atividades didáticas não deve ser uma tarefa meramente burocrática, uma simples cópia do sumário do livro texto, sem qualquer vínculo com a importância relativa dos conteúdos da disciplina em questão, com a carga horária disponível, com os conhecimentos que seus alunos já dominam e com a realidade do meio em que a escola está inserida. Um planejamento bem executado e constantemente reavaliado pode ser um instrumento útil para que o processo de ensino-aprendizagem se estabeleça e seja efetivo. Este caderno foi elaborado para ser útil também no trabalho direto com os alunos em sala de aula e, para isso, incorpora discussões detalhadas de um grande número de exemplos e propõe exercícios de aplicação.

O GEF-UFSM agradece as críticas e sugestões que possam levar esse caderno mais facilmente aos seus objetivos.

SUMÁRIO

CINEMÁTICA

DINÂMICA

CINEMÁTICA

I. Introdução

O conceito fundamental da Mecânica é o de movimento, ou seja, da mudança de posição dos corpos ao longo do tempo.

Na Cinemática, o objetivo é descrever como se processam os movimentos, isto é, estabelecer, num dado referencial, as posições que os corpos ocupam ao longo do tempo e as respectivas velocidades, independentemente das causas desses movimentos. Em outros termos, a Cinemática procura estabelecer as formas geométricas das trajetórias dos corpos no espaço, se são retas ou curvas, e os intervalos de tempo levados para percorrer todos os segmentos dessas trajetórias.

Na Dinâmica, o objetivo é buscar conhecer as causas dos movimentos. Dado um conjunto de corpos interagindo uns com os outros, a Dinâmica busca descrever as forças que agem sobre cada um deles, relacionar a resultante dessas forças à respectiva aceleração e, daí, entender o movimento correspondente no referencial considerado.

Neste texto, os conteúdos de Cinemática unidimensional do ensino médio são discutidos a partir de um experimento. O experimento envolve uma calha metálica inclinada em relação à horizontal e um volante que se movimenta sobre ela (Fig.1). O volante é constituído por um cilindro acoplado a um eixo cônico conforme a figura.

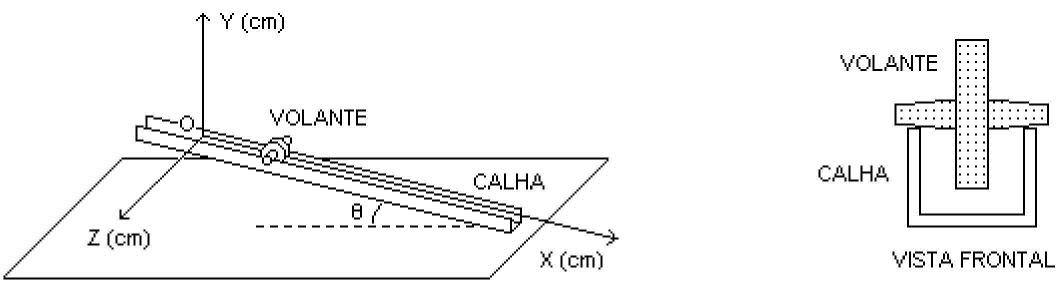

Fig.1

II. Referencial

Referencial é um conjunto de três eixos ortogonais. Não podemos falar em movimento sem antes especificar o referencial. Especificar o referencial significa estabelecer como o sistema de três eixos ortogonais está disposto em relação aos corpos que participam do fenômeno que se quer descrever.

A escolha do referencial é arbitrária. Então, por conveniência, escolhemos um referencial em relação ao qual a calha está em repouso e com o eixo X colocado ao longo da calha. A partir de agora, ou seja, a partir da escolha do referencial, a descrição do movimento dos corpos que participam do fenômeno passa a ser feita em relação a esse referencial e só em relação a ele.

Colocado sobre a calha e abandonado, o volante passa a se movimentar ao longo da calha. Esse movimento pode ser pensado, no referencial escolhido, como constituído de três movimentos diferentes: um movimento retilíneo do seu centro geométrico (centro de massa) ao longo da calha (ou do eixo X do referencial considerado), um movimento de rotação em torno do seu eixo e um movimento lateral irregular.

Na Física, assim com nas demais ciências experimentais, a primeira tentativa de descrição de um fenômeno envolve simplificações. No início, ignoramos aspectos que, naquele momento, consideramos pouco importantes. Depois, com o avanço do conhecimento, incorporamos, na descrição, os aspectos desprezados. Então, para simplificar a descrição do movimento do centro de massa do volante, vamos ignorar o movimento lateral. Esse movimento se origina da forma cônica do eixo. A forma cônica do eixo ajuda a manter o volante sobre a calha. Vamos ignorar também o movimento de rotação do volante em torno do seu eixo. Dessa forma, o que vamos estudar é o movimento retilíneo do centro de massa do volante ao longo do eixo X do referencial considerado.

O experimento consiste em abandonar o volante sempre do mesmo ponto O (considerado origem do eixo X) e medir o tempo que ele leva para atingir várias posições diferentes. A partir dessas medidas construiremos conceitos e estudaremos alguns tipos de movimento no contexto da Cinemática.

Exercício 1

Discuta a seguinte afirmativa: referencial não é um corpo ou conjunto de corpos, mas um sistema de eixos e, portanto, uma idéia abstrata.

Exercício 2

Na Idade Média, a Igreja defendia a idéia de que o Sol girava em torno da Terra e que esta se encontrava em repouso. Nicolau Copérnico, no século XVI, defendia a idéia de que a Terra girava em torno do Sol e que este se encontrava em repouso. Diga como a Física considera essa questão.

III. Posição

Como já vimos, referencial é um conjunto de três eixos ortogonais (X, Y e Z) que se cruzam num ponto (0) chamado origem (Fig.2).

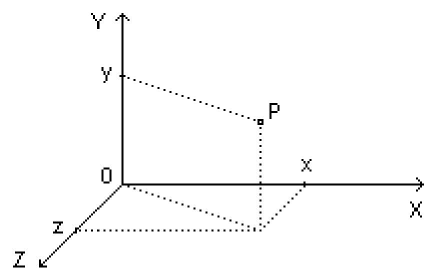

Fig.2

O conceito de posição está associado à idéia de lugar. No referencial escolhido, a posição de um ponto P, por exemplo, é dada por três números x, y e z, chamados de coordenadas de posição do ponto P. Noutro referencial, a posição do ponto P é dada por outros três números x’, y’ e z’.

No caso do movimento retilíneo que nos interessa descrever, ou seja, o movimento do centro de massa do volante, as posições ocupadas pelo móvel estão sobre a mesma linha reta e, então, apenas um eixo (X, por exemplo) precisa ser considerado. Isto significa que, para descrever um movimento unidimensional, o referencial pode ser constituído por um único eixo e a posição fica definida por um único número (com a respectiva unidade), a coordenada x.

Partícula

Antes de continuarmos, precisamos compreender o conceito de partícula. Partícula é qualquer corpo cujas dimensões são muito menores do que as dimensões do sistema como um todo. Por essa definição, podemos ver que o conceito de partícula é relativo. Por exemplo, quando se trata de descrever o movimento orbital de translação da Terra num referencial fixo no Sol, a Terra pode ser considerada como uma partícula, mas quando se trata de explicar a sucessão dos dias e das noites, a Terra não pode ser considerada como partícula, ou seja, deve-se considerar sua extensão. Assim, um corpo qualquer pode ou não ser considerado como partícula dependendo do aspecto que se quer descrever do fenômeno do qual participa esse corpo.

Uma partícula pode ser representada por um ponto matemático. Não tem sentido falar na rotação de uma partícula ao redor de si própria. A partícula só pode ter movimento de translação.

Neste caderno, vamos trabalhar apenas com partículas. Se mencionarmos um avião, um automóvel ou qualquer outro corpo, devemos entender que suas dimensões não nos importam. É como se fôssemos observar apenas um ponto do objeto em questão e a posição desse ponto é a posição do objeto. E se atuarem forças sobre o objeto, todas elas devem ser pensadas como atuando nesse ponto. Qualquer outro movimento que não seja de translação desse ponto não nos interessa. Assim, como desejamos descrever o movimento de translação do volante, podemos considerar esse volante como uma partícula e podemos identificar as posições dessa partícula às posições do centro de massa do volante.

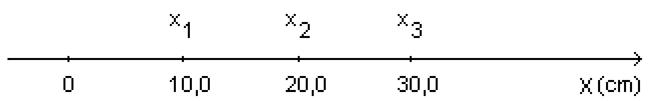

Fig.3

No referencial escolhido, cada posição é dada por um único número ou, como se diz usualmente, uma única coordenada. O número associado a essa coordenada é o comprimento do segmento de reta entre a origem 0 do eixo e a posição considerada.

Por exemplo (Fig.3), a posição x_1 sobre o eixo considerado é representada pelo número que dá o comprimento do segmento de reta entre 0 e x_1. Se x_1 está a 10 cm da origem, escreve-se x_1 = 10,0 cm. O mesmo para a posição x_2 = 20,0 cm e para a posição x_3 = 30,0 cm.

No exemplo discutido, x_1, x_2 e x_3 representam posições sobre o eixo X.

Algarismos Significativos

Consideremos a medida do comprimento de um lápis com o auxílio de uma régua (Fig.4). Com certeza, o comprimento do lápis está entre 8,6 cm e 8,7 cm. Mas, como as divisões da régua vão até milímetros, não se pode ter certeza quanto à fração dos décimos de milímetro que correspondem ao comprimento exato do lápis. Se considerarmos essa fração como sendo 0,03 cm, podemos escrever, para o comprimento do lápis, L = 8,63 cm. Mas também poderíamos ter considerado essa fração como sendo 0,05 cm e escrever L = 8,65 cm.

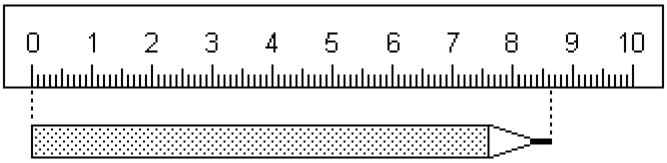

Fig.4

Por outro lado, não teria qualquer sentido escrever L = 8,643 cm. Podemos avaliar grosseiramente os décimos de milímetro porque a régua está graduada até milímetros. Mas avaliar os centésimos de milímetro está fora do alcance de qualquer ser humano.

Dizemos, então, que a medida do comprimento do lápis com essa régua tem três algarismos significativos, 8, 6 e 3 (ou 5). Os dois primeiros são certos e o terceiro é duvidoso. O papel desse algarismo duvidoso é o de indicar que os outros são conhecidos com certeza.

Aqui é interessante observar que se o resultado de uma medida qualquer for expresso, por exemplo, pelo número 12,40 (com a unidade apropriada), temos quatro algarismos significativos. Sob o ponto de vista da Matemática, esse número é equivalente ao número 12,4. Contudo, para a Física, o zero não pode ser omitido porque representa o algarismo duvidoso e, como já dissemos acima, ele é necessário para indicar que os outros algarismos são conhecidos com certeza.

Nos resultados de operações matemáticas que envolvem medidas de grandezas físicas, deve-se manter o mesmo número de algarismos significativos após a virgula que a grandeza que tiver o menor número deles.

Exemplo

Um estudante mede as dimensões de uma folha de papel e encontra 21,59 cm para a largura e 27,96 cm para a altura. O produto dessas dimensões é a área da folha. Usando as regras matemáticas da multiplicação, o estudante encontra, para esse produto, o valor 603,6564 cm^2. Mas como as medidas das dimensões da folha são obtidas com dois algarismos significativos após a vírgula, o resultado do produto (que representa a área da folha) deve ser também dado com dois algarismos significativos após a vírgula. Portanto, o estudante deve escrever, para área da folha, o valor 603,66 cm^2.

Aqui devemos observar que o número que expressa a área da folha não foi simplesmente truncado (cortado), mantendo, depois da vírgula, os dois primeiros algarismos originais. Em vez disso, foram mantidos dois algarismos após a vírgula, mas o último foi arredondado para cima porque o número 603,6564 está mais próximo de 603,66 do que de 603,65.

Agora, voltando ao experimento do volante sobre a calha, vamos marcar posições ao longo da calha ou, o que dá no mesmo, ao longo do eixo X (Fig.5).

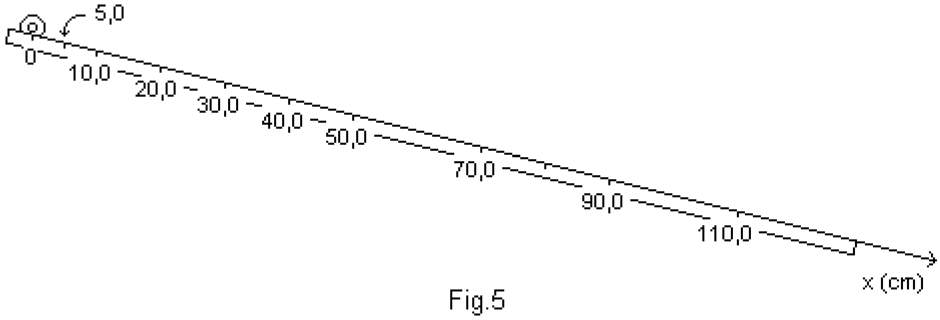

Fig.5

Usando uma trena graduada até centímetros, vamos marcar as posições dadas na tabela a seguir.

x(cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0

Aqui cabe observarmos o seguinte. Como o dispositivo de medida (a trena) está graduado em centímetros e como foi nosso desejo expressar os resultados das medidas também em centímetros, as posições ao longo da calha foram indicadas por números com uma casa após a vírgula. Desse modo, os resultados de todas as futuras operações matemáticas das quais participarem esses números devem também vir apresentados com uma casa após a vírgula.

Exercício 1

Obtenha um mapa da sua cidade. Escolha um referencial com dois eixos ortogonais, um na direção Norte-Sul e outro na direção Leste-Oeste e com origem na sua escola. Expresse a posição da sua casa nesse referencial.

Exercício 2

Coloque uma borracha sobre o seu livro de Física e o seu livro de Física sobre uma mesa. (a) Escolhendo um referencial com eixos ao longo das bordas do livro, escreva a posição do centro de massa da borracha. (b) Escolhendo um referencial com eixos ao longo das bordas da mesa, escreva a posição do centro de massa da borracha.

Exercício 3

Determine a área do tampo se sua classe considerando como unidade de medida o comprimento do seu lápis.

IV. Deslocamento e Distância Percorrida

O conceito de posição está associado à idéia de lugar. O conceito de deslocamento está associado à idéia de mudança de posição independentemente da trajetória entre as posições inicial e final consideradas. Se um corpo passa da posição x_1 para a posição x_2, o seu deslocamento é definido como o vetor (segmento de reta orientado) com origem na posição x_1 e extremidade na posição x_2.

Exemplo

Num dado referencial (eixo X), um carro se moveu em linha reta (Fig.6(a)) da posição x_1 = 10,0 m até a posição x_3 = 40,0 m e, em marcha à ré, retornou até a posição x_2 = 20,0 m. O deslocamento do carro foi de x_1 até x_2 (Fig.6(b)).

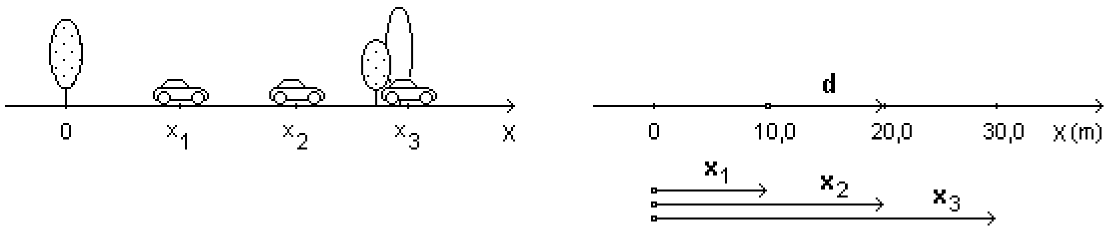

Fig.6(a) (b)

Em termos matemáticos, o deslocamento é um vetor. O símbolo **d** (em negrito) indica a natureza vetorial dessa grandeza. Em termos geométricos, indica que ela tem módulo, direção e sentido. No exemplo acima, o módulo do deslocamento é dado por:

$$d = x_2 - x_1 = 20{,}0 \text{ m} - 10{,}0 \text{ m} = 10{,}0 \text{ m}$$

A direção do deslocamento é a direção da reta suporte, ou seja, do eixo X. O sentido do deslocamento é dado pela indicação de x_1 até x_2.

Pode-se associar um vetor a cada posição. Assim, à posição x_1 pode-se associar o vetor $\mathbf{x}_1$, com origem na origem do referencial e extremidade na posição x_1, e à posição x_2 pode-se associar o vetor $\mathbf{x}_2$, com origem na origem do referencial e extremidade na posição x_2. Desta forma:

$$\mathbf{d} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$$

Não vamos nos aprofundar muito na álgebra vetorial agora porque estamos trabalhando o movimento em uma dimensão.

A trajetória de uma partícula é a curva matemática cujos pontos representam as posições sucessivas ocupadas pela partícula ao longo do tempo. O conceito de distância percorrida está associado à idéia de trajetória. A distância percorrida é a medida do comprimento da trajetória da partícula. No exemplo discutido acima, o carro percorreu 30 m para frente e 20 m para trás, de modo que a distância percorrida pelo carro é 50 m.

Exercício 1

Uma criança amarra, numa das extremidades de um fio, uma pedra e faz com que ela gire, descrevendo uma circunferência de 70 cm de raio num referencial fixo na mão que segura a outra extremidade do fio. Determine o módulo do deslocamento e a distância percorrida pela pedra em cinco voltas e meia.

Exercício 2

Num dado intervalo de tempo, uma partícula de desloca em linha reta passando sucessivamente pelos pontos A, B, C, D e E (Fig.7).

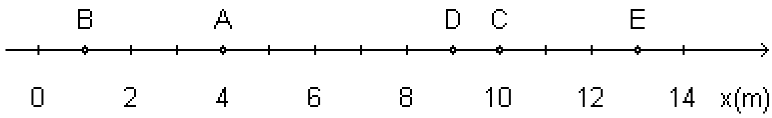

Fig.7

(a) Escreva as posições desses pontos. Determine (b) o deslocamento e (c) a distância percorrida pela partícula no intervalo de tempo considerado.

V. Instante e Intervalo de Tempo

O referencial permite estabelecer as posições de um objeto qualquer. Mas, para descrever o movimento desse objeto é necessário mais um eixo, independente dos três que constituem o referencial, que é o eixo do tempo. Cada ponto desse eixo representa um instante de tempo (Fig.8).

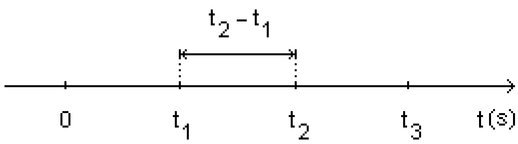

Fig.8

A coordenada de posição de um ponto é determinada pela medida do segmento de reta entre a origem 0 do eixo em questão e o ponto considerado. Do mesmo modo, a coordenada temporal de um instante de tempo é determinada pelo intervalo de tempo entre a origem do eixo dos tempos e o instante considerado.

Assim, por exemplo, o instante t_1 é representado numericamente pelo intervalo de tempo entre 0 e t_1. Se, entre o início da contagem do tempo e o instante t_1 considerado passaram-se 30 segundos, escreve-se $t_1 = 30,0$ s.

A duração definida por dois instantes de tempo é chamada intervalo de tempo. O intervalo de tempo entre os instantes t_1 e t_2 é dado por:

$$\Delta t = t_2 - t_1$$

VI. Unidades e Padrões de Medida

Para a Física como ciência da Natureza, é fundamental a medição das grandezas utilizadas para descrever os aspectos do Universo que os físicos aceitam como verdadeiros.

O processo de medida de uma grandeza física qualquer está associado à idéia de comparação. Neste sentido, medir uma grandeza é estabelecer o seu valor como múltiplo de certa unidade. Por exemplo, quando dizemos que o comprimento de uma das dimensões de uma mesa é 2 m, estamos dizendo que esse comprimento equivale a duas vezes o comprimento correspondente à unidade chamada metro.

Uma unidade fica estabelecida quando estabelecemos um padrão. O padrão pode estar associado a um objeto ou a um procedimento experimental. Por exemplo, o metro já foi associado a um objeto, sendo definido como equivalente à distância entre os dois traços gravados numa barra feita de uma liga de platina e irídio guardada a uma temperatura fixa no Escritório de Pesos e Medidas localizado próximo de Paris. Atualmente, o metro está associado a um procedimento experimental, sendo definido em termos do comprimento da trajetória percorrida pela luz no vácuo durante certo intervalo de tempo (veja abaixo).

O número de grandezas físicas é muito grande, mas todas podem ser expressas em termos de algumas poucas, tomadas, em acordo internacional, como fundamentais. Na Mecânica e no Sistema Internacional de Unidades (SI), as grandezas comprimento, massa e tempo são tomadas como grandezas fundamentais. A tabela a seguir mostra as correspondentes unidades fundamentais e seus símbolos.

Grandeza	Unidade	
	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Massa	quilograma	kg
Tempo	segundo	s

Observações

Aqui cabem algumas observações. O nome da unidade é sempre escrito em letras minúsculas. Os símbolos das unidades são entes matemáticos e não abreviaturas. Por isso, eles não devem ser seguidos de ponto (exceto quando aparecem nos finais de frases) nem da letra s para formar o plural. A sub-unidade grama é do gênero masculino. Por isso, ao falar e escrever o quilograma ou seus múltiplos ou submúltiplos, devemos fazer a concordância correta. Por exemplo, escrevemos duzentos e um gramas ou trezentos e vinte e dois miligramas. Além disso, no símbolo do quilograma (kg), a letra k é minúscula.

A seguir, apresentamos as definições atuais para os padrões associados as três grandezas fundamentais. O padrão de massa é o único que ainda está associado a um objeto.

Padrão de Comprimento

O metro é o comprimento do trajeto percorrido pela luz no vácuo durante um intervalo de tempo de 1 / 299 792 458 de segundo.

Essa definição fixa o módulo da velocidade da luz no vácuo em, exatamente:

$c = 299\ 792\ 458$ m/s

Padrão de Tempo

O segundo é a duração de 9 192 631 770 períodos da radiação eletromagnética correspondente à transição entre os dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo de césio 133. Essa definição se refere a um átomo de césio em repouso, na temperatura do zero absoluto.

Padrão de Massa

O protótipo internacional do quilograma é um cilindro composto de uma liga de platina e irídio, guardado no Bureau Internacional de Pesos e Medidas, em Paris. Laboratórios de padrões de vários países têm cópias perfeitas desse protótipo. O quilograma é a unidade de massa igual à massa do protótipo internacional do quilograma.

Unidades Derivadas

As unidades derivadas são obtidas das unidades fundamentais por multiplicação e divisão. O quadro abaixo fornece alguns exemplos de unidades derivadas. Por questões de comodidade, certas unidades derivadas recebem nome especial e símbolo particular.

Grandeza	Unidade Derivada		
	Nome Especial	Símbolo	Símbolo Particular
Módulo de Velocidade		m/s	
Módulo de Aceleração		m/s^2	
Ângulo Plano	radiano	1	rad
Módulo de Força	newton	mkg/s^2	N
Energia	joule	m^2kg/s^2	J

O radiano é adimensional e, por isso, o símbolo da sua unidade é 1.

Os nomes de algumas unidades homenageiam cientistas importantes. Por exemplo, a unidade de módulo de força é chamada newton (símbolo N) e a unidade de energia é chamada joule (símbolo J). Os nomes de unidades são sempre escritos com letras minúsculas.

Algumas unidades, amplamente, utilizadas, inclusive em trabalhos científicos, não pertencem ao SI. A tabela abaixo mostra algumas dessas unidades e sua relação com unidades do SI.

Grandeza	Unidade		
	Nome	Símbolo	Relação com o SI
Tempo	hora	h	1 h = 3600 s
	minuto	min	1 min = 60 s
Volume	litro	L	1 L = 10^{-3} m^3
Ângulo Plano	grau	º	1º = (π / 180) rad
Energia	erg	erg	1 erg = 10^{-7} J
	eletronvolt	eV	1 eV = 1,6 x 10^{-19} J
Comprimento	angstrom	Å	1 Å = 10^{-10} m
Massa	tonelada	t	10^3 kg
Módulo de Força	dina	dyn	1 dyn = 10^{-5} J

Quando escrevemos medidas de tempo, devemos usar corretamente os símbolos para hora, minuto e segundo. É correto escrever 10 h 15 min 3 s, por exemplo, mas **não** é correto escrever 10:15:3 h ou 10h 15' 3'' ou qualquer outra variante.

VII. Medidas

Ao longo da calha estão marcadas posições em:

x(cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0

Experimento da Calha e do Volante

Medimos dez vezes o intervalo de tempo (em segundos) levado pelo centro de massa do volante para percorrer a distância entre o ponto 0 e cada uma das posições assinaladas na calha. Resultados típicos estão na tabela abaixo.

Aqui vale a pena observar que foram tomadas posições mais próximas umas das outras no início do movimento porque, devido à baixa velocidade do centro de massa do volante, os correspondentes intervalos de tempo podiam ser medidos com relativa precisão. Como veremos adiante, o gráfico da posição em função do tempo é um arco de parábola com maior curvatura justamente na região dos pequenos intervalos de tempo. O maior número de medidas nessa região permite traçar com maior precisão esse gráfico.

x(cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0
t_1(s)	2,09	2,95	4,11	5,09	6,03	6,79	8,09	9,19	10,23
t_2(s)	2,07	2,86	4,17	5,31	6,01	6,89	8,07	9,07	10,19
t_3(s)	2,06	2,97	4,27	5,27	6,09	6,92	7,91	9,28	10,21
t_4(s)	2,08	3,02	4,29	5,16	5,95	6,91	8,19	9,13	10,19
t_5(s)	2,10	2,98	4,13	5,14	5,97	6,68	8,00	9,24	10,24
t_6(s)	2,13	2,99	4,18	5,29	6,03	6,76	8,11	9,25	10,29
t_7(s)	2,07	2,93	4,28	5,13	5,97	6,70	8,16	9,30	10,28
t_8(s)	2,14	3,01	4,17	5,17	6,07	6,79	8,05	9,29	10,18
t_9(s)	2,14	2,99	4,23	5,17	5,89	6,83	7,99	9,13	10,29
t_{10}(s)	2,07	2,86	4,22	5,19	6,13	6,67	7,93	9,07	10,34

VIII. Erros Experimentais

Na Física, assim como em qualquer outra ciência experimental, estamos envolvidos com medidas de grandezas de interesse. Essas medidas se apresentam sob a forma de números que devem expressar os valores das grandezas. Contudo, o processo de medida está sujeito a erros, tanto erros sistemáticos quanto erros aleatórios.

Os erros sistemáticos podem ocorrer por diversos motivos. Podem ocorrer pelo uso de um instrumento mal calibrado ou com defeito, como um cronômetro que atrasa. Podem ocorrer pelo mau uso de um instrumento, com um erro de operação sempre repetido. Podem ocorrer pelo uso de um instrumento em condições inapropriadas, como quando se usa um paquímetro em situações ambientais de altas temperaturas. E assim por diante. O experimentador pode e deve evitar esse tipo de erro ou deve saber corrigir os dados experimentais de modo a eliminar seus efeitos.

Os erros aleatórios são inerentes ao processo de medida e se originam de flutuações imprevisíveis nas condições ambientais, dos instrumentos de medida e da própria natureza humana do experimentador. No experimento do volante sobre a calha, podemos identificar alguns erros aleatórios como, por exemplo, aqueles associados ao tempo de reação do experimentador e ao seu julgamento quanto ao instante em que o volante inicia seu movimento e quanto ao instante em que ele alcança cada posição escolhida.

Embora possam ser minimizados, os erros aleatórios não podem ser completamente eliminados e o experimentador não tem como corrigir seus efeitos sobre os dados experimentais. Por isso, alguma informação sobre esse tipo de erro deve estar contida na expressão do resultado do processo de medida. Pelo fato de os erros serem aleatórios, numa seqüência de medidas da mesma grandeza, alguns valores obtidos devem ser maiores do que o valor verdadeiro e outros devem ser menores. Assim, podemos esperar que o valor médio dos resultados dessas medidas esteja próximo do valor verdadeiro. Na verdade, tão mais próximo quanto maior o número de tais medidas. Portanto, o valor médio das medidas da grandeza de interesse corresponde, de modo aproximado, ao valor verdadeiro da grandeza.

Valor Médio

O valor médio de cada intervalo de tempo é calculado pela expressão:

$$t_m = \frac{t_1 + t_2 + ... + t_{10}}{10}$$

A soma (ou o somatório) do numerador é usualmente representada pela letra grega sigma maiúscula:

$$\sum_{k=1}^{10} t_k = t_1 + t_2 + ... + t_{10}$$

Desse modo, podemos escrever:

$$t_m = \frac{1}{10} \sum_{k=1}^{10} t_k$$

No experimento que estamos discutindo, tomamos dez medidas do intervalo de tempo para cada posição considerada. Embora, em termos científicos, esse número seja muito pequeno, por questões didáticas vamos aceitá-lo como apropriado. Calculando o valor médio (com duas casas decimais) das dez medidas de tempo para cada posição considerada, obtemos os seguintes resultados.

x (cm)	5,0	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	70,0	90,0	110,0
t (s)	2,10	2,96	4,21	5,19	6,01	6,79	8,05	9,20	10,24

Essa tabela pode ser considerada como uma representação do movimento de translação do centro de massa do volante. Contudo, a partir dela, não podemos determinar, por exemplo, as posições desse centro de massa em outros instantes de tempo. Assim, essa é uma representação pobre do movimento.

Exercício 1

Discuta a seguinte afirmação: os padrões fundamentais devem ser acessíveis e invariáveis.

Exercício 2

Curioso com o movimento de vai-e-vem de um grande candelabro, um estudante de Física usou as pulsações do seu próprio pulso para estimar o período de oscilação. (a) Discuta a conveniência de definir um padrão de tempo baseado nas batidas do coração. (b) Enumere alguns fenômenos convenientes para definir padrões de tempo.

IX. Gráfico Posição x Tempo

Como já foi dito, a tabela acima pode ser considerada como uma representação do movimento de translação do centro de massa do volante. Uma outra representação possível para o movimento do centro de massa do volante é o gráfico posição x tempo (Fig.9). Nessa representação, tomamos dois eixos cartesianos ortogonais, um para assinalar as posições e outro para assinalar os instantes de tempo correspondentes.

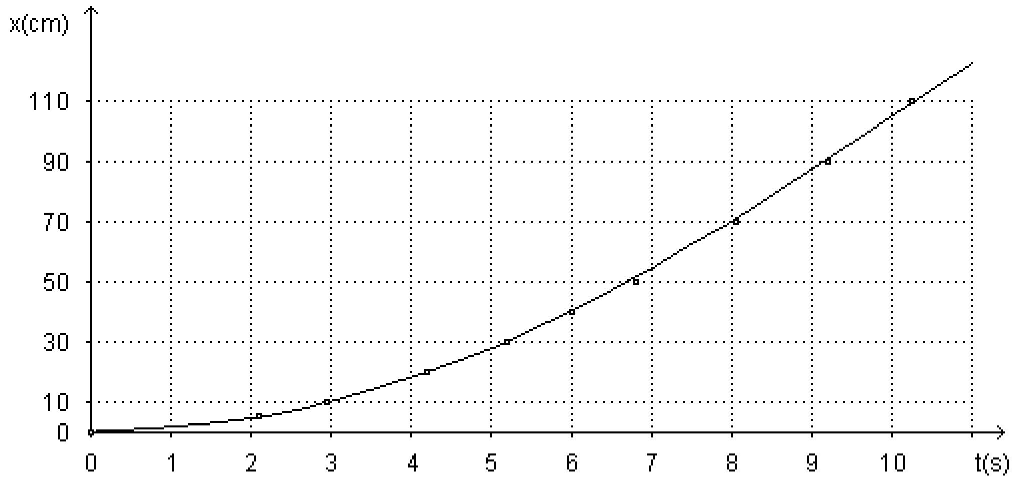

Fig.9

Na figura, cada ponto (representado por um pequeno quadrado) está associado a um instante de tempo e à correspondente posição do móvel considerado. Os pontos representados na figura correspondem às posições selecionadas para o experimento. Mas o centro de massa passou por todas as posições intermediárias e, por isso, podemos desenhar uma curva contínua que passa mais ou menos pelos pontos já representados. Ainda, como o movimento do centro de massa do volante não apresenta irregularidades, é razoável supor que essa curva seja suave. Assim, passamos a considerar que a curva representa o movimento do centro de massa do volante. É importante salientar que não são os pontos que representam o movimento do centro de massa do volante, mas, sim, a curva definida com a ajuda desses pontos. Essa curva é o que chamamos de gráfico da posição em função do tempo ou, por brevidade, gráfico posição x tempo para o móvel em questão.

Como já dissemos, toda medida experimental envolve erros que não podem ser evitados e é por isso que tomamos valores médios. Se o número de medidas realizadas para cada posição fosse muito grande, poder-se-ia esperar que o valor médio correspondesse ao valor verdadeiro do intervalo de tempo correspondente. Como tomamos poucas medidas, é razoável pensar que o valor médio pode estar um pouco distante do valor verdadeiro e é justamente por isso que não se pode esperar que a curva passe por todos os pontos. O afastamento de um ponto da curva pode ser pensado como representando o erro associado ao processo de medida.

Sob o ponto de vista da Matemática, esse gráfico posição x tempo é uma parábola, ou seja, a curva associada a uma função do segundo grau:

$$x(t) = A + Bt + Ct^2$$

Os valores dos parâmetros A, B e C são determinados adiante e estão relacionados, como veremos, às seguintes grandezas físicas: posição inicial, módulo da velocidade inicial e módulo da aceleração.

Se a tabela dos dados experimentais pode ser pensada como uma espécie de descrição muito incompleta do movimento do centro de massa do volante, o gráfico da posição em função do tempo, construído acima, também pode ser pensado como uma descrição desse movimento, só que bem mais completa.

Exercício 1

Ao analisar o movimento unidimensional de uma partícula num certo referencial, um estudante construiu a tabela a seguir, que relaciona algumas posições da partícula aos instantes de tempo indicados por um cronômetro.

x(cm)	0	20	40	50	70	80	70	60	40	30	20
t(s)	0	10	18	24	35	38	42	50	56	62	68

Construa, em papel milimetrado, o correspondente gráfico posição x tempo.

Exercício 2

Duas partículas se movem ao longo do eixo X de certo referencial e seus movimentos são descritos pelas expressões:

$$x_1(t) = t^2 - 1$$

e

$$x_2(t) = 5t - 2$$

em que x representa posição (em cm) e t, instante de tempo (em s). Construa, em papel milimetrado, os correspondentes gráficos posição x tempo e verifique se as partículas colidem em alguma posição.

X. Velocidade Média

Como já foi dito acima, o movimento do centro de massa do volante pode ser representado pela tabela que relaciona suas posições aos instantes de tempo e também pelo gráfico posição x tempo. Agora vamos discutir uma outra representação, esta baseada em expressões matemáticas. Para início de conversa vamos definir velocidade média.

Se o volante ocupa a posição $\mathbf{x}_1$ no instante de tempo t_1 e a posição $\mathbf{x}_2$ no instante de tempo t_2, definimos o vetor velocidade média do volante entre os instantes t_1 e t_2 como:

$$\mathbf{v}(t_1, t_2) = \frac{\mathbf{x_2} - \mathbf{x}_1}{t_2 - t_1}$$

Escrevendo $\Delta\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ para o vetor deslocamento e $\Delta t = t_2 - t_1$ para o correspondente intervalo de tempo, a expressão acima fica:

$$\mathbf{v}(t_1, t_2) = \frac{\Delta\mathbf{x}}{\Delta t}$$

Em palavras: a velocidade média num certo intervalo de tempo é o cociente do deslocamento pelo intervalo de tempo levado para percorrê-lo. Como o deslocamento é um vetor, a velocidade média também é um vetor. Ainda, a notação matemática $\mathbf{v}(t_1,t_2)$ enfatiza que a velocidade média é função de dois instantes de tempo.

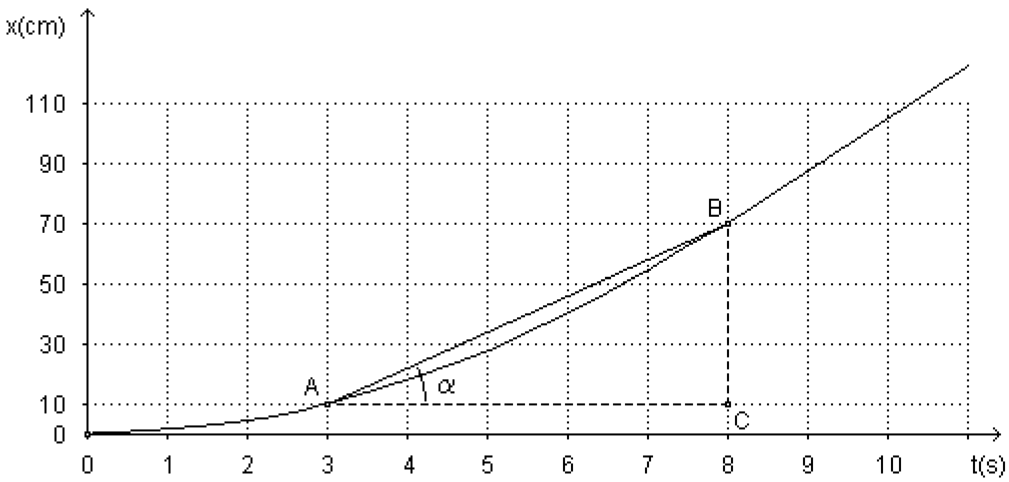

Fig.10

Conclusão

A partir da Fig.10 concluímos que, para calcular o módulo da velocidade média entre os instantes de tempo t_1 e t_2, podemos seguir os seguintes passos:

- Marcamos, no gráfico, os pontos correspondentes aos instantes de tempo dados. Como A e B na figura acima.
- Traçamos um segmento de reta secante ao gráfico unindo os pontos marcados.
- Construímos um triângulo retângulo tendo esse segmento de reta secante como hipotenusa. Como o triângulo ABC na figura acima.
- Estabelecemos, pela observação direta do desenho, os valores de Δx e Δt.
- Calculamos o cociente de Δx por Δt e o resultado é o módulo da velocidade média entre os instantes de tempo considerados.

Trigonometria

Num triângulo retângulo, o lado oposto ao ângulo reto é chamado de hipotenusa. Os outros dois lados são chamados de catetos. Na Fig.10, o triângulo ABC é um triângulo retângulo, com ângulo reto em C. O segmento AB é a hipotenusa, o segmento BC é o cateto oposto ao ângulo α e o segmento CA é o cateto adjacente ao ângulo α.

A partir de um triângulo retângulo podemos definir as funções seno, cosseno e tangente. Assim, para o triângulo ABC temos, respectivamente:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{BC}{AB}$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}$$

e

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{BC}{AC}$$

Sendo assim, o módulo da velocidade média pode ser escrito:

$v(t_1,t_2) = \text{tg}\ \alpha$

Exemplo 1

Com relação ao movimento do centro de massa do volante que estamos estudando, consideremos os instantes de tempo t_1 = 3 s e t_2 = 8 s. A esses instantes de tempo correspondem, respectivamente, as posições $x_1 \approx$ 10,0 cm e $x_2 \approx$ 70,0 cm. Essas posições são determinadas a partir do gráfico posição x tempo (Fig.10). O módulo da velocidade média do volante nesse intervalo de tempo é:

$$v(3s,8s) \approx \frac{70{,}0\,m - 10{,}0\,m}{8{,}00\,s - 3{,}00\,s} \approx 12{,}0\,cm/s$$

Assim, a velocidade média do centro de massa do volante entre 3,00 s e 8,00 s tem módulo de 12,0 cm/s. Em outras palavras, para cada segundo, o centro de massa percorre, em termos médios, doze centímetros. Como o resultado é positivo, o sentido do vetor velocidade média é o mesmo que o do eixo X escolhido. A direção é, certamente, aquela do eixo X.

Exemplo 2

Consideremos outro movimento do centro de massa do volante. O volante é posto sobre a calha e impulsionado para cima. O seu centro de massa passa, por exemplo, pela posição x_1 = 100 cm em t_1 = 1s, alcança a posição x_2 = 50 cm em t_2 = 4s (onde atinge o repouso) e, retornando, passa pela posição x_3 = 80 cm em t_3 = 9s. O módulo da velocidade média do volante no intervalo de tempo que vai desde t_1 = 1s até t_3 = 9s é:

$$v(1s,9s) = \frac{80\,cm - 100\,cm}{9\,s - 1s} = -2{,}5\,cm/s$$

O sinal negativo indica que o sentido do vetor velocidade média no intervalo de tempo considerado é oposto ao sentido do eixo X escolhido. A direção é, certamente, aquela do eixo X.

Velocidade Escalar Média

Podemos definir também a velocidade escalar média (v_E) como o quociente da distância percorrida pelo intervalo de tempo levado para percorrê-la.

No caso do exemplo 1 acima, a velocidade escalar média tem o mesmo valor que o módulo da velocidade média. No caso do exemplo 2 acima, o mesmo não acontece porque:

$$v_E = \frac{50\,cm + 30\,cm}{9\,s - 1s} = 10\,cm/s$$

Pela definição dada deve ficar claro que a velocidade escalar média é, como o próprio nome já indica, um escalar. E mais, um escalar positivo, de modo que essa velocidade não pode incorporar o sentido do movimento do móvel.

Por esses e outros motivos, o conceito de velocidade escalar média é pouco relevante para a Física. Mas para o leigo, no uso cotidiano, esse é o conceito de velocidade mais interessante. Por exemplo, para avaliar a velocidade média de um automóvel numa viagem de uma cidade a outra, o motorista pode dividir a distância percorrida, que é indicada pelo odômetro do automóvel, pelo tempo de viagem.

Exercício 1

Um atleta corre por uma estrada retilínea. Num referencial fixo na estrada, ele se movimenta com velocidade de módulo 5 m/s durante 40 s e, em seguida, com velocidade de módulo 4 m/s durante 60 s. (a) Construa o gráfico da posição do atleta em função do tempo. (b) Calcule a sua velocidade escalar média nos 100 s considerados.

Exercício 2

Um ciclista pretende percorrer 1060 m de uma estrada retilínea em 100 s. Num referencial fixo na estrada, ele percorre os primeiros 400 m com velocidade de módulo 8 m/s e os 200 m seguintes com velocidade de módulo 10 m/s. Calcule o módulo da velocidade que ele deve ter no trecho restante para que consiga completar o percurso no tempo previsto.

Exercício 3

Faça o gráfico da posição em função do tempo e o gráfico do módulo da velocidade em função do tempo para o movimento do ciclista mencionado no exercício anterior.

Exercício 4

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. A Fig.11 representa o gráfico da posição desse automóvel num referencial fixo na estrada em função do tempo.

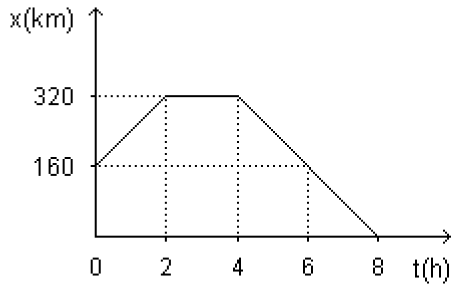

Fig.11

Calcule (a) o módulo do deslocamento e a distância percorrida pelo automóvel entre t = 0 e t = 8h e (b) o módulo da velocidade média e a velocidade escalar média do automóvel entre t = 0 e t = 8h.

XI. Movimento Retilíneo Uniforme

Observando, no gráfico da posição pelo tempo (Fig.9), os intervalos de tempo de 0 a 2s, de 2s a 4s, de 4s a 6s e assim por diante, podemos inferir que as velocidades médias do centro de massa do volante têm valores cada vez maiores. O centro de massa do volante tem um movimento com velocidade variável.

Por outro lado, podemos imaginar um móvel cuja velocidade seja constante. Por exemplo, um automóvel numa estrada retilínea cuja velocidade, num referencial fixo na estrada, fosse mantida constante em 72 km/h durante 1 minuto.

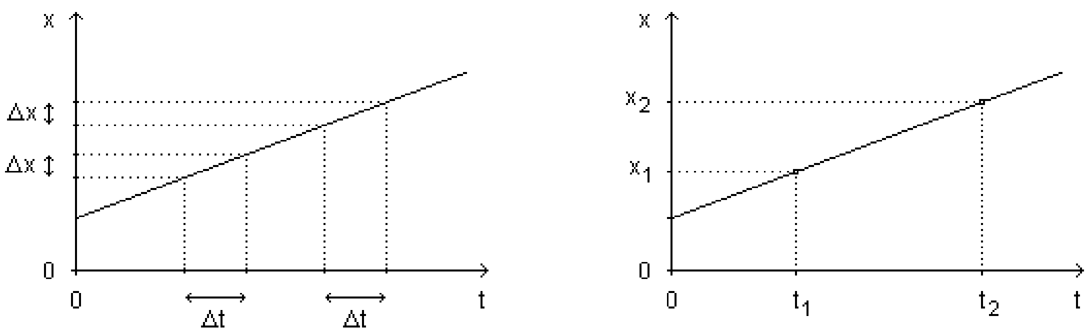

Fig.12(a) (b)

Esse móvel percorre deslocamentos iguais em intervalos de tempo iguais (Fig.12(a)). E se a trajetória for retilínea, dizemos que o móvel está em MRU, ou seja, em movimento retilíneo uniforme.

O módulo da velocidade média é, nesse caso, igual à velocidade escalar média. Como, no MRU, a velocidade é constante, não precisamos mais usar a palavra "média".

Em termos genéricos, o módulo da velocidade constante de um móvel pode ser escrito (Fig.12(b)):

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Observe que escrevemos v e não $v(t_1,t_2)$ porque a velocidade não depende do tempo. Em termos da posição no instante t_2:

$$x_2 = x_1 + v\,(t_2 - t_1)$$

ou, para explicitar a dependência temporal:

$$x(t_2) = x(t_1) + v\,(t_2 - t_1)$$

Essa expressão dá as posições de um móvel em MRU com velocidade de módulo v em função do tempo.

Entre a posição $x(t_1)$, alcançada no instante t_1, e a posição $x(t_2)$, alcançada no instante t_2, o móvel tem um deslocamento de módulo:

$$d = x(t_2) - x(t_1) = v\,(t_2 - t_1)$$

No MRU, o módulo da velocidade é constante. O gráfico do módulo da velocidade em função do tempo é uma reta paralela ao eixo dos tempos (Fig.13). Então, a área do retângulo definido entre o gráfico e o eixo dos tempos e entre os instantes t_1 e t_2 representa o módulo do deslocamento entre esses instantes.

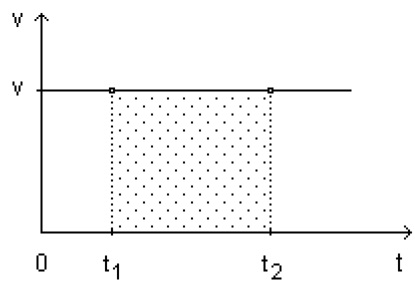

Fig.13

É usual, na Cinemática, considerar $t_1 = 0$, ou seja, considerar que o intervalo de tempo é marcado a partir do instante inicial de observação do movimento. Como se observássemos o movimento com um cronômetro, por exemplo. E o instante final do intervalo considerado pode ser tomado como um instante genérico, $t_2 = t$. Ainda, a posição inicial, ou seja, a posição do móvel quando a observação do movimento teve início, é escrita $x(t_1) = x(0)$. Assim, a expressão da posição em função do tempo fica:

$$x(t) = x(0) + vt$$

Esta expressão é conhecida como equação horária da posição.

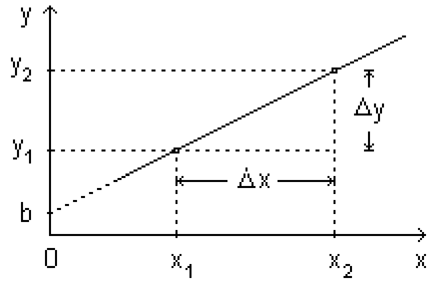

Fig.14

Matematicamente, se o gráfico de y contra x é uma reta (Fig.14), temos:

$y(x) = ax + b$

em que:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

e

$b = y(0)$

A constante a é chamada de inclinação ou declividade da reta. A constante b é chamada de parâmetro linear da reta.

No caso da reta que representa o gráfico da posição em função do tempo para um MRU, portanto, a declividade deve ser interpretada fisicamente como o módulo da velocidade e o parâmetro linear como a posição inicial.

Exemplo

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. A Fig.15 representa o gráfico da posição desse automóvel num referencial fixo na estrada em função do tempo.

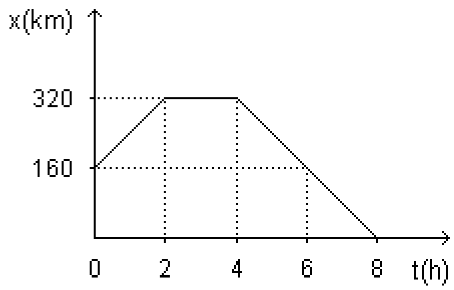

Fig.15

Para construir o correspondente gráfico do módulo da velocidade do automóvel em função do tempo temos que levar em conta que, se a velocidade é constante, o seu módulo pode ser calculado pela expressão:

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Pela análise do gráfico da posição em função do tempo, podemos concluir que o módulo da velocidade do automóvel é constante nos seguintes intervalos: de t = 0 até t = 2h, de t = 2h até t = 4h e de t = 4h até t = 8h. Assim, os correspondentes módulos das velocidades ficam:

$$v(0{,}2h) = \frac{320\,km - 160\,km}{2\,h - 0} = 80\,km/h$$

$$v(2h{,}4h) = \frac{320\,km - 320\,km}{4\,h - 2\,h} = 0$$

e

$$v(4h{,}8h) = \frac{0 - 320\,km}{8\,h - 4\,h} = -80\,km/h$$

O gráfico do módulo da velocidade em função do tempo está representado na Fig.16.

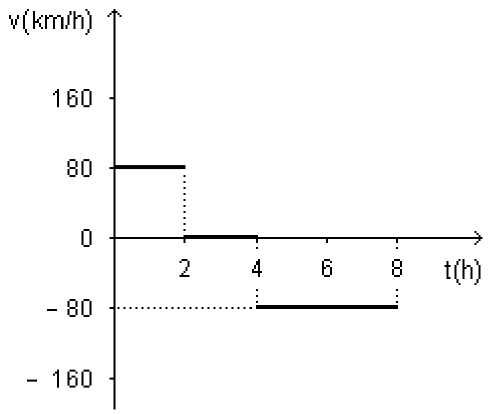

Fig.16

O gráfico da Fig.16 mostra que, num referencial fixo na estrada, o automóvel anda em linha reta, durante duas horas, com velocidade de módulo igual a 80 km/h, permanece parado durante as duas horas seguintes e anda em sentido contrário, durante mais quatro horas, com velocidade de módulo igual a 80 km/h.

Exercício 1

Num dado referencial, a posição de uma partícula em função do tempo é dada pela expressão:

$x(t) = -10 + 2t$

em que x é dado em metros e t, em segundos. (a) Construa o gráfico da posição em função do tempo para essa partícula. (b) Calcule a posição da partícula em t = 0 e interprete o resultado. (c) Determine o módulo da velocidade da partícula.

Exercício 2

As partículas A e B se deslocam sobre o eixo X de certo referencial, no mesmo sentido e com velocidades de módulos v_A = 15 m/s e v_B = 10 m/s respectivamente. No instante zero, a partícula A está na origem do eixo X e a partícula B está 100 m adiante. Determine a posição em que as partículas se encontram e o instante de tempo no qual isso ocorre.

Exercício 3

Determine as equações horárias das posições das partículas A e B do exercício anterior.

XII. Velocidade Instantânea

Já observamos que o conceito de velocidade média está associado a dois instantes de tempo. Por exemplo, t_1 e t_2. E escrevemos $v(t_1,t_2)$ para o módulo dessa velocidade média.

Por outro lado, em conexão com a Fig.10 concluímos que o módulo da velocidade média entre esses instantes de tempo pode ser obtido a partir do segmento de reta secante ao gráfico da posição em função do tempo. Esse segmento de reta deve ligar os pontos A e B do gráfico, pontos estes que correspondem aos instantes de tempo t_1 e t_2.

O conceito de velocidade instantânea está associado a um instante de tempo. Por exemplo, t_1. E escrevemos $v(t_1)$ para o módulo dessa velocidade instantânea. Podemos pensar que o módulo da velocidade instantânea $v(t_1)$ é o valor do módulo da velocidade média $v(t_1,t_2)$ quando t_2 é tomado muito próximo de t_1.

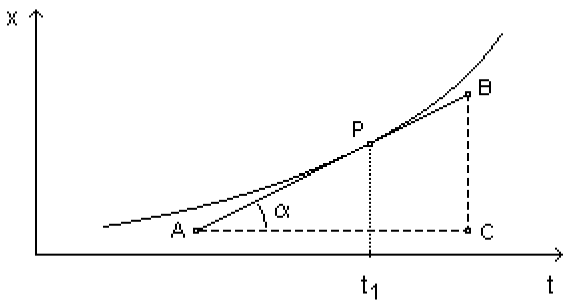

Fig.17

Desse modo, o cálculo do módulo da velocidade instantânea $v(t_1)$ pode ser feito como o cálculo do módulo da velocidade média $v(t_1,t_2)$, desde que o segmento de reta secante seja substituído por um segmento de reta tangente ao gráfico posição x tempo (Fig.17). Assim, para calcular o módulo da velocidade instantânea no instante de tempo t_1 podemos seguir os seguintes passos:

• Assinalamos, no gráfico, o ponto P, que corresponde ao instante de tempo t_1 considerado.

• Traçamos um segmento de reta tangente ao gráfico passando pelo ponto P.

• Construímos um triângulo retângulo, como o triângulo ABC, tendo esse segmento de reta tangente como hipotenusa. Os catetos são tomados paralelamente aos eixos.

• Estabelecemos, pela observação direta do desenho, o valor de Δx, o comprimento do segmento BC, e o valor de Δt, o comprimento do segmento AC.

• Calculamos o cociente de Δx por Δt e o resultado é $v(t_1)$, o módulo da velocidade instantânea no instante de tempo considerado.

Os lados do triângulo podem ter quaisquer dimensões, desde que o triângulo resultante seja retângulo e a hipotenusa seja tangente ao gráfico. Contudo, como o módulo da velocidade instantânea é calculado pelo cociente das dimensões dos catetos e como essas dimensões são medidas com uma régua, para minimizar os erros associados a esse processo de medida, é conveniente que esses lados não sejam muito pequenos.

Exemplo

Vamos calcular o módulo da velocidade instantânea do centro de massa do volante do experimento que estamos considerando nos instantes t = 2s, t = 4s, t = 6s e t = 8s usando o procedimento descrito acima (Fig.18).

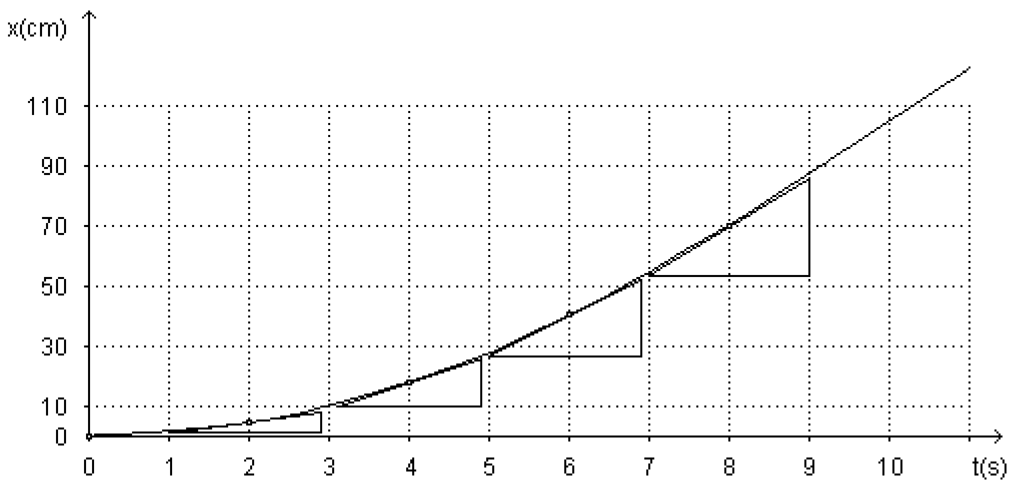

Fig.18

Por inspeção dessa figura, podemos escrever, para os respectivos módulos da velocidade instantânea do centro de massa do volante sobre a calha:

$$v(2s) = \frac{7{,}0\,cm}{1{,}9\,s} = 3{,}7\,cm/s$$

$$v(4s) = \frac{16{,}0\,cm}{1{,}8\,s} = 8{,}9\,cm/s$$

$$v(6s) = \frac{26{,}0\,cm}{1{,}9\,s} = 13{,}7\,cm/s$$

e

$$v(8s) = \frac{33{,}0\,cm}{2{,}0\,s} = 16{,}5\,cm/s$$

Como sabemos, no procedimento experimental através do qual obtivemos os dados, o centro de massa do volante estava parado no instante inicial e, por isso, podemos escrever:

v(0) = 0

Com os valores obtidos acima para os módulos das velocidades instantâneas, podemos montar a tabela que se segue.

t(s)	0	2	4	6	8
v(cm/s)	0	3,7	8,9	13,7	16,5

Cada par de valores de cada coluna dessa tabela, ou seja, a cada instante de tempo e o correspondente módulo da velocidade instantânea do centro de massa do volante, corresponde um ponto no gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo (Fig.19). Na figura, os pontos são representados por um pequeno quadrado.

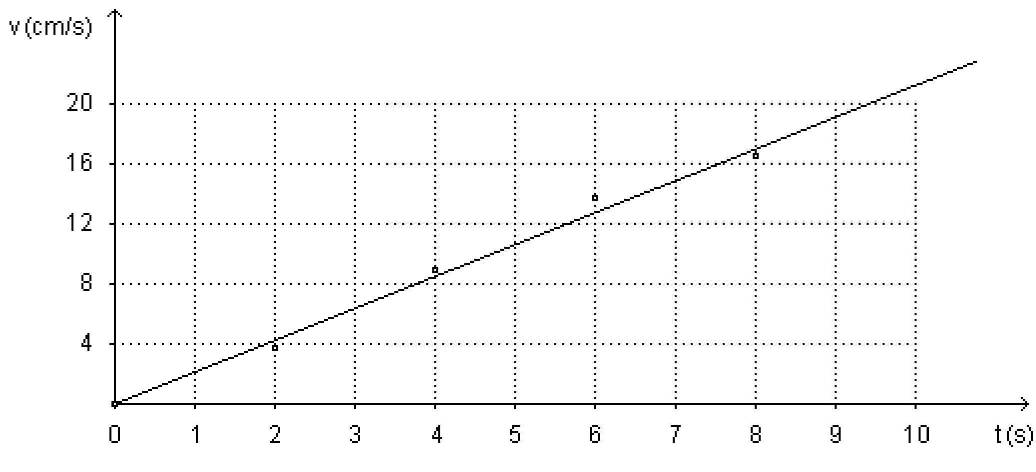

Fig.19

Os cinco pontos representados na figura correspondem aos módulos das velocidades instantâneas obtidas a partir do gráfico posição x tempo. Mas o módulo da velocidade do centro de massa do volante aumenta gradativamente a partir do zero e, por isso, podemos desenhar uma curva contínua que passa mais ou menos por esses cinco pontos. Além disso, como o movimento do centro de massa do volante não apresenta irregularidades, é razoável supor que essa curva seja suave. Aqui, desenhamos uma reta porque esse resultado já é bem conhecido na literatura. De qualquer forma, desenhando o gráfico posição x tempo em papel milimetrado, tomando um número maior de instantes de tempo para calcular o módulo da velocidade instantânea e marcando, também em papel milimetrado, os pontos que representam os resultados, podemos verificar que o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo é realmente uma reta.

O procedimento pelo qual obtivemos os módulos das velocidades instantâneas do centro de massa do volante começa com o traçado de segmentos de reta tangente ao gráfico posição x tempo. Esse traçado é feito conforme o olhar do sujeito que traça e envolve erros que não podem ser evitados. E esses erros afastam o valor calculado do valor verdadeiro. Por isso, a reta que representa o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo pode não passar pelos pontos determinados. Como os erros devem ser aleatórios, ou seja, algumas vezes levam a valores maiores e algumas vezes levam a valores menores do que os valores verdadeiros, o gráfico deve passar mais ou menos por entre os pontos.

De qualquer modo, devemos considerar não os pontos, mas a reta assim desenhada como representando verdadeiramente o módulo da velocidade instantânea do centro de massa do volante em função do tempo.

Exercício 1

Uma partícula se move ao longo de uma linha reta sobre a qual é colocado o eixo X do referencial. A partícula é observada durante 80s, suas posições são determinadas e o gráfico da posição em função do tempo é construído (Fig.20). Determine o módulo da velocidade instantânea dessa partícula nos seguintes instantes: t = 10s, t = 50s e t = 68s.

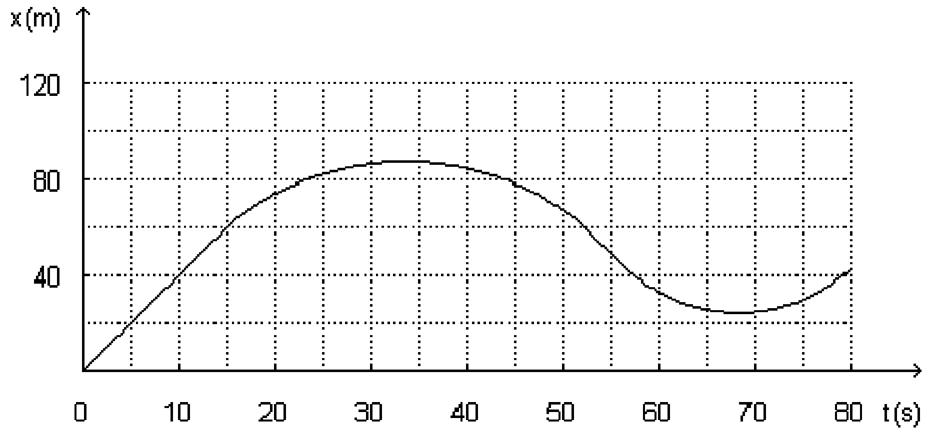

Fig.20

Exercício 2

Uma partícula se move ao longo de uma linha reta sobre a qual é colocado o eixo X do referencial. Se suas posições são dadas em metros e os instantes de tempo são dados em segundos, a equação horária da posição fica:

$x(t) = 4 - 2t + t^2$

Construa, em papel milimetrado, o gráfico de x por t e determine o módulo da velocidade instantânea dessa partícula nos instantes t = 4s e t = 10s.

XIII. Aceleração

Vamos trabalhar apenas com movimentos de aceleração constante. Nesse caso, o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo é uma reta e os conceitos de aceleração média e de aceleração instantânea se confundem. O movimento do centro de massa do volante sobre a calha é um exemplo desse tipo de movimento.

A declividade da reta que constitui o gráfico da velocidade instantânea em função do tempo é interpretada fisicamente como o módulo da aceleração do móvel em questão.

Então, o vetor aceleração é definido por:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1}{t_2 - t_1}$$

em que $\mathbf{v}_1$ é a velocidade instantânea no instante t_1 e $\mathbf{v}_2$, a velocidade instantânea no instante t_2.

Exemplo

Vamos calcular o módulo da aceleração do centro de massa do volante. Tomando $t_1 = 0$ e $t_2 = 7s$ podemos ver, pelo gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo (Fig.19), que v(0) = 0 e v(7s) = 14,7 cm/s. Assim:

$$a = \frac{14{,}7\,\text{cm/s} - 0}{7\,\text{s} - 0} = 2{,}1\,\text{cm/s}^2$$

Isso significa que, a cada segundo, o módulo da velocidade do centro de massa do volante tem um aumento de 2,1 cm/s.

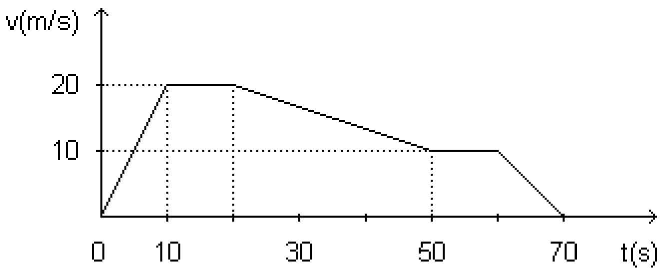

Fig.21

Exercício 1

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. No referencial fixo na estrada, o módulo da velocidade do automóvel varia com o tempo conforme o gráfico da Fig.21. Construa o gráfico do módulo da aceleração do automóvel em função do tempo.

Exercício 2

Um automóvel está sendo testado numa pista plana e retilínea e o módulo da sua velocidade está sendo medido num referencial fixo na pista. Numa tentativa, o motorista faz com que o automóvel, partindo do repouso, alcance 36,0 km/h em 2,5 s. Noutra tentativa, o motorista faz com que o automóvel, partindo do repouso, alcance 64,8 km/h em 4,8 s. Determine em qual tentativa o módulo da aceleração do automóvel é maior.

XIV. Movimento Retilíneo Uniformemente Variado

O movimento do centro de massa do volante é um exemplo de movimento retilíneo uniformemente variado (MRUV), ou seja, um movimento ao longo de uma reta com aceleração constante.

Já vimos que o MRU pode ser definido dizendo que a partícula se move em linha reta, percorrendo deslocamentos iguais em intervalos de tempo iguais. Por isso, o correspondente gráfico da posição em função do tempo é uma reta. De modo análogo, o MRUV pode ser definido dizendo que a partícula se move em linha reta, com o módulo da sua velocidade instantânea tendo variações iguais em intervalos de tempo iguais. Por isso, o correspondente gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo é uma reta.

O módulo da aceleração pode ser escrito:

$$a = \frac{v(t_2) - v(t_1)}{t_2 - t_1}$$

É usual, na Cinemática, considerar $t_1 = 0$, ou seja, considerar que o intervalo de tempo é marcado a partir do instante inicial de observação do movimento. E o instante final do intervalo considerado pode ser tomado como um instante genérico, $t_2 = t$. Assim, a expressão acima fica:

$$v(t) = v(0) + at$$

Esta expressão é conhecida como a equação horária da velocidade.

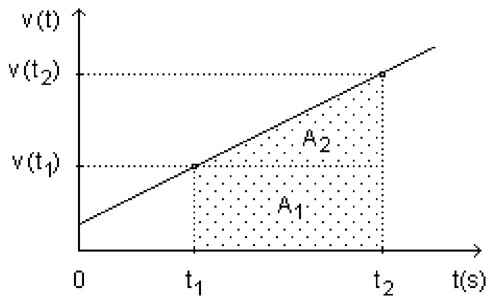

Fig.22

Por outro lado, no MRUV, assim como no MRU, a área da figura definida entre o gráfico do módulo da velocidade instantânea em função do tempo e o eixo dos tempos entre os instantes t_1 e t_2 representa o módulo do deslocamento no intervalo de tempo definido por esses instantes (Fig.22). Então:

$$x(t_2) - x(t_1) = A_1 + A_2$$

Pela inspeção do gráfico podemos ver que os valores das áreas A_1 e A_2 são dados pelas seguintes expressões matemáticas:

$$A_1 = v(t_1)\,(\,t_2 - t_1\,)$$

e

$$A_2 = \tfrac{1}{2}\,[\,v(t_2) - v(t_1)\,]\,(\,t_2 - t_1\,) = \tfrac{1}{2}\,a\,(\,t_2 - t_1\,)^2$$

Desta forma:

$$x(t_2) - x(t_1) = v(t_1)\,(\,t_2 - t_1\,) + \tfrac{1}{2}\,a\,(\,t_2 - t_1\,)^2$$

e considerando, como antes, $t_1 = 0$ e $t_2 = t$, obtemos:

$$x(t) - x(0) = v(0)\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

Esta é a expressão matemática para o módulo do deslocamento no MRUV. A expressão da posição em função do tempo, ou seja, a equação horária da posição pode ser escrita:

$$x(t) = x(0) + v(0)\,t + \tfrac{1}{2}\,a\,t^2$$

Para o movimento que estamos considerando, do centro de massa do volante ao longo da calha, $x(0) = 0$, $v(0) = 0$ e $a = 2{,}1\ cm/s^2$. Então, a equação horária da velocidade e a equação horária da posição ficam, respectivamente:

$$v(t) = (\,2{,}1\ cm/s^2\,)\,t$$

e

$$x(t) = \tfrac{1}{2}\,(\,2{,}1\ cm/s^2\,)\,t^2$$

Exemplo

Num referencial fixo na estrada retilínea, o motorista de um automóvel faz com que ele inicie o seu movimento com aceleração constante de módulo igual a $8\ m/s^2$.

Vamos calcular o intervalo de tempo levado pelo automóvel para percorrer os primeiros 36 m com a mesma aceleração.

Fazendo $x(0) = 0$, $x(t) = 36\ m$, $v(0) = 0$ e $a = 8\ m/s^2$, a equação horária da posição fica:

$$36\ m = \tfrac{1}{2}\,(\,8\ m/s^2\,)\,t^2$$

e daí, $t = 3s$.

Para calcular o módulo da velocidade do automóvel no instante em que ele atinge a posição $x = 36\ m$, fazemos $v(0) = 0$ e $a = 8\ m/s^2$ na equação horária da velocidade:

$$v(3s) = (\,8\ m/s^2\,)(\,3s\,) = 24\ m/s$$

Portanto, num referencial fixo na estrada, um automóvel, partindo do repouso e mantendo uma aceleração constante de módulo 8 m/s^2, alcança uma velocidade de módulo 24 m/s ao final de um percurso de 36 m. Tudo isso acontece num intervalo de três segundos.

Exercício 1

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. No referencial fixo na estrada, o módulo da velocidade do automóvel varia com o tempo conforme o gráfico da Fig.21. Calcule o módulo do deslocamento do automóvel entre t = 10s e t = 50s.

Exercício 2

Num referencial fixo na estrada, o motorista de um automóvel faz com que ele inicie o seu movimento com aceleração constante de módulo igual a 5 m/s^2. Calcule o módulo do deslocamento do automóvel ao final do qual ele atinge uma velocidade de módulo igual a 30 m/s.

Exercício 3

Num referencial fixo na estação, um trem percorre 200 m em 25 s, durante o processo de frenagem. Determine (a) o módulo da velocidade do trem no instante em que iniciou a frenagem e (b) o módulo da sua aceleração.

Exercício 4

Um automóvel percorre uma estrada retilínea. Num referencial fixo na estrada, o módulo da sua velocidade é de 10 m/s no instante em que o motorista pisa no acelerador, produzindo uma aceleração constante que faz o módulo da velocidade passar para 20 m/s em 5s. Considerando como t = 0 o instante em que o motorista pisa no acelerador, calcule (a) o módulo da aceleração do automóvel, (b) o módulo da velocidade do automóvel em t = 10s se a aceleração permanece constante e (c) o módulo do deslocamento do automóvel entre t = 0 e t = 10s.

DINÂMICA

I. Introdução

Na Cinemática, estudamos dois tipos de movimento unidimensionais, o MRU e o MRUV. O MRU é um movimento retilíneo com velocidade constante. O MRUV é um movimento retilíneo com aceleração constante. O primeiro é um caso particular do segundo. As expressões matemáticas associadas ao MRUV se reduzem às expressões associadas ao MRU quando fazemos a aceleração igual a zero. De qualquer modo, a menos das condições iniciais, a grandeza fundamental na descrição do movimento é a aceleração. Na Cinemática, não estudamos a origem da aceleração, quando ela aparecia. Por isso se diz que, na Cinemática, estudamos os movimentos sem levar em consideração as suas causas ou, o que dá no mesmo, sem levar em conta os seus agentes causadores. Na Dinâmica, estudamos o movimento a partir dos seus agentes causadores. Esses são chamados de forças. Em poucas palavras: na Dinâmica, estudamos a origem da aceleração. A Dinâmica está estruturada pelas três leis de Newton.

Aqui é conveniente observarmos o seguinte. Numa ciência da Natureza como a Física, fazemos distinção entre princípio e lei. Princípio é uma proposição tomada como verdadeira desde o início. Um princípio tem o mesmo papel que um postulado na Matemática. Não pode ser verificado de modo direto pela experimentação, mas apenas indiretamente, pela concordância de suas conseqüências com os fatos observados. Podemos dizer, nesse sentido, que um princípio não é conseqüência da experimentação, mas que se sustenta pela experimentação. Por outro lado, lei é uma proposição que enuncia uma relação entre os valores das grandezas que aparecem na descrição de um fenômeno. Essa relação pode ser verificada experimentalmente de modo direto. Por exemplo, a lei de Hooke, que estabelece a proporcionalidade entre a elongação de uma mola e o módulo da força de restituição que ela exerce. Podemos verificar experimentalmente se uma dada mola segue essa lei e até que ponto isso acontece.

As proposições que estruturam a Dinâmica são chamadas de leis de Newton porque podem ser verificadas por experimentos reais ou de pensamento.

II. Primeira Lei de Newton

Na Cinemática, vimos que não se pode falar em movimento sem antes escolher um referencial e que essa escolha é arbitrária. O movimento de uma dada partícula é diferente em diferentes referenciais. Os fenômenos físicos acontecem de modo diferente em diferentes referenciais. No estudo de um dado fenômeno, é natural escolher o referencial de modo que esse fenômeno pareça de forma mais simples. Por exemplo, num referencial em que o Sol está em repouso, os planetas se movem em órbitas elípticas segundo leis simples (as leis de Kepler).

Para discutir o conteúdo físico da primeira lei, vamos considerar algumas partículas muito distantes umas das outras e de quaisquer outras partículas do Universo. Aquelas partículas não interagem umas com as outras e nem com as demais partículas do Universo. Dizemos que elas são partículas livres ou que elas têm movimentos livres. Esses movimentos aparecem de modo diferente em diferentes referenciais.

O conteúdo físico da primeira lei de Newton é o seguinte: num referencial em que uma partícula livre está em repouso, qualquer outra partícula livre do Universo só pode estar em repouso ou em MRU.

Força

Um referencial em que uma partícula livre está em repouso ou em MRU é chamado de referencial inercial.

Se, num referencial inercial, uma partícula não está em repouso nem em MRU, dizemos que, sobre ela, atua uma ou mais forças. Uma partícula que não está distante das demais partículas do Universo interage com elas, ou seja, está sob o efeito das forças originadas por essas interações.

Pode acontecer que as forças que atuam sobre uma partícula se cancelem mutuamente. Do ponto de vista experimental, o movimento de uma partícula quando sobre ela não atuam quaisquer forças é idêntico ao movimento dessa mesma partícula quando atuam várias forças que se cancelam mutuamente. Nos dois casos temos que dizer que a partícula é livre ou que ela tem movimento livre.

Dessa forma, a primeira lei de Newton pode ser enunciada do seguinte modo: se a resultante das forças que atuam sobre uma partícula é nula, ela está parada ou em MRU num referencial inercial.

Todas as forças da Natureza podem ser entendidas em termos de apenas quatro interações fundamentais: nuclear forte, nuclear fraca, eletromagnética e gravitacional. As duas primeiras se manifestam dentro do átomo e não trazem conseqüências diretas ao nosso mundo macroscópico cotidiano. A interação eletromagnética aparece, por exemplo, como força de atrito, força normal, força elástica e tensão em cordas e cabos. A interação gravitacional aparece como força peso.

Inércia e Massa

Para discutir a primeira lei e os conceitos de inércia e massa, vamos considerar um veículo percorrendo um trecho retilíneo de uma estrada. Num referencial fixo na estrada, o veículo se movimenta com velocidade constante. Nesse mesmo referencial, o motorista e os passageiros também se movimentam com velocidade constante, igual à velocidade do veículo. Se o motorista pisa no freio, parando o veículo repentinamente, os passageiros, pegos de surpresa, são projetados à frente.

Vamos supor que o referencial fixo na estrada é um referencial inercial. Nesse referencial, enquanto o veículo, o motorista e os passageiros se deslocam com velocidade constante, a resultante das forças que agem sobre cada um deles é nula. Durante o intervalo de tempo entre o instante em que o motorista pisa no freio e o instante em que o veículo pára, atua, sobre o veículo, uma força associada ao atrito dos pneus com a estrada. Essa força faz diminuir a velocidade do veículo. Mas se continua nula a resultante das forças que atuam sobre cada passageiro, eles continuam em movimento com aquela velocidade constante e, por isso, eles são projetados à frente.

Estritamente falando, em relação à situação descrita acima, no momento em que o veículo inicia a diminuição de velocidade, os passageiros começam a deslizar nos seus assentos e, por isso, sobre cada passageiro, passa a atuar uma força associada ao atrito com o assento. Com isso, a resultante das forças sobre cada passageiro deixa de ser nula e a sua velocidade passa a diminuir. Essa diminuição é menor do que a diminuição de velocidade do veículo porque a intensidade da força que passou a atuar sobre o veículo é maior do que a intensidade da força que passou a atuar sobre cada passageiro. De qualquer forma, cada passageiro é projetado à frente em relação ao veículo e em relação à estrada.

Por outro lado, podemos pensar numa outra situação, em que a força que atua sobre o veículo tem a mesma intensidade que a força que atua sobre cada passageiro. Nesse caso, a diminuição da velocidade do veículo é menor do que a diminuição da velocidade de cada passageiro. Nesse sentido, dizemos que o veículo tem uma tendência de permanecer em movimento maior do que a tendência de permanecer em movimento de cada passageiro. A propriedade dos corpos, associada a essa tendência de permanecer no movimento atual, é o que chamamos de inércia. Dizemos, então, que a inércia do veículo é maior do que a inércia de cada passageiro. Massa é a grandeza física associada a essa propriedade de inércia. A primeira lei de Newton é também chamada lei da inércia.

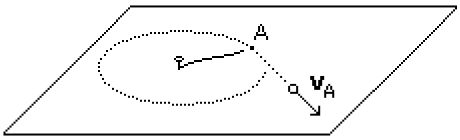

Fig.1

Vamos discutir outra situação. Um corpo, ligado a um ponto fixo por um fio, descreve um movimento circular uniforme sobre um plano horizontal sem atrito (Fig.1).

No movimento circular uniforme, a velocidade do corpo varia continuamente por efeito da aceleração centrípeta. No momento em que o corpo está passando pelo ponto A, com velocidade $\mathbf{v}_A$, o fio se rompe. A partir desse instante, a aceleração centrípeta passa a ser nula e a velocidade do corpo não pode mais mudar. Assim, a partir do instante em que o fio se rompe, o corpo passa a se mover com velocidade $\mathbf{v}_A$ constante, ou seja, num MRU com velocidade $\mathbf{v}_A$.

Por isso, a primeira lei de Newton permite afirmar que, se é nula a resultante das forças que atuam sobre um corpo, ele tende a permanecer parado ou em MRU.

Forças Inerciais

Para discutir o conceito de força inercial vamos considerar, como primeiro exemplo, um veículo que se desloca, com velocidade de módulo constante, num trecho retilíneo e, depois, num trecho em curva de uma estrada horizontal (Fig.2).

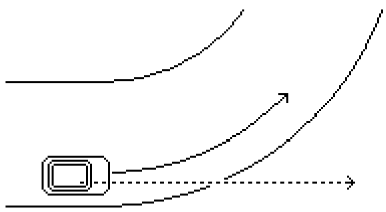

Fig.2

Na curva, o passageiro que viaja ao lado do motorista é jogado contra a lateral do veículo.

Em primeiro lugar, vamos tomar um referencial fixo na estrada.

Nesse referencial, que pode ser considerado inercial, o veículo percorre o traçado da curva por efeito das forças de atrito da estrada sobre os pneus, mas o passageiro tende a continuar em linha reta, desde que seja pequena a intensidade da força associada ao atrito com o assento. Portanto, no referencial inercial considerado, a propriedade de inércia do passageiro explica porque ele é jogado contra a lateral do veículo.

Agora vamos tomar um referencial fixo no veículo.

Nesse referencial, que não é inercial, o veículo está sempre em repouso. O passageiro, antes da curva, está em repouso e, ao entrar na curva, passa a se mover na direção da lateral do veículo. A mudança de velocidade do passageiro deve ser atribuída a uma força. Essa força, chamada força centrífuga, não pode ser associada a qualquer interação fundamental e só existe porque o referencial escolhido não é inercial.

Como segundo exemplo, vamos considerar um foguete no espaço interestelar, longe de qualquer outro corpo, com um astronauta no seu interior. Com os motores desligados, o foguete e o astronauta estão em repouso num referencial inercial S fixo nas estrelas longínquas (Fig.3(a)).

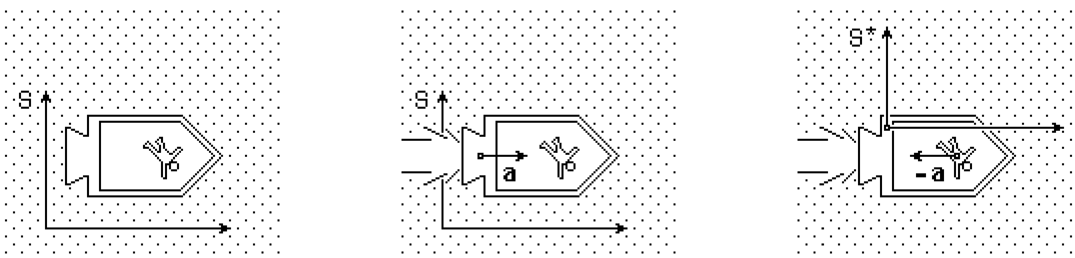

Fig.3(a) (b) (c)

A partir do instante em que os motores são ligados, o foguete adquire uma aceleração **a** no referencial inercial S, mas o astronauta permanece em repouso nesse referencial. Desta forma, a plataforma traseira do foguete se aproxima do astronauta com aceleração **a** (Fig.3(b)).

No referencial não inercial S*, fixo no foguete com os motores ligados, o astronauta se move, aproximando-se da plataforma traseira do foguete com uma aceleração − **a** (Fig.3(c)). Portanto, no referencial não inercial S*, o movimento acelerado do astronauta deve ser atribuído a uma força. Essa força também não pode ser associada a qualquer interação fundamental e só existe porque o referencial S* não é inercial.

As forças que só aparecem em referenciais não inerciais são chamadas forças inerciais ou forças fictícias. A palavra “fictícias” não deve induzir o pensamento de que elas são falsas ou ilusórias. Para o passageiro do veículo que percorre uma trajetória curva, a força que o joga para a lateral do veículo é completamente real e para o astronauta a bordo de um foguete com os motores ligados, a força que o joga para o fundo do foguete também é completamente real.

De qualquer modo, é importante enfatizar que uma coisa é a existência dessas forças em referenciais não inerciais e outra, é o fato de que elas não existem em referenciais inerciais e que, nesses referenciais, podemos descrever os fenômenos pela propriedade de inércia do passageiro ou do astronauta.

III. Vetores

Uma grandeza escalar é definida por um número (com unidade). O intervalo de tempo é uma grandeza escalar. Por exemplo, uma viagem de ônibus de Santa Maria a Porto Alegre dura, em média, 4h30min. A informação “4h30min” já diz tudo o que se pode dizer do intervalo de tempo. A energia, a temperatura e a pressão também são grandezas escalares.

Uma grandeza vetorial é definida por três números (com unidades) e é representada geometricamente por uma flecha com um comprimento proporcional ao módulo do vetor.

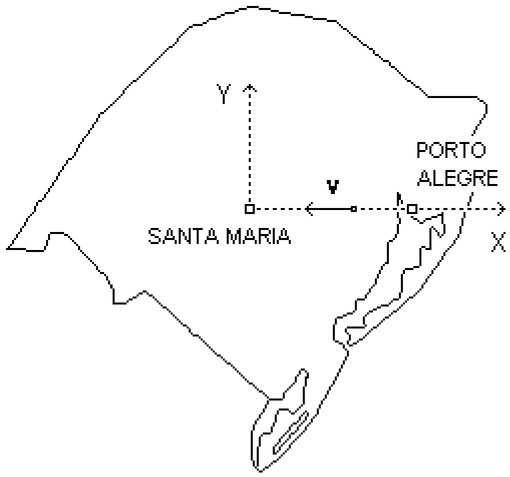

Fig.4

A velocidade média é uma grandeza vetorial. Por exemplo (Fig.4), num referencial fixo na Terra, a velocidade média de um ônibus que faz uma viagem de Porto Alegre a Santa Maria é dada pelas seguintes características:

- Módulo: v = 70 km/h
- Direção: eixo X (ou reta que passa por Porto Alegre e Santa Maria)
- Sentido: de Porto Alegre para Santa Maria

As informações de módulo, direção e sentido são, todas, necessárias para especificar a velocidade média do ônibus. O deslocamento, a aceleração e a força também são grandezas vetoriais.

Notação

São usuais as seguintes notações:

- Para o vetor, $\vec{v}$ (flecha sobre o símbolo) ou **v** (negrito).
- Para o módulo do vetor, $|\vec{v}|$ ou |**v**|, ou seja, o símbolo do vetor entre barras verticais, ou v, o símbolo do vetor sem a flecha e sem negrito.

Neste caderno, usaremos a notação **v** para o vetor e v para o seu módulo.

Soma e Subtração de Vetores

Consideremos os vetores **A** e **B** (Fig.5(a)). O vetor **C**, soma dos vetores **A** e **B**, é definido geometricamente pela regra do paralelogramo (Fig.5(b)).

C = **A** + **B**

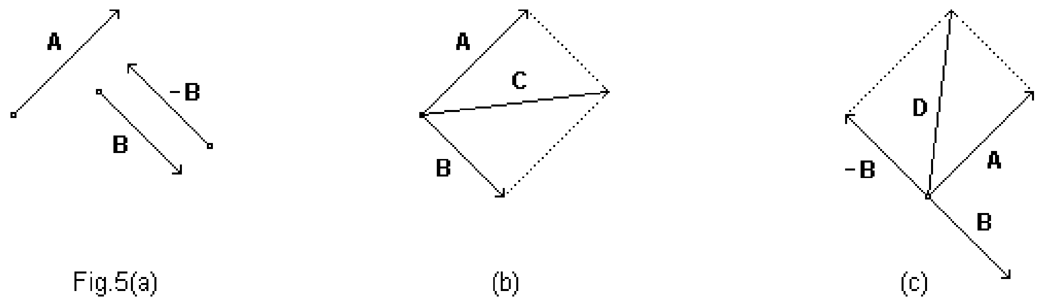

Fig.5(a) (b) (c)

O sinal negativo troca o sentido do vetor (Fig.5(a)).
Podemos pensar na subtração **A** – **B** como a soma do vetor **A** com o vetor – **B** (Fig.5(c)) e podemos usar a regra do paralelogramo:

D = **A** – **B** = **A** + (– **B**)

Decomposição Ortogonal de um Vetor

No espaço bidimensional, um vetor **A** qualquer pode ser imaginado como a soma de dois vetores ortogonais (Fig.6):

$\mathbf{A} = \mathbf{A}_X + \mathbf{A}_Y$

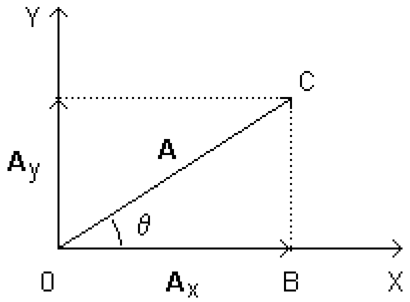

Fig.6

Dizemos, então, que o vetor **A** foi decomposto em suas componentes ortogonais $\mathbf{A}_X$ e $\mathbf{A}_Y$. Nesse caso, $\mathbf{A}_X$ é a componente ao longo do eixo X e $\mathbf{A}_Y$ é a componente ao longo do eixo Y.

Por outro lado, o triângulo 0BC é um triângulo retângulo. Pelo teorema de Pitágoras, o módulo do vetor **A** é dado por:

$$A = \sqrt{A_X^2 + A_Y^2}$$

Da Trigonometria temos:

$$\cos\theta = \frac{A_X}{A}$$

e

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{A_Y}{A}$$

de modo que os módulos das componentes do vetor **A** ao longo dos eixos X e Y podem ser escritas:

$$A_X = A \cos\theta$$

e

$$A_Y = A \operatorname{sen}\theta$$

Dividindo a segunda pela primeira resulta:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{A_Y}{A_X}$$

Esta expressão permite calcular o ângulo θ que o vetor faz com o eixo X a partir dos módulos das suas componentes.

IV. Modelos

A ciência constrói representações do mundo. Os elementos básicos dessas representações são os modelos.

Um modelo é uma imagem mental simplificada e idealizada, que permite representar, com maior ou menor precisão, o comportamento de um sistema.

O modelo incorpora apenas as características consideradas importantes para a descrição do sistema, selecionadas intuitivamente ou por conveniência matemática. De modo geral, o propósito de um modelo é simplificar certa realidade para que ela possa ser analisada. A construção de um modelo se dá no contexto de uma teoria, quando fatos estabelecidos pela observação e hipóteses sobre a estrutura do sistema e sobre o comportamento dos seus constituintes básicos são correlacionados por leis e princípios.

Um modelo muito interessante é o modelo da Teoria Cinética para um gás ideal, construído a partir das seguintes hipóteses:

- O gás é constituído por um número muito grande de moléculas em movimento desordenado, descrito pelas leis de Newton.
- O volume próprio das moléculas é desprezível quando comparado ao volume do recipiente.

• As forças entre as moléculas são desprezíveis, exceto nas colisões mútuas e com as paredes do recipiente.

É importante compreender que o modelo da Teoria Cinética para um gás ideal não é o desenho de uma caixa fechada com bolinhas no seu interior representando as moléculas, como se encontra nos livros didáticos. Nem uma caixa de papelão com bolinhas de isopor no seu interior, que o professor sacode para que as bolinhas se movimentem aleatoriamente.

O modelo da Teoria Cinética para um gás ideal é simplesmente a idéia de que existem partículas (as moléculas) e que elas se movem segundo as leis de Newton. Sendo assim, essas partículas não são necessariamente reais no mesmo sentido que o são um tijolo ou um lápis. Em vez disso, elas são idéias desenvolvidas para explicar o que se observa dos gases reais e fazer previsões sobre o que pode ser observado no futuro.

Outro modelo interessante é o modelo atômico de Bohr, construído com as seguintes hipóteses:

• Num referencial em que o núcleo do átomo está em repouso, os elétrons se movimentam ao redor dele, percorrendo órbitas circulares de acordo com as leis de Newton.

• Os elétrons podem ocupar apenas certas órbitas especiais ao redor do núcleo, chamadas órbitas estacionárias.

• Um elétron pode passar de uma órbita estacionária para outra se o átomo emitir ou absorver radiação eletromagnética.

Como os modelos são construídos para dar sentido ao mundo, é necessário que sejam validados. Em outras palavras, através da verificação experimental das suas previsões, as hipóteses, aproximações e limites de aplicabilidade do modelo são testados. Se o modelo tem apenas um sucesso parcial na predição do comportamento do sistema que procura descrever, as hipóteses iniciais devem ser modificadas. Pode acontecer também que um modelo seja completamente abandonado com base em novas descobertas.

O modelo da Teoria Cinética para um gás ideal, por exemplo, permite explicar com boa precisão as leis dos gases reais e fazer previsões sobre seu comportamento, desde que em situações não muito diferentes das usuais. Contudo, o modelo apresenta falhas na descrição do comportamento de um gás em altas pressões e/ou baixas temperaturas.

O modelo atômico de Bohr permite compreender alguns aspectos da estrutura e do comportamento dos átomos, em particular, dos átomos mais simples, mas falha redondamente na explicação de muitos outros aspectos.

De qualquer modo, mesmo tendo sido substituídos por modelos mais elaborados, o modelo da Teoria Cinética para um gás ideal e o modelo atômico de Bohr ainda são úteis para uma primeira abordagem dos respectivos sistemas de interesse.

Um modelo pode ser também uma representação matemática de um conceito. Assim, por exemplo, o modelo associado ao conceito de força é construído a partir das seguintes proposições:

• Toda força é representada por um vetor.

• As forças que atuam sobre uma determinada partícula, causadas por um número qualquer de outras partículas, são independentes umas das outras. Em outras palavras, os efeitos de uma dada força sobre uma partícula são independentes dos efeitos das demais forças sobre a mesma partícula.

- Os efeitos de um número qualquer de forças sobre uma partícula são idênticos aos efeitos de uma única força, chamada força resultante, representada pelo vetor que resulta da soma dos vetores que representam aquelas forças.

As duas últimas proposições, tomadas em conjunto, constituem o que chamamos princípio de superposição. Estritamente falando, podemos dizer que as forças devem ser representadas matematicamente por vetores devido ao princípio de superposição.

A qualidade de um modelo depende de certos fatores como, por exemplo, do número de hipóteses e proposições iniciais necessárias para construí-lo. Um bom modelo é aquele para o qual esse número é mínimo. Além disso, um bom modelo é aquele que explica o maior número possível de características das observações já realizadas sobre o comportamento do sistema em questão. Finalmente, um bom modelo deve ser capaz de predição. Em outras palavras, um modelo deve ser capaz de explicar não apenas as observações já realizadas, mas também as futuras observações sobre o comportamento do sistema em questão.

V. Equilíbrio de uma Partícula

Forças são grandezas vetoriais. Quando duas ou mais forças atuam sobre uma partícula, o seu efeito é o mesmo que o efeito da força resultante (Fig.7).

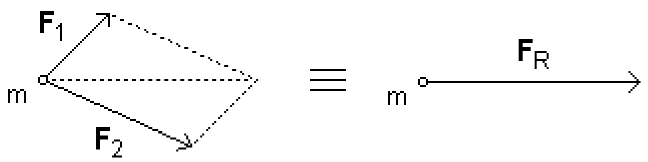

Fig.7

Uma partícula está em equilíbrio quando a resultante das forças que atuam sobre ela é nula:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0$$

Neste caso, a primeira lei de Newton permite afirmar que, se uma partícula está em equilíbrio num referencial inercial, então ela está em equilíbrio em qualquer outro referencial inercial. Além disso, se uma partícula está em equilíbrio, ela pode estar parada ou em um MRU conforme o referencial inercial escolhido.

Como os eixos X, Y e Z são ortogonais, a expressão matemática acima implica que a soma das forças ao longo de cada eixo deve ser nula. Assim, escrevemos:

$$\Sigma \mathbf{F_X} = 0$$

$$\Sigma \mathbf{F_Y} = 0$$

e

$$\Sigma \mathbf{F_Z} = 0$$

Exemplo

Uma esfera de aço, cujo peso tem módulo de 50 N, está suspensa por um cabo que faz um ângulo $\theta = 30^o$ com a horizontal e é mantida nesta posição por outro cabo, horizontal, preso a uma parede (Fig.8(a)). Vamos determinar as forças que os cabos exercem sobre a esfera.

A primeira coisa a fazer é escolher um referencial inercial. Vamos escolher um no qual a esfera está em repouso na origem, com o eixo X na horizontal e o eixo Y na vertical. Então, podemos desenhar o diagrama de corpo isolado da esfera (Fig.8(b)).

Diagrama de corpo isolado é um desenho em que o corpo é representado por um ponto e, nesse ponto, são desenhadas todas as forças que atuam sobre o corpo.

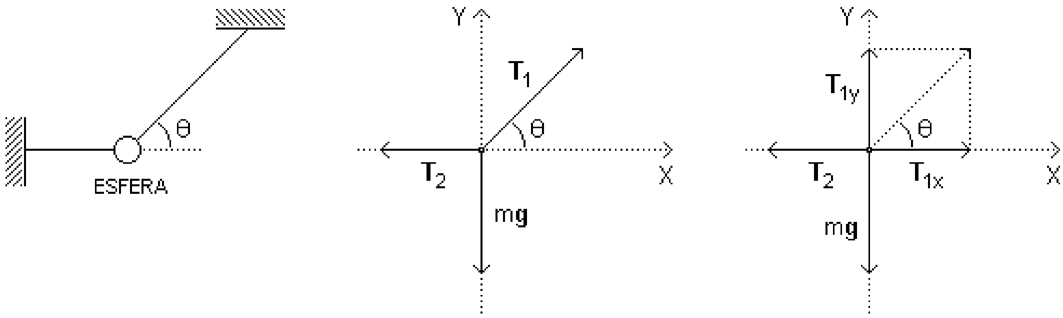

Fig.8(a) (b) (c)

Vamos determinar, portanto, as forças $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$.

A força $\mathbf{T}_1$ pode ser decomposta em componentes ao longo dos eixos X e Y. Em outras palavras, podemos substituir a força $\mathbf{T}_1$ pelas componentes $\mathbf{T}_{1x}$ e $\mathbf{T}_{1y}$ (Fig.8(c)), de módulos:

$$T_{1x} = T_1 \cos 30^o$$

e

$$T_{1y} = T_1 \text{ sen } 30^o$$

A esfera está em repouso no referencial inercial escolhido. Então, a primeira lei de Newton permite dizer que a soma das forças que atuam sobre ela é nula. A esfera está em equilíbrio. Além disso, como os eixos X e Y são ortogonais, a soma das forças ao longo de cada um deles deve ser nula.

Ao longo do eixo Y temos:

$$\mathbf{T}_{1y} + m\mathbf{g} = 0$$

O vetor $\mathbf{T}_{1y}$ tem o mesmo sentido que o eixo Y e o vetor $m\mathbf{g}$ tem sentido contrário ao do eixo Y. Por isso, podemos escrever, em módulo:

$$T_{1y} - mg = 0$$

ou

$$T_{1y} = mg$$

Assim:

$$T_1 = \frac{T_{1Y}}{\text{sen}\,30^o} = \frac{mg}{\text{sen}\,30^o} = \frac{50\,N}{0{,}5} = 100\,N$$

Ao longo do eixo X temos:

$\mathbf{T}_{1x} + \mathbf{T}_2 = 0$

O vetor $\mathbf{T}_{1x}$ tem o mesmo sentido que o eixo X e o vetor $\mathbf{T}_2$ tem sentido contrário ao do eixo X. Então, em módulo, temos:

$T_{1x} - T_2 = 0$

ou

$T_2 = T_{1x}$

Assim:

$$T_2 = T_1 \cos 30^o = (100\,N)(0{,}87) = 87\,N$$

Portanto, a força $\mathbf{T}_1$ tem módulo de 100 N e direção e sentido definidos pelo ângulo de 30^o com o eixo X. A força $\mathbf{T}_2$ tem módulo de 87 N e direção e sentido definidos por um ângulo de 180^o com o eixo X.

Exercício 1

Um corpo, cujo peso tem módulo de 200 N, está colocado sobre um plano inclinado que faz um ângulo de 30^o com a horizontal. Num referencial fixo no plano inclinado, o corpo está em repouso. Sobre o corpo, atuam três forças: a força peso, exercida pela Terra, a força de atrito, exercida pelo plano, e a força normal, também exercida pelo plano. Sabendo que a força de atrito se opõe ao movimento do corpo em relação ao plano inclinado e que a força normal é perpendicular ao plano inclinado, calcule os módulos destas duas forças.

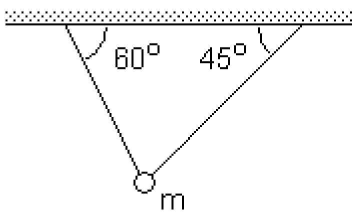

Fig.9

Exercício 2

Uma esfera, cujo peso tem módulo de 80 N, está suspensa em uma viga horizontal por dois cabos (Fig.9). Num referencial fixo na viga, a esfera está em repouso. Calcule os módulos das forças que os cabos exercem na esfera.

VI. Terceira Lei de Newton

A terceira lei de Newton afirma que a interação entre dois corpos quaisquer A e B é representada por forças mútuas: uma força que o corpo A exerce sobre o corpo B e uma força que o corpo B exerce sobre o corpo A. Estas forças têm mesmo módulo, mesma direção, mas sentidos contrários.

É usual dizer que as forças relacionadas pela terceira lei de Newton formam um par ação-reação.

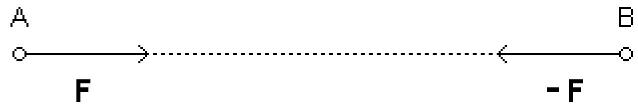

Fig.10

Por outro lado, é importante que fique bem claro o seguinte. A interação entre dois corpos origina duas forças de mesma natureza. As forças atuam em corpos diferentes (Fig.10) e, por isso, elas não se cancelam mutuamente. As forças são simultâneas: uma não vem antes nem depois da outra.

Exemplo 1

O peso de um corpo é uma força de natureza gravitacional.

Com base na terceira lei de Newton, podemos dizer que a interação gravitacional entre o corpo e a Terra dá origem a duas forças: a força peso do corpo, **P**, que a Terra exerce sobre o corpo, e a força − **P**, que o corpo exerce sobre a Terra (Fig.11).

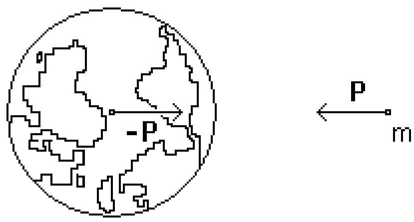

Fig.11

Exemplo 2

Ana e Bia estão boiando juntas nas águas calmas e serenas de um lago. Elas estão imóveis num referencial fixo nas margens do lago. Então, Ana exerce uma força sobre Bia durante certo intervalo de tempo. Em conseqüência, ambas se afastam da região onde estavam inicialmente, com movimentos de mesma direção, mas de sentidos contrários. Pela terceira lei de Newton, se Ana exerce uma força sobre Bia, então Bia também exerce uma força sobre Ana e como as forças têm mesma direção e sentidos contrários, os movimentos produzidos também têm mesma direção e sentidos contrários.

Exemplo 3

Um bloco de madeira, de massa m, está apoiado sobre uma prancha também de madeira, de massa M. A prancha, por sua vez, está apoiada sobre a superfície da Terra (Fig.12(a)).

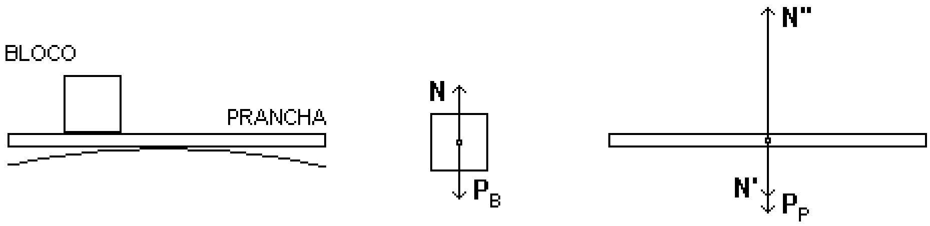

Fig.12(a) (b) (c)

Para discutir a aplicação da terceira lei de Newton nesse caso, vamos considerar um referencial no qual o bloco, a prancha e a Terra estão em repouso. Além disso, por conveniência, vamos analisar separadamente cada um desses três corpos.

Em primeiro lugar, vamos analisar o bloco.

Sobre o bloco atua a sua força peso $\mathbf{P}_B$, vertical e dirigida para o centro da Terra (Fig.12(b)). Se essa fosse a única força atuando sobre o bloco, ele deveria estar em um MRUV com a mesma direção e o mesmo sentido dessa força. Contudo, ele está em repouso e, justamente por isso, deve existir uma outra força, que cancela a força peso.

Devido ao contato do bloco com a prancha, esta outra força é a força que a prancha exerce sobre o bloco. A força que a prancha exerce sobre o bloco é perpendicular à prancha e é chamada normal (**N**).

Como o bloco está em repouso, a primeira lei de Newton garante que a força peso $\mathbf{P}_B$ e a força normal **N** se concelam mutuamente.

Agora, vamos analisar a prancha.

Sobre a prancha atua a sua força peso $\mathbf{P}_P$ (Fig.12(c)). Pela terceira lei, se a prancha exerce a força **N** sobre o bloco, o bloco exerce uma força **N'** sobre a prancha, de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido contrário. Assim, a prancha está sujeita a uma força **N'** + $\mathbf{P}_P$, vertical e dirigida de cima para baixo. Se essa fosse a resultante das forças que atuam sobre a prancha, ela deveria estar em um MRUV com a mesma direção e o mesmo sentido dessa resultante. Contudo, a prancha está em repouso e, justamente por isso, deve existir outra força atuando sobre ela, que cancela a força **N'** + $\mathbf{P}_P$.

Devido ao contato da prancha com a superfície da Terra, esta outra força é a força que a superfície da Terra exerce sobre a prancha, força essa que é perpendicular à superfície. Essa força é também chamada normal e, para distinguí-la da primeira, vamos usar o símbolo **N"**.

A força **N**, que a prancha exerce sobre o bloco, e a força **N'**, que o bloco exerce sobre a prancha, formam um par ação-reação.

Finalmente, vamos analisar a Terra.

A força peso do bloco, $\mathbf{P}_B$, é a força que a Terra exerce sobre o bloco. Pela terceira lei, o bloco exerce uma força de mesmo módulo e mesma direção, mas de sentido contrário, sobre a Terra. Considerando a Terra como uma esfera, com a massa homogeneamente distribuída, essa força atua no centro da Terra. O par ação-reação correspondente é $\mathbf{P}_B$ e $\mathbf{P'}_B$ (Fig.13).

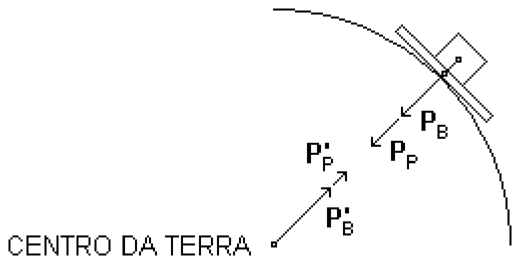

Fig.13

De modo análogo, a prancha exerce uma força sobre a Terra. O par ação-reação correspondente é $\mathbf{P}_P$ e $\mathbf{P'}_P$.

Exemplo 4

Uma mola está suspensa por uma de suas extremidades e em repouso num referencial fixo na mesa (Fig.14(a)). Nessa situação, a mola tem um certo comprimento. Então, um corpo é suspenso na outra extremidade da mola e levado à posição em que permanece em repouso (Fig.14(b)). Nessa outra situação, a mola está esticada, ou seja, o seu comprimento é maior do que antes.

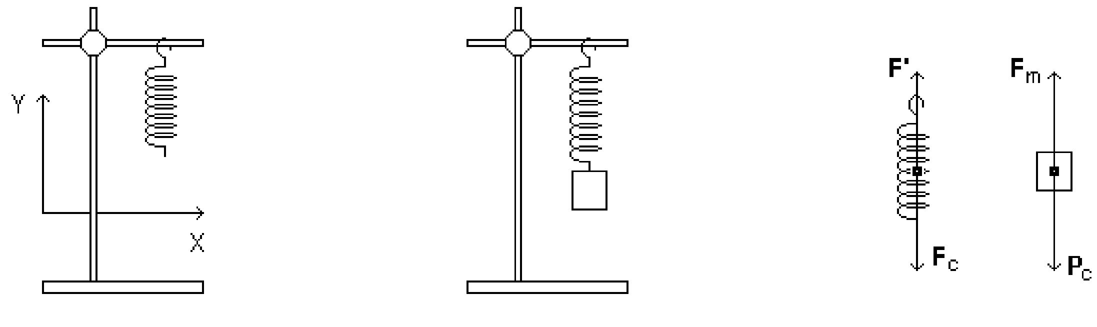

Fig.14(a) (b) (c)

Vamos estabelecer a natureza da força que provoca a elongação da mola. Para simplificar a análise, vamos considerar muito pequena a massa da mola, de modo que podemos ignorar o seu peso. Assim, sobre a mola atuam duas forças, ambas de natureza eletromagnética (Fig.14(c)): a força do suporte, **F'**, e a força do corpo, $\mathbf{F_c}$.

Sobre o corpo atuam duas forças: a força da mola, $\mathbf{F_m}$, de origem eletromagnética, e a força peso, $\mathbf{P_c}$, de origem gravitacional. Como o corpo está em repouso:

$$\mathbf{F_m} + \mathbf{P_c} = 0$$

ou, em módulo:

$F_m - P_c = 0$

Aqui é interessante lembrar que, ao escrever o módulo da força $\mathbf{F_m}$**,** antepomos o sinal + porque ela tem o mesmo sentido que o do eixo Y e ao escrever o módulo da força $\mathbf{P_c}$**,** antepomos o sinal negativo porque ela tem sentido contrário ao do eixo Y.
Da expressão acima obtemos:

$F_m = P_c$

As forças $\mathbf{F_m}$ e $\mathbf{F_c}$ constituem um par ação-reação. Portanto, em módulo:

$F_m = F_c$

Comparando as duas últimas expressões, obtemos:

$P_c = F_c$

A força $\mathbf{P}_c$ atua sobre o corpo. É a sua força peso e tem origem gravitacional. A força $\mathbf{F}_c$ tem origem eletromagnética e é a força que o corpo exerce sobre a mola. Essa força é que causa a elongação da mola. Portanto, a força que causa a elongação da mola não é a força peso do corpo, já que ela atua no corpo. Mas a força que causa a elongação da mola tem o mesmo módulo que a força peso do corpo.

Observações

Aqui cabem duas observações importantes. A primeira observação diz respeito ao modelo vetorial para as forças. Na discussão desenvolvida acima, verificamos que as forças $\mathbf{P}_c$ e $\mathbf{F}_c$, entre outras, têm mesmo módulo, mesma direção e mesmo sentido. Portanto, sob o ponto de vista da Matemática, $\mathbf{P}_c$ e $\mathbf{F}_c$ são vetores idênticos. Contudo, sob o ponto de vista da Física, esses vetores representam forças diferentes. As forças representadas pelos vetores $\mathbf{P}_c$ e $\mathbf{F}_c$ são diferentes porque têm naturezas diferentes, a primeira é de natureza gravitacional e a segunda, de natureza eletromagnética.
A segunda observação diz respeito às forças inerciais. Estas forças só existem em referenciais não inerciais e não podem ser associadas a qualquer interação fundamental. Por isso, não vale, para elas, a terceira lei de Newton.

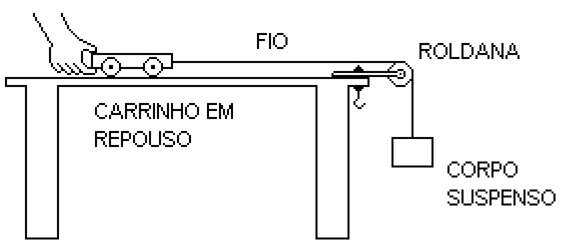

Fig.15

Exemplo 5

Um carrinho e um bloco suspenso estão unidos por um fio que passa por uma roldana (Fig.15).

O fio é inextensível. Ele e a roldana têm massa nula. O carrinho e o bloco estão em repouso num referencial fixo na mesa. O papel da roldana é, por assim dizer, apenas o de curvar o fio.

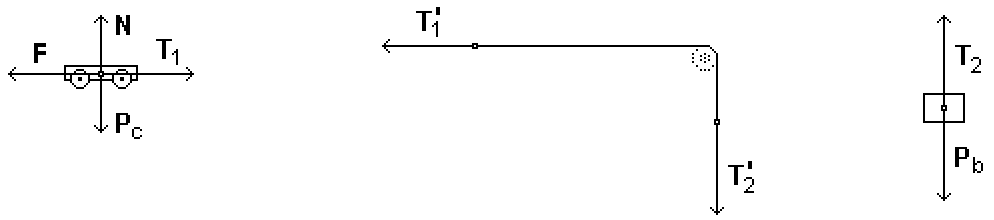

Fig.16(a) (b) (c)

As forças que agem sobre o carrinho são: o peso $\mathbf{P}_c$, a normal **N**, a força do fio $\mathbf{T}_1$ e a força da mão **F** (Fig.16(a)).

As forças que agem sobre o fio são: a força do carrinho $\mathbf{T'}_1$ e a força do corpo suspenso $\mathbf{T'}_2$ (Fig.16(b)). Essas forças são chamadas forças de tensão ou, simplesmente, tensões.

As forças que agem sobre o bloco suspenso são: o peso $\mathbf{P}_b$ e a força do fio $\mathbf{T}_2$ (Fig.16(c)).

As forças $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T'}_1$ constituem um par ação-reação e as forças $\mathbf{T'}_2$ e $\mathbf{T}_2$ constituem outro par ação-reação.

Exercício 1

Considerando o exemplo 4 acima, mostre que o módulo de $\mathbf{T}_1$ é igual ao módulo de $\mathbf{T}_2$. Desse modo, a força que o fio exerce sobre o carrinho e a força que o fio exerce sobre o bloco suspenso têm módulos iguais.

Exercício 2

Um corpo se desloca sobre um plano horizontal sem atrito. Num referencial fixo no plano, a velocidade do corpo é constante. Desenhe e identifique as forças que atuam sobre o corpo e suas forças de reação no sentido da terceira lei de Newton.

Exercício 3

Um corpo está colocado sobre um plano inclinado que faz um ângulo de 30^o com a horizontal. Num referencial fixo no plano inclinado, o corpo está em repouso. Desenhe e identifique as forças que atuam sobre o corpo e suas forças de reação no sentido da terceira lei de Newton.

Exercício 4

Duas garotas estão sobre uma pista de patinação horizontal. Num referencial fixo na pista, elas estão em repouso e cada uma segura uma das extremidades de uma corda. Discuta o movimento das duas quando uma delas exerce uma força na corda.

VII. Segunda Lei de Newton

A primeira lei de Newton afirma que, num referencial inercial, se a resultante das forças que agem sobre um corpo é nula, ele está parado ou em MRU. Para discutir a segunda lei de Newton, vamos considerar o seguinte experimento de pensamento.

Um corpo homogêneo se encontra inicialmente em repouso num dado referencial inercial. Na primeira parte do experimento (Fig.17), aplicamos, sobre esse corpo, em ocasiões diferentes, as forças **F**, **F**’ e **F**’’, de módulos diferentes, e medimos as acelerações, encontrando, respectivamente, **a**, **a’** e **a**’’.

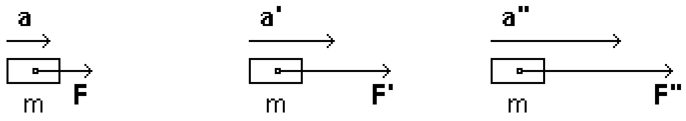

Fig.17

O interessante é que, em módulo:

$$\frac{F}{a} = \frac{F'}{a'} = \frac{F''}{a''}$$

Como o cociente é independente dos módulos das forças aplicadas e das acelerações resultantes, ele deve representar uma propriedade do corpo. Essa propriedade é chamada massa do corpo. Em termos vetoriais escrevemos:

F = m**a**

Na segunda parte do experimento (Fig.18), aplicamos uma força **F** sobre o corpo, depois dividimos o corpo em duas partes iguais e, sobre uma delas, aplicamos a mesma força **F** e, finalmente, dividimos essa parte em duas partes menores e iguais e, sobre uma delas, aplicamos novamente a mesma força **F**.

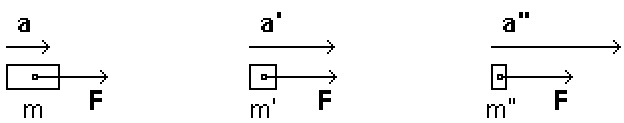

Fig.18

Medindo as acelerações, encontramos **a’** = 2**a** e **a’’** = 2**a'** = 4**a**. A expressão acima garante que:

F = m' **a'**

e

F = m'' **a''**

ou seja:

F = 2m' **a**

e

F = 4m'' **a**

Comparando estas duas últimas expressões com aquela de cima obtemos o seguinte resultado:

m' = ½ m

e

m'' = ¼ m

Portanto, cada uma das duas partes iguais em que o corpo foi dividido tem massa ½ m e cada uma das quatro partes iguais em que o corpo foi dividido tem massa ¼ m. Como o experimento poderia continuar com frações cada vez menores do corpo e como o corpo é homogêneo, podemos concluir que a sua massa está igualmente distribuída ao longo do seu volume.

Por outro lado, a discussão acima deixa claro que quanto menor a massa do corpo, maior a aceleração adquirida para a mesma força aplicada.

Se um corpo está parado ou em MRU, a primeira lei de Newton afirma que esse corpo permanece no seu estado de movimento se a resultante das forças que sobre ele atuam é zero. Se a resultante das forças é diferente de zero, esse corpo terá uma aceleração tanto maior quanto menor for a sua massa. A massa pode ser pensada, portanto, como uma medida da inércia do corpo, ou seja, da sua tendência de permanecer no seu estado de movimento.

A segunda lei de Newton pode ser escrita: a aceleração adquirida por um corpo é diretamente proporcional à resultante das forças que sobre ele atuam, tendo a mesma direção e sentido desta resultante. A constante de proporcionalidade é a massa do corpo. Matematicamente:

Σ **F** = m**a**

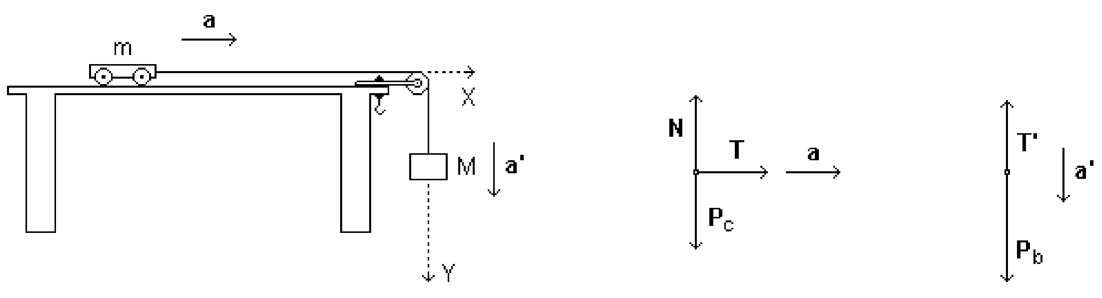

Fig.19(a) (b) (c)

Experimento de Aplicação da Segunda Lei

Um carrinho e um bloco suspenso estão unidos por um fio que passa por uma roldana (Fig.19).

Vamos supor que o fio é inextensível, que o fio e a roldana têm massas muito menores do que as massas do carrinho e do bloco, de modo que podemos considerar nulas as massas do fio e da roldana, e que todo atrito é desprezível.

O experimento consiste em abandonar o bloco e medir o tempo levado pelo carrinho para percorrer certa distância sobre a mesa. O carrinho tem uma aceleração **a** e o bloco, **a'**. Como o fio é inextensível e as massas dele e da roldana são nulas, os módulos dessas acelerações são iguais.

Em primeiro lugar, vamos determinar o módulo da aceleração do bloco e do carrinho usando as leis de Newton. A resultante das forças que agem sobre o carrinho é **T** (Fig.19(b)). Assim, pela segunda lei podemos escrever, em módulo:

$$T = ma$$

Tomando como positivas as forças na mesma direção do eixo Y, da segunda lei temos, em módulo, para o bloco (Fig.19(c)):

$$Mg - T' = Ma$$

e como T = T', dessas duas expressões obtemos:

$$a = \left(\frac{M}{m+M}\right)g$$

Tomando um carrinho de massa m = 112,84 g, um corpo suspenso de massa M = 10 g e usando, para o módulo da aceleração gravitacional, o valor g = 9,81 m/s^2, temos:

$$a = 0{,}80 \text{ m/s}^2$$

Em segundo lugar, vamos determinar o módulo da aceleração do bloco e do carrinho pela Cinemática. Quando o bloco é abandonado, o carrinho percorre, sobre a mesa, uma distância d no intervalo de tempo t. Então:

$$d = x(t) - x(0) = v(0)\,t + ½\, at^2$$

e com v(0) = 0 temos:

$$a = \frac{2d}{t^2}$$

Marcamos, sobre a mesa, dois pontos separados de uma distância d = 0,80m. Medimos 10 vezes o intervalo de tempo levado pelo carrinho para percorrer, a partir do repouso, quando o bloco é abandonado, a distância escolhida. Digamos que o intervalo de tempo médio obtido tenha sido t = 1,38s. Substituindo os valores de d e t na expressão acima obtemos:

$$a = \frac{(2)(0{,}80\,m)}{(1{,}38\,s)^2} = 0{,}84\,m/s^2$$

Através das leis de Newton obtivemos a = 0,80 m/s^2 e através da Cinemática obtivemos a = 0,84 m/s^2. Os dois valores estão bastante próximos um do outro.

O procedimento pode ser repetido para corpos suspensos de massas diferentes e para carrinhos de massas diferentes.

Exercício 1

Um corpo com massa de 5 kg está apoiado sobre um plano horizontal sem atrito. Sobre esse corpo atuam duas forças horizontais, perpendiculares entre si, com módulos $F_x = 3$ N e $F_y = 4$ N. Determine o módulo, a direção e o sentido da aceleração do corpo.

Exercício 2

Num lago de águas calmas, um homem de 60 kg, a bordo de um barco de 100 kg, segura uma das extremidades de uma corda que tem a outra extremidade atada a um segundo barco, também de 100 kg, distante 26 m do primeiro. O homem exerce uma força com módulo de 10 N sobre a corda, diminuindo a distância entre os barcos. Considerando um referencial inercial fixo no fundo do lago e ignorando a massa da corda e o atrito com a água, calcule os módulos das acelerações dos barcos.

Exercício 3

Num dado referencial inercial, dois blocos estão em contato um com o outro, têm massas $m_1 = 2$ kg e $m_2 = 4$ kg e estão apoiados sobre uma superfície horizontal sem atrito (Fig.20). Uma força **F**, com módulo de 12 N, é aplicada no bloco 1. Calcule o módulo da força que o bloco 1 exerce sobre o bloco 2.

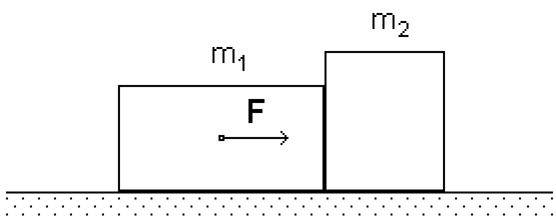

Fig.20

VIII. Interação Gravitacional

Vimos que a mola é esticada quando um corpo é suspenso na sua extremidade livre. A força que estica a mola é de origem eletromagnética e tem módulo igual ao módulo do peso do corpo. O peso do corpo é uma força de origem gravitacional. Entre o corpo e a Terra existe interação gravitacional. Segundo a terceira lei, essa interação origina duas forças: a força peso do corpo, que a Terra exerce sobre ele, e a força que o corpo exerce sobre a Terra. Essas duas forças constituem um par ação-reação.

Se esse corpo é substituído por outro, com volume maior, mas feito com o mesmo material, a elongação da mola fica maior. Isso significa que é maior o módulo da força do corpo sobre a mola e, também, que é mais intensa a interação entre o corpo e a Terra. A interação gravitacional deve, portanto, depender de alguma propriedade do corpo suspenso que esteja aumentando com o seu volume. Essa propriedade é a massa do corpo.

Sejam duas partículas com massas m_1 e m_2, separadas por uma distância d (Fig.21).

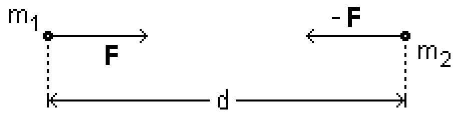

Fig.21

Por efeito da interação gravitacional, a partícula 2 exerce uma força **F** sobre a partícula 1 e a partícula 1 exerce uma força – **F** sobre a partícula 2.

A terceira lei de Newton estabelece que essas forças têm o mesmo módulo e a lei da gravitação universal de Newton estabelece que o valor desse módulo é dado pela expressão:

$$F = \frac{G m_1 m_2}{d^2}$$

em que G é a constante da gravitação universal (a mesma para todos os corpos):

$$G = 6{,}67 \times 10^{-11}\ m^3/s^2kg$$

A expressão acima vale também para corpos esféricos e homogêneos. Nesse caso, d representa a distância entre os centros dos corpos.

É interessante observar que os módulos das forças são inversamente proporcionais ao quadrado da distância de separação. Desse modo, se a distância duplica, os módulos das forças ficam quatro vezes menores, se a distância triplica, os módulos das forças ficam nove vezes menores e assim por diante. Em outras palavras, os módulos das forças diminuem rapidamente com o aumento da distância de separação, de modo que as forças são importantes apenas quando a distância de separação não é muito grande.

De qualquer modo, a interação gravitacional se estende até o infinito e dizemos que as forças correspondentes são forças de longo alcance.

Por outro lado, a constante da gravitação universal G é muito pequena. Apenas corpos com grandes massas podem gerar efeitos ponderáveis. A força que a Terra exerce sobre um objeto é o seu peso e podemos medir o módulo do peso de uma bola de tênis, por exemplo, com instrumentos simples. Mas a força gravitacional que uma bola de tênis exerce sobre outra bola de tênis tem módulo muito pequeno para poder ser medido, inclusive com os instrumentos sofisticados de um laboratório de pesos e medidas.

Peso

No cotidiano, a interação gravitacional origina o peso dos corpos.

Para discutir o módulo do peso de um dado corpo usando a expressão matemática da lei da gravitação universal de Newton dada acima, vamos considerar o modelo em que a Terra é representada como se fosse uma esfera de raio R, com massa M homogeneamente distribuída.

Vamos considerar, ainda, um corpo de massa m, a uma altura h acima da superfície da Terra (Fig.22). O módulo do peso deste corpo vale:

$$P = \frac{GMm}{(R+h)^2}$$

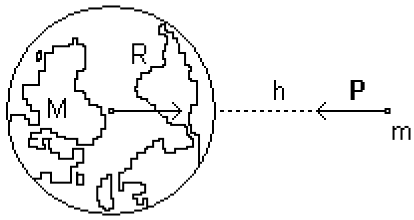

Fig.22

O módulo do peso depende, portanto, da altura em que se encontra o corpo. Para um corpo próximo à superfície da Terra, h << R e podemos escrever:

$$P \approx mg$$

com

$$g = \frac{GM}{R^2}$$

Aqui, g representa o módulo da aceleração gravitacional. Nesse modelo em que a Terra é representada como uma esfera homogênea e para corpos próximos à superfície da Terra, o valor de g depende apenas das constantes G, M e R, que nada têm a ver com o corpo particular considerado. Assim, num referencial fixo na Terra, todos os corpos caem em direção ao centro da Terra com a mesma aceleração. Tomando o valor de G dado acima e os valores:

$$R = 6,37 \times 10^6 \text{ m}$$

e

$$M = 5,98 \times 10^{24} \text{ kg}$$

temos que, nas proximidades da superfície da Terra, o módulo da aceleração gravitacional vale:

$$g = 9,83 \text{ m/s}^2$$

No modelo que estamos considerando, para qualquer altitude, o módulo da aceleração gravitacional é dado por:

$$g(h) = \frac{GM}{(R+h)^2}$$

Exemplo

Considerando a Lua como uma esfera homogênea, com raio R e massa M dados por:

$R = 1{,}74 \times 10^6$ m

e

$M = 7{,}36 \times 10^{22}$ kg

temos que, nas proximidades da superfície da Lua, o módulo da aceleração gravitacional vale:

$g_L = 1{,}62$ m/s^2

Dessa forma, $g / g_L \approx 6$. Comparado com o seu valor na Terra, o peso de um corpo é cerca de seis vezes menor na Lua. A massa é a mesma.

Num modelo mais realista, o cálculo do valor da aceleração gravitacional deve incluir, além da altitude, também um efeito associado à latitude (devido ao achatamento da Terra nos pólos) e um efeito associado à morfologia local das rochas. Além desses, é usual incluir um efeito centrífugo (devido à rotação da Terra num referencial fixo nas estrelas distantes), embora este não tenha origem gravitacional. Com esses efeitos, um cálculo do valor médio sobre toda a superfície terrestre do módulo da aceleração gravitacional ao nível do mar resulta:

$g = 9{,}81$ m/s^2

Esse é o valor que aparece nos livros texto de Física.

Ainda levando em conta os efeitos mencionados, calculamos os valores que se seguem para o módulo da aceleração gravitacional: em Santa Maria, $g = 9{,}79$ m/s^2, na linha do Equador, $g = 9{,}78$ m/s^2 e nos pólos, $g = 9{,}83$ m/s^2.

Campo Gravitacional

Para discutir o conceito de campo gravitacional, vamos considerar um corpo esférico e homogêneo de massa M e uma partícula de massa m, separados por uma distância d (Fig.23(a)).

Fig.23(a) (b)

Embora exista uma força sobre o corpo, ela não está representada. Vamos dirigir nossa atenção à partícula. O módulo da força que o corpo exerce sobre a partícula pode ser escrito:

$$F = \left(\frac{GM}{d^2}\right) m$$

O tempo não aparece nessa expressão. Se a partícula muda de posição, o módulo da força que o corpo exerce sobre ela muda no mesmo instante, independentemente de quão distante do corpo ela se encontre. Nesse sentido, é usual dizer que a lei da gravitação universal de Newton incorpora o conceito de interação à distância.

Podemos pensar na interação do corpo com a partícula de outra forma, associando um vetor **g**(d) ao ponto em que se encontra a partícula (Fig.23(b)). Esse vetor tem a mesma direção e o mesmo sentido da força **F**, que o corpo exerce sobre a partícula, e módulo:

$$g(d) = \frac{GM}{d^2}$$

Comparando esta expressão com aquela de cima, vemos que a força **F** pode ser escrita:

$$\mathbf{F}(d) = m\mathbf{g}(d)$$

Assim como fizemos com o ponto em que se encontra a partícula, podemos associar um vetor **g** a qualquer outro ponto do espaço, com módulo, direção e sentido dados pelas duas expressões acima. Então, d representa a distância entre o ponto em questão e o corpo.

O conjunto dos vetores associados a todos os pontos do espaço (até o infinito) é o que chamamos de campo gravitacional do corpo em questão (Fig.24). O campo gravitacional é um campo vetorial e como o módulo do campo gravitacional tem unidade de aceleração, ele é um campo de acelerações.

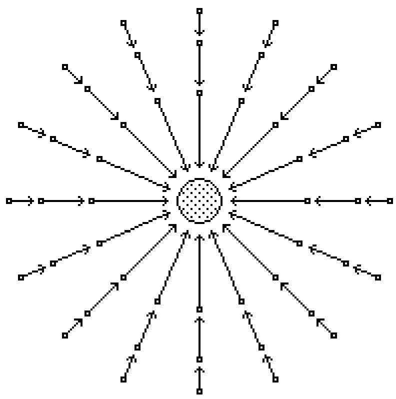

Fig.24

Desta forma, dizemos que existe um campo gravitacional associado ao corpo. Quando uma partícula é colocada num ponto do espaço, aparece, sobre ela, uma força gravitacional devido a esse campo. O campo atua, dessa forma, como um intermediário entre o corpo e a partícula.

Todos os objetos têm o seu próprio campo gravitacional. A partícula de massa m também tem o seu campo gravitacional. Assim como observamos a interação entre o corpo e a partícula através do campo gravitacional do corpo, poderíamos ter observado a mesma interação através do campo gravitacional da partícula. O campo da partícula é definido de modo completamente análogo ao campo do corpo.

Numa região com vários corpos, o vetor campo em um dado ponto do espaço é a resultante da soma dos vetores campo associados aos vários corpos, como deve ser segundo o princípio de superposição.

O conceito de campo aparece em outras áreas da Física. Por exemplo, consideremos um recipiente com água líquida. Podemos associar, a cada pequeno elemento de volume dessa água, um número que representa sua temperatura. Assim, o conjunto desses números constitui o campo das temperaturas. Neste caso, o campo é escalar.

Uma última observação: não é o espaço que constitui o campo, mas uma grandeza (vetorial ou escalar) definida para cada ponto de espaço.

Exercício 1

Considere uma pessoa de 60 kg. Compare o módulo do seu peso em Porto Alegre com o módulo do seu peso no alto do Everest.

Exercício 2

Discuta a seguinte frase, encontrada num livro didático de Física para o ensino médio [Bonjorno, R. A. et al. Física fundamental. São Paulo: FTD, 1993. Volume único.]:

Em torno da Terra, há uma região chamada *campo gravitacional*, na qual todos os corpos sofrem sua influência, que se apresenta em forma de uma força.

Exercício 3

Sobre uma partícula de massa m = 0,2 kg, situada a certa altura do solo, a Terra exerce uma força de módulo 1,6 N. Calcule a intensidade do campo gravitacional na posição em que se encontra a partícula.

IX. Queda Livre

O movimento vertical de qualquer corpo que se move nas proximidades da superfície da Terra, sob a influência unicamente da sua força peso, é chamado movimento de queda livre. Nessas condições, todos os corpos se movem com a mesma aceleração constante de módulo $g = 9{,}81\ m/s^2$. Em outros termos, o movimento de queda livre é um MRUV com direção vertical e uma aceleração de módulo $g = 9{,}81\ m/s^2$.

Consideremos um corpo abandonado de certa altura nas proximidades da superfície da Terra. Devido à resistência do ar, sempre existe, sobre esse corpo, uma força de arraste. Quanto menor o módulo dessa força de arraste, comparado com o módulo da força peso do corpo, mais próximo de um movimento de quede livre é o movimento do corpo. Dito de outro modo, o movimento de queda livre é uma idealização, ou seja, um modelo, que pode descrever o movimento de um dado corpo real de modo mais ou menos realista, conforme a importância do módulo da força de arraste comparado com o módulo da força peso do corpo.

Por exemplo, o modelo de queda livre é bastante realista para uma pequena esfera de aço abandonada de uma altura de 2m, mas não é para uma bolinha de pingue-pongue abandonada da mesma altura.

Aqui é interessante observarmos o seguinte. Pela definição dada acima, não apenas corpos que se movimentam de cima para baixo, mas também corpos lançados de baixo para cima, nas proximidades da superfície da Terra, podem ter um movimento de queda livre, desde que o movimento seja vertical e a aceleração seja constante e de módulo g = 9,81 m/s^2.

Exemplo

Uma pedra é lançada numa direção vertical, de baixo para cima, a partir do solo, com velocidade inicial de módulo igual a 20 m/s num referencial fixo na Terra.

O movimento da pedra é vertical e, portanto, ocorre em apenas uma dimensão. Por isso, para descrever esse movimento, podemos considerar, como sistema de referência, um único eixo fixo na Terra, orientado de baixo para cima e com origem no ponto de lançamento, ou seja, no solo (Fig.25).

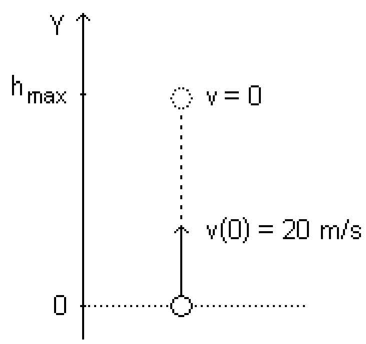

Fig.25

Como já discutimos acima para o caso de uma pequena esfera de aço, também para uma pedra o modelo de queda livre deve ser bastante realista, de modo que podemos considerar a aceleração da pedra como sendo:

$$a = -g = -9{,}8 \text{ m/s}^2 \approx -10 \text{ m/s}^2$$

Aqui, cabem dois comentários. O primeiro se refere ao sinal negativo, que vem do fato de termos escolhido como referencial um eixo orientado para cima e a aceleração gravitacional está dirigida para baixo. O segundo se refere à aproximação $g \approx 10$ m/s^2, utilizada unicamente para facilitar os cálculos.

Podemos calcular o tempo gasto pela pedra para alcançar o ponto mais alto de sua trajetória notando que, neste ponto, a sua velocidade é nula. Então, pela equação horária da velocidade no MRUV:

$$v(t) = v(0) + at$$

segue-se que:

$$t = -\frac{v(0)}{a} = -\frac{20\,\text{m/s}}{(-10\,\text{m/s}^2)} = 2\,\text{s}$$

Com esse dado podemos calcular a altura máxima atingida pela pedra. Assim, pela equação horária da posição no MRUV:

$$y(t) = y(0) + v(0)t + ½ at^2$$

segue-se que:

$$h_{max} = v(0)t + ½ at^2 = (20 \text{ m/s})(2\text{s}) + ½ (- 10 \text{ m/s}^2)(2\text{s})^2 = 20 \text{ m}$$

O movimento de queda livre é um movimento simétrico, isto é, o tempo de subida do corpo é igual ao tempo de descida e quando o corpo passa pelo mesmo ponto, as velocidades de subida e de descida têm mesmos módulos e mesmas direções, mas sentidos contrários.

Para discutir essas afirmações, consideremos a condição y(t) = y(0). Esta condição identifica a posição no instante t com a posição de lançamento. Portanto, essa condição permite determinar o tempo total associado ao movimento de queda livre, ou seja, o tempo que a pedra leva para retornar ao ponto de lançamento. Assim, a equação horária da posição no MRUV com essa condição fica:

$$0 = (20 \text{ m/s})\, t - (5 \text{ m/s}^2)\, t^2$$

e colocando t em evidência:

$$0 = [\, 20 \text{ m/s} - (5 \text{ m/s}^2)\, t \,]\, t$$

Esta equação tem duas soluções: $t_1 = 0$ e $t_2 = 4\text{s}$. A primeira solução representa o fato de que a pedra se encontra no solo no instante inicial. A segunda solução representa o tempo gasto pela pedra para alcançar a altura máxima e retornar ao ponto de partida. Como este tempo é o dobro do tempo gasto pela pedra para alcançar a altura máxima, podemos concluir que o tempo de subida é igual ao tempo de descida.

Por outro lado, com t = 4s, a equação horária da velocidade no MRUV fica:

$$v(4\text{s}) = 20 \text{ m/s} + (- 10 \text{ m/s}^2)(4\text{s}) = - 20 \text{ m/s}$$

A velocidade inicial da pedra no ponto de lançamento tem direção vertical, módulo de 20 m/s e sentido para cima. A velocidade da pedra ao retornar ao ponto de lançamento tem direção vertical, módulo de 20 m/s e sentido para baixo, este último indicado pelo sinal negativo do resultado acima. Por isso, podemos concluir que, quando o corpo passa pelo mesmo ponto, as velocidades de subida e de descida têm mesmos módulos, mesmas direções, mas sentidos contrários.

Exercício 1

Um objeto é abandonado do alto de um edifício de 30 m de altura. Considerando um referencial fixo no solo e com a hipótese de que o movimento do objeto é de queda livre, calcule (a) o tempo levado pelo objeto para percorrer os primeiros 15 m e (b) o tempo levado pelo objeto para percorrer os outros 15 m.

Exercício 2

Um parafuso se desprende de uma ponte metálica, situada a 45 m acima da superfície de um rio, e atinge a água ao lado de um pequeno barco que se move com uma velocidade constante, de módulo 5 m/s, num referencial fixo nas margens do rio. Calcule a distância entre o ponto em que o parafuso atinge a superfície do rio e o ponto em que o barco se encontrava quando o parafuso se desprendeu da ponte. Considere g = 10 m/s².

X. Movimento de Projéteis

Para discutir o movimento de projéteis em duas dimensões, vamos considerar duas situações: lançamento horizontal e lançamento oblíquo.

Lançamento Horizontal

Vamos considerar um avião que se desloca na horizontal com velocidade $\mathbf{v}_H$ constante num referencial fixo no solo. Num dado momento, um pacote é abandonado do avião (Fig.26). Vamos considerar que a resistência do ar sobre o pacote pode ser desprezada.

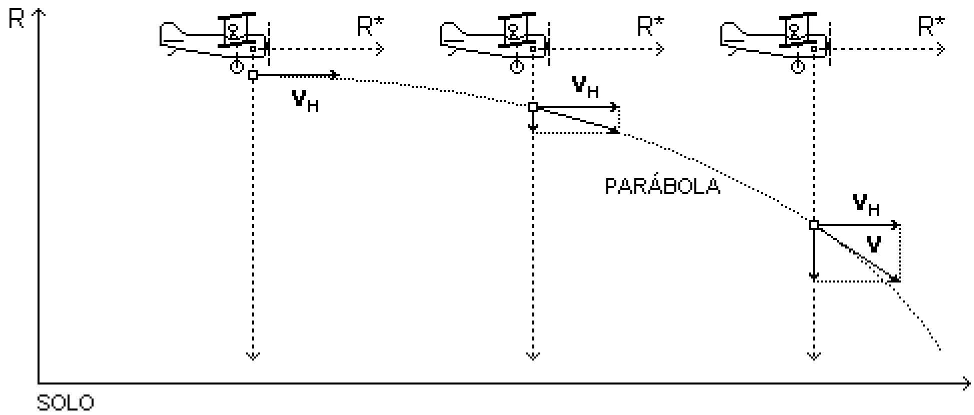

Fig.26

No referencial R*, fixo no avião, o pacote se desloca em queda livre. A sua trajetória é uma linha reta vertical.

No referencial R, fixo no solo, o avião se desloca em MRU com velocidade $\mathbf{v}_H$. Nesse referencial, a trajetória do pacote é uma parábola. O vetor velocidade do pacote em cada instante de tempo pode ser considerado como a soma de dois vetores, um vetor velocidade horizontal e um vetor velocidade vertical. A componente horizontal é igual à velocidade do avião. A componente vertical é igual à velocidade que teria o pacote se o seu movimento fosse unicamente de queda livre.

Todo movimento em duas dimensões pode ser decomposto em dois movimentos unidimensionais ortogonais. Do mesmo modo, a composição de dois movimentos unidimensionais ortogonais gera um movimento em duas dimensões.

A composição de dois movimentos ortogonais para gerar um movimento plano e a decomposição de um movimento plano em dois movimentos ortogonais devem ser feitas segundo as regras do cálculo de vetores.

Exemplo

Consideremos o referencial R fixo no solo e o eixo X com direção vertical, sentido de baixo para cima e zero no solo.

Vamos supor que o avião se desloque a uma altitude de 320 m com velocidade de módulo igual a 50m/s. Esse também é o valor do módulo da componente horizontal da velocidade do pacote.

O tempo de queda do pacote pode ser calculado levando em conta que o seu movimento vertical é de queda livre, isto é, um MRUV com aceleração constante de módulo g = 10 m/s^2, e levando em conta também que a velocidade inicial nessa direção é nula. Assim, a equação horária da posição:

$$x(t) = x(0) + v(0)t + ½\, at^2$$

permite escrever:

$$0 = 320\text{ m} + ½\,(-10\text{ m/s}^2)\, t^2$$

e daí, t = 8s. Portanto, o pacote leva 8 segundos para chegar ao solo.

O módulo da velocidade vertical do pacote quando ele chega ao solo pode ser obtido da equação horária da velocidade:

$$v = v(0) + at$$

Então:

$$v_v = (-10\text{ m/s}^2)(8\text{s}) = -80\text{ m/s}$$

O sinal negativo indica que a velocidade vertical do pacote tem sentido contrário ao do eixo vertical do referencial.

Assim, ao chegar ao solo, a componente horizontal da velocidade do pacote tem módulo de 50m/s e a componente vertical tem módulo de 80m/s. O pacote chega ao solo com uma velocidade de módulo:

$$v = \sqrt{(50\,m/s)^2 + (80\,m/s)^2} = 94\,m/s$$

Lançamento Oblíquo

O movimento do pacote, discutido acima, é um exemplo de movimento de projétil com lançamento horizontal. Por outro lado, vimos que o movimento de queda livre é um MRUV simétrico, ou seja, o tempo de subida é igual ao tempo de descida e as velocidades de subida e de descida, para a mesma altura, têm módulos e direções iguais, mas sentidos contrários. Portanto, compondo o movimento de queda livre (MRUV) com um movimento de translação uniforme (MRU), temos um movimento simétrico.

Esse é um exemplo de movimento de projétil com lançamento oblíquo (Fig.27). A figura representa as velocidades (**v**$_1$, **v**$_2$, **v**$_3$, **v**$_4$ e **v**$_5$) em cinco instantes diferentes e as correspondentes componentes horizontais e verticais.

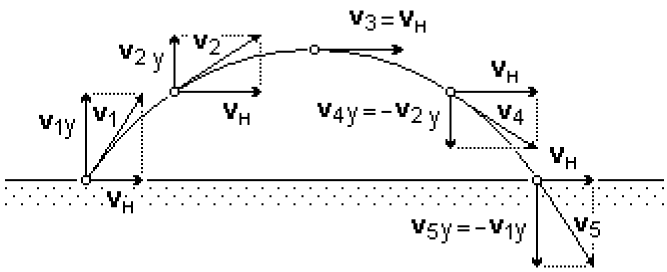

Fig.27

Exemplo

Um jogador de futebol chuta uma bola com velocidade inicial de módulo 26 m/s num referencial fixo no campo. Essa velocidade faz um ângulo de 30^o com a horizontal.

Em primeiro lugar, vamos calcular a altura máxima atingida pela bola e o tempo levado para tanto. Ignorando a resistência do ar, o movimento vertical da bola é um MRUV. Tomando o eixo Y do referencial com direção vertical, sentido de baixo para cima e origem no ponto de lançamento, temos y(0) = 0, $a_y = - g = - 10$ m/s^2 e:

$v_y(0) = v(0)$ sem 30^o = (26 m/s)(1/2) = 13 m/s

No ponto de altura máxima, a componente da velocidade da bola ao longo do eixo Y é nula. A equação horária da velocidade:

$v_y(t) = v_y(0) + a_y t$

fica, então:

0 = 13 m/s – (10 m/s^2) t

e daí, t = 1,3s. A equação horária da posição:

$y(t) = y(0) + v_y(0)t + ½ a_y t^2$

permite escrever:

h_{max} = y(1,3s) – y(0) = (13 m/s)(1,3s) + ½ (– 10 m/s^2)(1,3s)^2 = 8,4 m

Assim, em 1,3 segundos, a bola atinge a altura máxima de 8,4 metros.

Agora vamos calcular o alcance da bola, isto é, a distância entre o ponto de partida e o de chegada da bola na superfície horizontal. Ignorando a resistência do ar, o movimento horizontal da bola é um MRU. Podemos tomar o eixo X do referencial na mesma direção do movimento horizontal da bola, com origem no ponto de lançamento. Então, a equação horária da posição permite escrever o alcance da bola como:

$$R = x(t) - x(0) = v_x(0)t$$

e como:

$$v_x(0) = v(0) \cos 30^o = (26 \text{ m/s})(0{,}87) = 22{,}52 \text{ m/s}$$

temos:

$$R = (22{,}52 \text{ m/s})(2{,}6\text{s}) = 58{,}56 \text{ m}$$

Portanto, a bola bate pela primeira vez no solo a 58,56 metros do ponto de partida se a resistência do ar puder ser ignorada.

Exercício 1

Num referencial fixo no solo, um barco parte de uma das margens de um rio de 500 m de largura e atinge a margem oposta em um ponto 375 m rio abaixo. A componente da velocidade do barco na direção perpendicular à direção da correnteza tem módulo de 0,4 m/s. Determine, no mesmo referencial, (a) o tempo gasto na travessia e (b) o vetor velocidade do barco.

Exercício 2

Em 75 segundos, um balão (carregado por uma criança) sai por uma porta, percorre 10 m na horizontal ao longo de uma calçada, faz uma curva fechada em ângulo reto, percorre mais 10 m na mesma horizontal ao longo de outra calçada e, após uma brevíssima pausa, sobe verticalmente (enquanto a criança chora) até uma altura de 5 m, onde encontra um obstáculo e estoura. Determine (a) o deslocamento e (b) a velocidade média do balão nesses 75 segundos num referencial fixo no solo.

Exercício 3

Numa cena de filme, um dublê deve correr pelo telhado de um prédio, saltar horizontalmente e chegar ao telhado de outro prédio, 5 m abaixo. A distância horizontal que separa os prédios é de 4 m. Considere $g = 10 \text{ m/s}^2$ e calcule o módulo mínimo da velocidade do dublê, num referencial fixo no solo, para que ele consiga realizar essa façanha.

XI. Força Elástica de uma Mola

Consideremos uma mola suspensa na vertical. Suspendendo um corpo na extremidade livre, a mola fica com um comprimento maior. Já vimos que a força que causa a elongação da mola não é a força peso do corpo, mas uma força de origem eletromagnética, cujo módulo é igual ao módulo da força peso do corpo.

A força que a mola exerce sobre o corpo é chamada de força elástica da mola. Se esse corpo que foi suspenso na mola não causa deformação permanente na mola, ao retirá-lo a mola volta a sua configuração original. Por isso dizemos que a força que a mola exerce no corpo é elástica. Vamos estudar essa força pela seguinte atividade experimental.

Experimento da Lei de Hooke

Suspendemos, na extremidade livre da mola, corpos de massas diferentes e anotamos, para cada corpo suspenso, a correspondente elongação da mola (Fig.28).

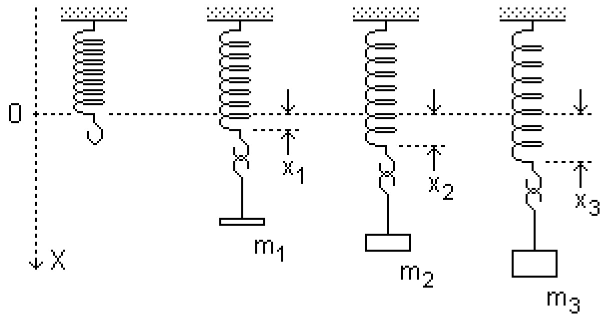

Fig.28

A tabela a seguir mostra dados experimentais típicos. Aqui, m representa a massa do corpo suspenso, x representa a elongação da mola e F representa o módulo da força elástica correspondente. Cada valor de F foi calculado pela multiplicação da massa do corpo pelo módulo da aceleração gravitacional, g = 9,81 m/s^2.

m (10^{-3} kg)	F (10^{-2} N)	x (10^{-2} m)
10	9,81	1,3
20	19,62	2,5
30	29,43	3,7
40	39,24	4,8
50	49,05	5,9
60	58,86	7,1

Aqui cabe a seguinte explicação. No exemplo 4 da seção em que discutimos a terceira lei de Newton, pudemos concluir que a força que causa a elongação da mola não é a força peso do corpo suspenso, já que esta última atua no corpo. Mas a força que causa a elongação da mola tem o mesmo módulo que a força peso do corpo. Por outro lado, a terceira lei de Newton permite concluir que a força elástica, ou seja, a força exercida pela mola sobre o corpo, tem o mesmo módulo que a força que o corpo exerce sobre a mola, isto é, tem o mesmo módulo que a força que causa a elongação da mola. Assim, o módulo da força elástica é igual ao módulo da força peso do corpo suspenso. Por isso, cada valor do módulo da força elástica foi calculado pela multiplicação da massa do corpo suspenso pelo módulo da aceleração gravitacional, tomado como sendo g = 9,81 m/s^2.

A partir da tabela acima, podemos construir o gráfico de F contra x. A curva mais simples que pode ser ajustada aos pontos é uma reta, sem qualquer dúvida (Fig.29).

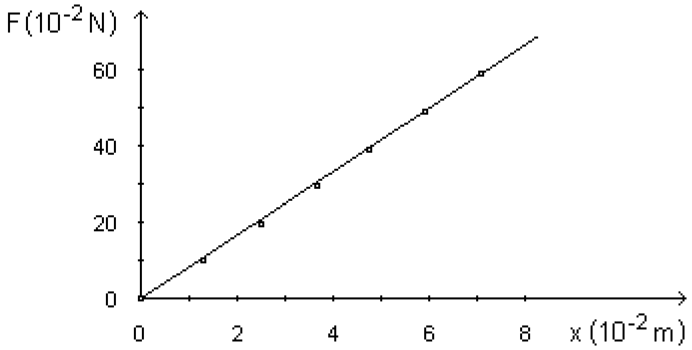

Fig.29

Isso significa que o módulo da força da mola sobre o corpo é diretamente proporcional à elongação da mola. Essa afirmativa constitui a lei de Hooke.

Matematicamente, podemos escrever:

$F = -kx$ (k = constante)

O sinal negativo foi introduzido para representar o fato de que a força elástica e a elongação têm mesma direção, mas sentidos contrários. Por isso se diz que a força elástica é uma força restauradora ou de restituição. A constante k é chamada constante elástica da mola e representa, fisicamente, a sua dureza. Matematicamente, k representa a inclinação do gráfico F contra x. O valor dessa constante depende do tamanho da mola, do material do qual ela é constituída e do processo de fabricação.

Observando a figura podemos notar que, como o gráfico foi traçado, o primeiro e o último ponto estão sobre a reta. Podemos tomar esses pontos para calcular a constante elástica da mola usada no experimento:

$$k = \frac{58{,}8 \times 10^{-2}\,\text{N}}{7{,}1 \times 10^{-2}\,\text{m}} \approx 8{,}3\,\text{N/m}$$

Observações

Em primeiro lugar, uma expressão do tipo $F = -kx$ não representa necessariamente a lei de Hooke. Qualquer força pode ser escrita nessa forma. O que representa a lei de Hooke é o fato de que, nessa expressão, k é uma constante, ou seja, não depende da elongação.

Em segundo lugar, uma dada mola pode obedecer a lei de Hooke com um dado valor de k num certo intervalo de valores para a elongação. Fora desse intervalo, a mola pode ter uma deformação permanente. Nesse caso, ela pode obedecer a lei de Hooke, mas com outro valor para a constante elástica. Pode acontecer também que a força elástica deixe de ser diretamente proporcional à elongação e a mola não obedeça mais a lei de Hooke.

Dinamômetro e Balança

Devido ao caráter linear das forças exercidas pelas molas, elas se prestam para construir dinamômetros e balanças. Usualmente, diz-se que o dinamômetro é um instrumento que permite medir o módulo de uma força e a balança é um instrumento que permite medir a massa de um corpo.

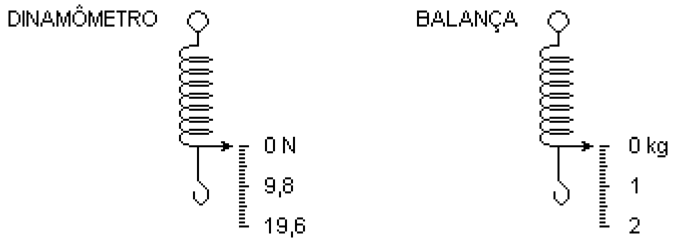

Fig.30(a) (b)

De qualquer modo, o dispositivo que constitui o instrumento é essencialmente o mesmo. O que muda é a escala na qual o instrumento é calibrado. Se, com a calibração, a escala indica módulo de força, o instrumento é um dinamômetro (Fig.30(a)) e se, com a calibração, a escala indica massa, o instrumento é uma balança (Fig.30(b)).

Exercício

Um corpo com massa de 2 kg está pendurado numa balança de mola que, por sua vez, está presa no teto de um elevador que se movimenta com aceleração de módulo 3 m/s^2 num referencial inercial fixo na superfície da Terra. Determine a leitura da balança quando o elevador (a) está subindo e (b) está descendo.

XII. Forças de Atrito Seco

Existem forças de atrito entre duas superfícies em contato quando existe movimento relativo entre elas (atrito cinético) ou quando não existe movimento, mas tendência de movimento relativo entre elas (atrito estático). As forças de atrito são paralelas às superfícies em contato.

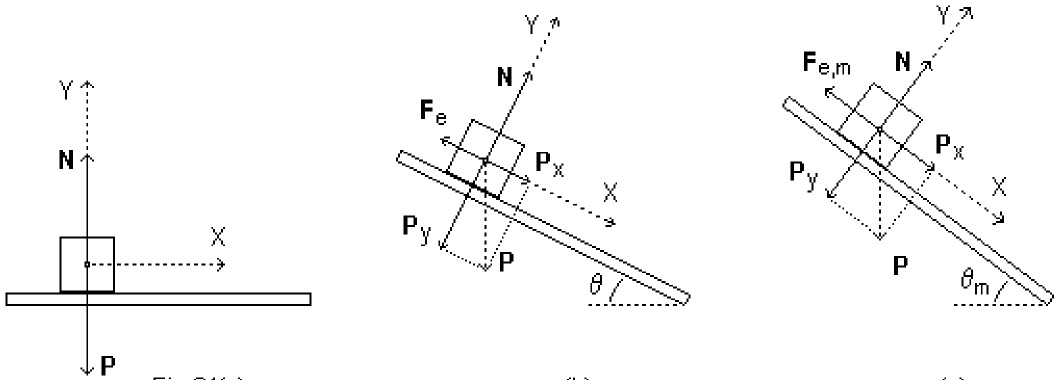

Fig.31(a) (b) (c)

Atrito Estático

Para estudar o atrito estático seco, considere-se um bloco apoiado sobre uma prancha, ambos de madeira, e um referencial fixo na prancha.

Com a prancha na horizontal (Fig.31(a)), agem sobre o bloco as forças peso **P** e normal **N**. Essas duas forças têm direção vertical e se cancelam. Não existe qualquer tendência de movimento do bloco ao longo da prancha. Por isso, não existe força de atrito nessa situação.

Com a prancha fazendo um pequeno ângulo com a horizontal (Fig.31(b)), as forças peso e normal não mais se cancelam. A força peso pode ser decomposta numa componente ao longo da prancha, $\mathbf{P}_x$, e uma componente perpendicular, $\mathbf{P}_y$. Essa componente $\mathbf{P}_y$ e a normal se cancelam. Em módulo:

$$N = P_y$$

Por efeito da componente $\mathbf{P}_x$ existe, agora, uma tendência de movimento do bloco ao longo da prancha e, portanto, deve existir uma força de atrito. Se o bloco permanece em repouso no referencial fixo na prancha, essa componente do peso deve ser cancelada por uma força de atrito estático $\mathbf{F}_e$. Assim, temos, em módulo:

$$F_e = P_x$$

A medida que o ângulo de inclinação da prancha aumenta, o valor de P_x aumenta e aumenta também F_e. Portanto, o módulo da força de atrito estático aumenta continuamente com o aumento do ângulo de inclinação da prancha. Mas existe um ângulo máximo θ_m a partir do qual o bloco passa a deslizar sobre a prancha (Fig.31(c)). A partir daí, a força de atrito atuante é a de atrito cinético $\mathbf{F}_c$.

Com a prancha fazendo exatamente o ângulo θ_m com a horizontal, o módulo da força de atrito estático atinge o valor máximo $F_{e,m}$. Assim, o módulo da força de atrito estático entre duas superfícies secas que tendem a se mover uma em relação à outra pode ter um valor entre zero e $F_{e,m}$. Então, escrevemos:

$$F_e \leq F_{e,m}$$

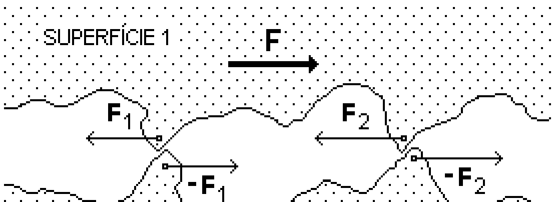

Fig.32

As superfícies que, no nível macroscópico, parecem planas, têm, no nível microscópico, irregularidades e imperfeições. O contato entre duas dessas superfícies ocorre num número relativamente pequeno de pontos, onde as irregularidades se interpenetram e se deformam. As deformações causam o aparecimento de forças mútuas cujos efeitos coletivos são as forças normais. O número de pontos de contato e as intensidades das deformações e, portanto, das forças normais, dependem das intensidades das forças que aproximam as superfícies uma contra a outra. Nos pontos de contato existem ligações dos átomos de uma superfície com os átomos da outra, como se fossem soldas microscópicas.

Se uma força externa horizontal **F** é aplicada na superfície 1 (Fig.32), passam a existir, nessa superfície, as forças horizontais $\mathbf{F}_1$, $\mathbf{F}_2$, ... $\mathbf{F}_n$ e aparecem, na superfície 2, as forças $-\mathbf{F}_1$, $-\mathbf{F}_2$, ... $-\mathbf{F}_n$, associadas às deformações locais originadas pela tendência de movimento relativo entre as superfícies.

Se as superfícies permanecem em repouso relativo, a força de atrito estático sobre a superfície 1 e a força de atrito estático sobre a superfície 2 são, respectivamente:

$$\mathbf{F}_{e1} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n$$

e

$$\mathbf{F}_{e2} = -(\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + ... + \mathbf{F}_n)$$

Quanto maior for o módulo da força **F**, maiores são as deformações locais e maiores os módulos das respectivas forças. Se o módulo da força **F** é grande o suficiente para romper as soldas microscópicas nos pontos de contato, uma superfície desliza em relação à outra e o atrito deixa de ser estático para se tornar cinético. Nesse movimento, as irregularidades de uma superfície colidem com as irregularidades da outra e as forças que surgem devido a essas colisões se somam para dar as respectivas forças de atrito cinético. As colisões originam oscilações locais que se propagam e são amortecidas pelo resto do material. Assim, a energia mecânica associada ao movimento relativo das superfícies se transforma em energia interna, aumentando as temperaturas das superfícies.

Essa discussão justifica a seguinte expressão:

$$F_{e,m} = \mu_e N$$

Nessa expressão, N representa o módulo da força normal, exercida pela superfície sobre o corpo (Fig.31(b)), e μ_e representa o coeficiente de atrito estático.

Se $\theta = \theta_m$, podemos escrever (Fig.31(c)):

$$N = P_y = P \cos \theta_m$$

e

$$F_{e,m} = P_x = P \operatorname{sen} \theta_m$$

de modo que:

$$\mu_e = \frac{F_{e,m}}{N} = \frac{P \operatorname{sen} \theta_m}{P \cos \theta_m} = \operatorname{tg} \theta_m$$

Essa expressão permite determinar o coeficiente de atrito estático a partir do ângulo máximo de inclinação da prancha sem que o corpo deslize sobre ela.

Experimento de Atrito Estático

Colocamos o bloco sobre a prancha numa posição a 80 cm da extremidade e levantamos lentamente a prancha. A partir do instante em que o bloco começa a deslizar, imobilizamos a prancha. Nessa posição, medimos h e L (Fig.33).

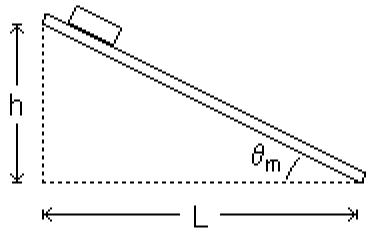

Fig.33

Com esses valores, determinamos o valor do coeficiente de atrito estático:

$$\mu_e = \frac{h}{L}$$

Repetimos o processo várias vezes, sempre com o bloco na mesma posição inicial e com a mesma face voltada para a prancha. A tabela abaixo mostra valores experimentais típicos e os correspondentes valores para o coeficiente de atrito estático.

O valor do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha usados no experimento e, mais, na posição escolhida como inicial, é o valor médio dos valores obtidos em cada evento: μ_e = 0,45.

h (m)	L (m)	μ_e
0,32	0,75	0,43
0,33	0,74	0,45
0,35	0,71	0,49
0,32	0,73	0,44
0,33	0,72	0,46

Os coeficientes de atrito são parâmetros experimentais que dependem das superfícies em contato. As expressões $F_{e,m} = \mu_e N$ e $\mu_e = \text{tg}\ \theta$ valem para superfícies planas e secas. Os dados experimentais referentes aos módulos das forças de atrito estático são muito aproximados, dependendo dos diferentes graus de polimento das superfícies e dos diferentes graus de contaminação com substâncias estranhas. Esses fatores são fundamentais na determinação dos coeficientes de atrito. Assim, não tem sentido tabelar coeficientes de atrito entre superfícies diversas, a menos que elas sejam padronizadas. O atrito nunca é entre uma superfície deste material e uma superfície de outro material, mas entre uma superfície deste material com certo polimento e certas impurezas e uma superfície de outro material com outro polimento e outras impurezas. Essa discussão pode adquirir sentido se o procedimento experimental que desenvolvemos acima para a determinação do coeficiente de atrito estático entre o bloco e a prancha for repetido com o bloco em outras posições. Os resultados para μ_e podem diferir do valor obtido acima.

Atrito Cinético

Se existe movimento relativo entre as superfícies em contato, as forças de atrito são as forças de atrito cinético, cujos módulos são dados pela expressão:

$$F_c = \mu_c N$$

em que μ_c representa o coeficiente de atrito cinético. O valor do coeficiente de atrito cinético é praticamente independente do módulo da velocidade relativa entre as duas superfícies, desde que esse módulo não seja muito grande.

Como é mais fácil manter o movimento de um corpo sobre uma superfície qualquer do que começar esse movimento, devemos ter:

$$\mu_c < \mu_e$$

Como dissemos acima, os coeficientes de atrito são parâmetros experimentais que dependem não apenas do material de que são feitas as superfícies em contato, mas também dos diferentes graus de polimento das superfícies e dos diferentes graus de contaminação com substâncias estranhas. Esses fatores são fundamentais para a determinação dos coeficientes de atrito e, no caso do atrito cinético, esses fatores são determinantes para a dependência ou não dos módulos das forças de atrito com o módulo da velocidade relativa entre as superfícies em questão.

Exercício 1

Uma caixa com massa de 30 kg está apoiada sobre um plano horizontal e em repouso num referencial fixo nesse plano. Um garoto tenta colocar a caixa em movimento aplicando-lhe uma força horizontal com módulo de 18 N. (a) Faça um desenho representando as forças que atuam sobre a caixa, identificando-as. (b) Diga qual é o módulo da força de atrito do plano sobre a caixa.

Exercício 2

O coeficiente de atrito estático entre os pneus de certo carro e o asfalto de certa estrada é $\mu_e = 0{,}5$. A massa do carro com o motorista é de 980 kg. (a) Calcule o módulo máximo da força de frenagem que pode ser obtida para este carro nesta estrada. (b) Calcule a distância mínima para fazer o carro parar, quando ele se movimenta a 80 km/h, num referencial fixo na estrada.

Exercício 3

Num referencial fixo numa superfície horizontal, um bloco de 8 kg se desloca sobre essa superfície por efeito de uma força com módulo de 20 N que faz um ângulo de 30° com a horizontal. O coeficiente de atrito cinético entre o bloco e a superfície vale $\mu_c = 0{,}2$. Calcule (a) o módulo da força de atrito cinético sobre o bloco e (b) o módulo da sua aceleração.

Exercício 4

Um caixote está sobre a carroceria de um caminhão numa estrada horizontal. O caminhão está parado num referencial fixo na estrada. O coeficiente de atrito estático entre o caixote e a carroceria do caminhão é 0,4. Calcule o módulo máximo que pode ter a aceleração do caminhão de modo que o caixote não escorregue sobre sua carroceria.

XIII. Movimento Circular Uniforme

Um movimento circular uniforme (MCU) pode ser associado, com boa aproximação, ao movimento de um planeta ao redor do Sol, num referencial fixo no Sol, ou ao movimento da Lua ao redor da Terra, num referencial fixo na Terra. Um movimento circular uniforme pode ser associado também às partículas que formam as rodas e engrenagens dos dispositivos mecânicos.

A palavra uniforme, neste contexto, se refere à invariância do módulo da velocidade linear da partícula que se desloca numa trajetória circular. De qualquer modo, embora o módulo do vetor velocidade linear possa ser constante, a sua direção varia continuamente, existindo uma aceleração (centrípeta) e, portanto, uma força resultante não nula sobre a partícula.

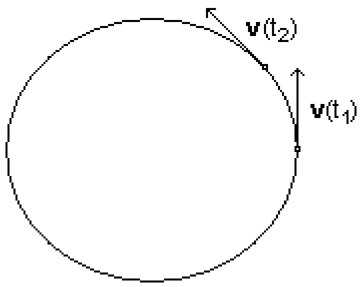

Fig.34

Definição do MCU

Uma partícula está em movimento circular uniforme num dado referencial quando se movimenta sobre uma circunferência com velocidade linear de módulo constante.

O vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória e varia continuamente porque sua direção varia (Fig.34). Para dois instantes genéricos t_1 e t_2, os módulos das velocidades $v(t_1)$ e $v(t_2)$ são iguais, mas os vetores velocidade linear $\mathbf{v}$ (t_1) e $\mathbf{v}(t_2)$ são diferentes.

Período e Freqüência

O tempo levado pela partícula para percorrer uma vez a sua trajetória é o período (T) do movimento. O número de voltas dadas pela partícula na unidade de tempo é a freqüência (f) do movimento. Assim:

$$f = \frac{1}{T}$$

A unidade de freqüência é chamada hertz e simbolizada por Hz: 1 Hz = 1 / s.

Exemplo

Para termos uma idéia mais concreta da veracidade da expressão acima, consideremos uma partícula em MCU (num dado referencial) que leva 4s para percorrer exatamente uma vez a circunferência que constitui a sua trajetória.

O período do movimento é justamente 4s.

Por outro lado, como a partícula percorre uma volta em 4s, em um segundo ela percorre ¼ de volta. Portanto, a freqüência do movimento da partícula, no referencial considerado, vale 1/(4s).

Velocidade Linear e Velocidade Angular

O módulo da velocidade linear da partícula, no referencial em que ela descreve um MCU, é definido como a distância percorrida sobre a trajetória dividida pelo intervalo de tempo levado para percorrê-la. Assim, tomando como intervalo de tempo o período, podemos escrever, para o módulo da velocidade linear:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

O vetor velocidade linear é sempre tangente à trajetória da partícula (Fig.35).

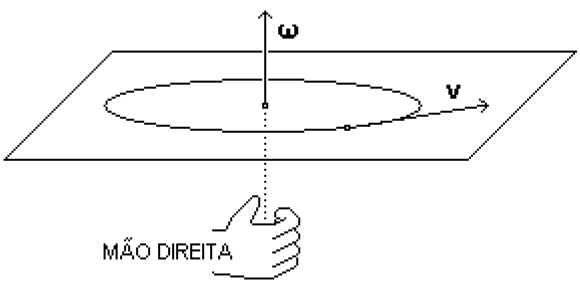

Fig.35

Se, em vez de considerar a distância percorrida pela partícula sobre sua trajetória, consideramos o ângulo descrito pela linha que une a partícula ao centro da trajetória, podemos definir a velocidade angular.

O módulo dessa velocidade angular é dado pelo cociente do ângulo descrito (em radianos) pelo intervalo de tempo correspondente. Assim:

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

ou, lembrando que f = 1 / T:

$\omega = 2\pi f$

A direção da velocidade angular é perpendicular ao plano da trajetória e o sentido é dado pela regra da mão direita: com os dedos da mão direita colocados ao longo da trajetória descrita pela partícula e na mesma direção do movimento, o polegar aponta o sentido da velocidade angular (Fig.35).

Comparando a expressão do módulo da velocidade linear com a expressão do módulo da velocidade angular, podemos escrever:

$v = \omega R$

Aceleração Centrípeta

Pela primeira lei de Newton, se é nula a força resultante sobre uma partícula, ela está parada ou em movimento retilíneo uniforme num referencial inercial. Como o vetor $\mathbf{v}(t_2)$ é diferente do vetor $\mathbf{v}(t_1)$, ou seja, como $\Delta\mathbf{v}$ é diferente de zero, existe uma força resultante não nula sobre a partícula em MCU. Em outras palavras, existe uma aceleração.

Por outro lado, como o módulo do vetor velocidade linear é constante, o vetor aceleração não pode ter componente na direção do vetor velocidade linear. Então, o vetor aceleração da partícula, em qualquer instante de tempo, aponta para o centro da sua trajetória (Fig.36).

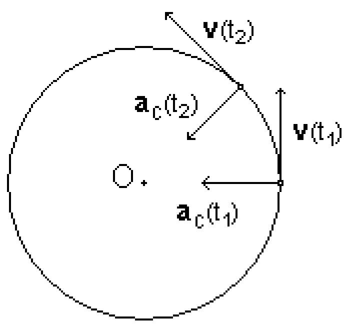

Fig.36

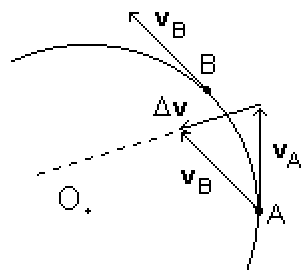

Fig.37

Esta aceleração é chamada aceleração centrípeta e tem módulo dado por:

$$a_c = \frac{v^2}{R}$$

ou, lembrando que $v = \omega R$:

$a_c = \omega^2 R$

Como dissemos acima, o vetor aceleração centrípeta, em qualquer instante de tempo, aponta para o centro da sua trajetória. Para verificar esse resultado vamos considerar o seguinte procedimento geométrico.

Desenhamos uma circunferência com raio de 10 cm e, sobre ela, assinalamos dois pontos, A e B, relativamente próximos um do outro (Fig.37). Em cada um desses pontos, desenhamos uma flecha de 3 cm de comprimento para representar as respectivas velocidades lineares, $\mathbf{v}_A$ e $\mathbf{v}_B$, de uma partícula em MCU. Agora, transportamos a flecha que representa $\mathbf{v}_B$ paralelamente a si mesma, de modo que sua origem coincida com a origem da flecha que representa $\mathbf{v}_A$ e representamos o vetor $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A$.

O vetor aceleração centrípeta tem a mesma direção e o mesmo sentido que o vetor $\Delta\mathbf{v}$ e ambos devem apontar para o centro da trajetória circular da partícula em MCU. Na Fig.37 podemos ver que existe um desvio apreciável.

Repetindo o procedimento descrito acima para pontos A e B cada vez mais próximos um do outro, podemos ver que o desvio fica cada vez menor. No limite em que os pontos A e B estão tão próximos um do outro que se confundem, o desvio é nulo, ou seja, a aceleração centrípeta aponta para o centro da circunferência.

O procedimento acima informa também que a definição rigorosa da aceleração centrípeta envolve um processo de limite.

Força Centrípeta

A força sobre a partícula (de massa m) em MCU é chamada força centrípeta. Pela segunda lei de Newton, essa força tem módulo dado por:

$$F_c = \frac{mv^2}{R}$$

ou:

$$F_c = m\omega^2 R$$

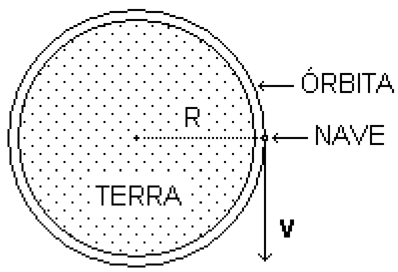

Fig.38

Exemplo

Vamos considerar um modelo no qual uma nave espacial descreve uma órbita circular de raio R ao redor da Terra, num referencial fixo na Terra (Fig.38), para discutir o fenômeno da imponderabilidade.

Como a órbita é circular, a força gravitacional da Terra sobre a nave, isto é, a força peso da nave, é a força centrípeta. Assim, podemos escrever:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$$

em que m é a massa da nave, M, a massa da Terra e G, a constante universal da gravitação. O raio da órbita fica:

$$R = \frac{GM}{v^2}$$

O raio da órbita depende de G, uma constante universal, de M, a massa da Terra, e de v, o módulo da velocidade linear orbital da nave. O raio da órbita não depende da massa da nave. Se existe um astronauta dentro da nave, com a mesma velocidade linear orbital da nave, ele tem uma órbita com o mesmo raio da órbita da nave. Então, o astronauta permanece em repouso num referencial fixo na nave e parece flutuar dentro da nave. Este fenômeno é o que se chama de imponderabilidade.

Devemos observar que esse fenômeno não implica falta de gravidade ou falta de peso. Muito pelo contrário, é justamente o peso do astronauta e o peso da nave que fazem o papel de forças centrípetas para garantir que as respectivas órbitas sejam circulares.

Exercício 1

Num dado referencial, um disco gira ao redor do um eixo fixo que passa pelo seu centro com velocidade angular constante. Um ponto da borda do disco tem velocidade linear de módulo 50 cm/s. Um ponto a 20 cm da borda tem velocidade linear de módulo 10 m/s. Calcule o módulo da velocidade angular do disco.

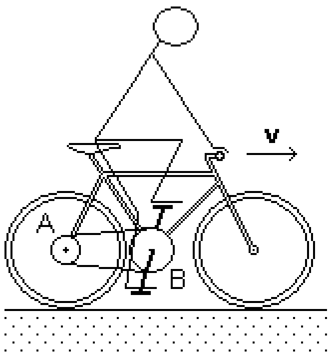

Fig.39

Exercício 2

Um ciclista, pedalando sua bicicleta, faz com que ela se desloque com uma velocidade de módulo v = 5,2 m/s num referencial fixo na estrada (Fig.39). Os pneus têm raios externos de 26 cm e as rodas dentadas A e B têm raios de 4 cm e 8 cm, respectivamente. Tomando um referencial fixo no ciclista, calcule (a) o módulo da velocidade linear dos pontos das bordas externas dos pneus e (b) o módulo da velocidade angular da roda dentada B.

Exercício 3

Um automóvel com massa de 750 kg percorre uma curva circular plana e horizontal com um raio de 50 m. O coeficiente de atrito estático entre os pneus e a pista vale μ = 0,8. Calcule (a) o módulo máximo da força de atrito e (b) o valor máximo do módulo da velocidade do automóvel para que ele faça a curva sem derrapar.

Exercício 4

Um motociclista realiza manobras num globo da morte de 5m de diâmetro. A massa do conjunto motociclista + moto é de 160 kg. Calcule o valor mínimo que deve ter o módulo da velocidade linear da moto, num referencial fixo no globo, para que ela esteja em contato com o globo mesmo passando pela sua parte superior.

Exercício 5

Satélite geoestacionário é aquele que se encontra sempre na linha vertical traçada de um ponto fixo da superfície da Terra (geralmente no equador). Calcule a altura da órbita de um satélite desse tipo.

XIV. Leis de Kepler

Considerando um referencial fixo no Sol, por efeito da lei da gravitação universal, o movimento dos planetas ao redor do Sol acontece segundo as três leis de Kepler. Na verdade, as leis de Kepler não se aplicam apenas às órbitas dos planetas ao redor do Sol. Elas valem de modo geral para qualquer corpo em órbita ao redor de outro corpo, num referencial em que este último está em repouso e quando a interação entre os corpos é gravitacional. Por exemplo, a Lua e os satélites artificiais têm órbitas que seguem as leis de Kepler num referencial fixo na Terra e as luas de Júpiter seguem as leis de Kepler num referencial em que Júpiter está em repouso.

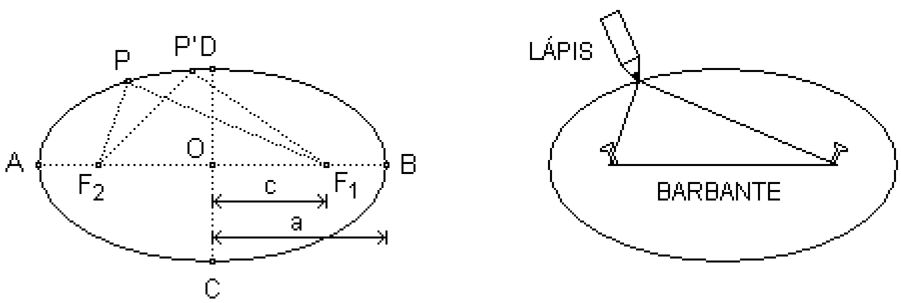

Fig.40(a) (b)

Elipses

Consideremos os pontos F_1 e F_2, distintos e fixos num plano (Fig.40(a)). Elipse é a curva desse plano para a qual a soma das distâncias de cada um de seus pontos aos pontos F_1 e F_2 é constante (e maior do que a distância entre F_1 e F_2).

Assim, por definição, as distâncias $F_2P + PF_1$ e $F_2P' + P'F_1$ são iguais. Isto indica um modo simples de desenhar uma elipse com dois percevejos e um laço de barbante (Fig.40(b)). Passando o laço de barbante pelos percevejos e mantendo-o sempre esticado com um lápis, o risco do lápis é uma elipse.

Os pontos F_1 e F_2 são chamados focos e o ponto O, centro da elipse. O segmento AB é chamado eixo maior e os segmentos AO e OB, semi-eixos maiores. O segmento CD é chamado eixo menor e os segmentos CO e OD, semi-eixos menores.

Podemos considerar a elipse como uma circunferência achatada. Para indicar o maior ou menor achatamento, definimos a excentricidade:

$$e = \frac{c}{a}$$

em que c é a distância F_2O ou OF_1 e a, a distância AO ou OB. Por definição, a > c. Então, 0 < e < 1. Assim como podemos considerar a elipse como uma circunferência achatada, podemos pensar que a circunferência é um caso particular de elipse em que os focos coincidem. Assim, para a circunferência, c = 0 e a excentricidade é nula.

Primeira Lei de Kepler

A primeira lei de Kepler, chamada lei das órbitas elípticas, diz que, num referencial fixo no Sol, as órbitas dos planetas são elipses e o Sol ocupa um dos focos.

A tabela abaixo mostra as excentricidades das órbitas dos oito planetas do Sistema Solar.

Mercúrio	Vênus	Terra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Netuno
0,206	0,007	0,017	0,093	0,048	0,056	0,046	0,009

Essas excentricidades são muito pequenas, ou seja, as órbitas são quase circunferências. A órbita mais achatada é a do planeta Mercúrio. A Fig.41(a) mostra em escala esta órbita com os dois focos. Uma das órbitas menos achatadas é a da Terra. A Fig.41(b) mostra a órbita da Terra com os dois focos.

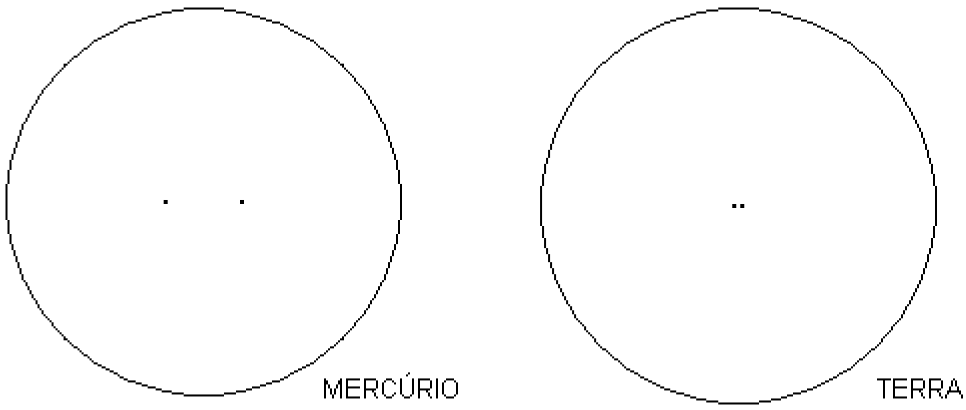

Fig.41(a) (b)

As órbitas da Terra, de Vênus e de Netuno são praticamente circunferências. O mesmo se poderia dizer das órbitas de Júpiter, Saturno e Urano. As órbitas de Marte e de Mercúrio são um pouco achatadas.

Aqui, é interessante notar o seguinte:

- Menor Distância Mercúrio-Sol: $4,6 \times 10^7$ km

- Distância Terra-Sol: $1{,}5 \times 10^8$ km
- Diâmetro do Sol: $1{,}4 \times 10^6$ km

Assim, comparando a primeira com a terceira, podemos ver que o diâmetro do Sol é cerca de 33 vezes menor do que a menor distância Mercúrio-Sol. Na Fig.41(a), que representa a órbita de Mercúrio, o Sol deveria ser representado por um ponto com o mesmo diâmetro daquele usado para representar cada foco.

De modo análogo, comparando a segunda com a terceira, podemos ver que o diâmetro do Sol é cerca de 107 vezes menor do que a distância Terra-Sol. Na Fig.41(b), que representa a órbita da Terra, o Sol deveria ser representado por um ponto com a metade do diâmetro daquele usado para representar cada foco.

A órbita da Terra é praticamente uma circunferência. A diferença entre a distância de maior proximidade Terra-Sol e a distância de maior afastamento é muito pequena e não pode justificar a diferença no clima entre o inverno e o verão. Além do mais, quando é inverno num hemisfério terrestre, é verão no outro. Na verdade, essa diferença climática vem da inclinação do eixo de rotação da Terra ao redor de si própria em relação ao plano da órbita.

A interação gravitacional entre o Sol e cada planeta pode ser representada por forças inversamente proporcionais ao quadrado da distância entre o planeta e o Sol. A primeira lei de Kepler é conseqüência desse fato.

Segunda Lei de Kepler

A segunda lei de Kepler, chamada lei das áreas, afirma que, num referencial fixo no Sol, a reta que une o planeta ao Sol varre áreas iguais em tempos iguais.

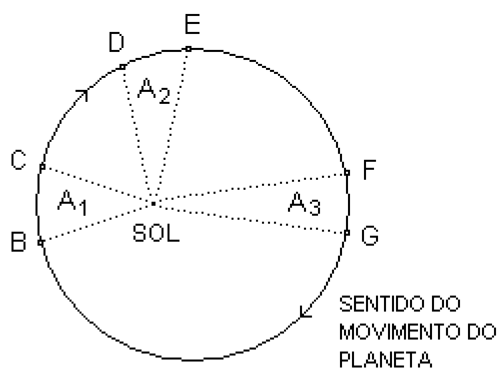

Fig.42

As áreas A_1, A_2 e A_3 na Fig.42 são iguais. A segunda lei de Kepler informa que são iguais os tempos levados pelo planeta para percorrer os correspondentes arcos BC, DE e FG. Portanto, o módulo da velocidade linear do planeta é tanto maior quanto mais perto do Sol ele se encontra.

De qualquer forma, como as órbitas são aproximadamente circunferências, a variação relativa do módulo da velocidade linear dos planetas é pequena.

A segunda lei de Kepler é conseqüência do princípio de conservação do momento angular.

Terceira Lei de Kepler

A terceira lei de Kepler, chamada lei harmônica, afirma que, num referencial fixo no Sol, o quadrado do período de revolução de um planeta ao redor do Sol é proporcional ao cubo do semi-eixo maior da elipse que representa a órbita do planeta.

Matematicamente:

$$T^2 = ka^3$$

em que k tem, aproximadamente, o mesmo valor para todos os planetas.

Podemos obter essa relação considerando um modelo em que as órbitas planetárias são circunferências, ou seja, considerando o movimento de cada planeta ao redor do Sol como um movimento circular uniforme num referencial em que o Sol está em repouso. Nesse caso, a força gravitacional do Sol sobre o planeta é a força centrípeta do MCU correspondente e podemos escrever:

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GmM}{R^2}$$

em que m é a massa do planeta, M é a massa do Sol, v é o módulo da velocidade linear do planeta e R é o raio da órbita. No modelo que estamos considerando, o raio e o semi-eixo maior da órbita são idênticos. Se o planeta leva um tempo T para dar uma volta completa ao redor do Sol, temos:

$$v = \frac{2\pi R}{T}$$

e substituindo v desta expressão naquela de cima e simplificando, obtemos:

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)R^3$$

Esta é a expressão matemática da terceira lei de Kepler desde que:

$$k = \left(\frac{4\pi^2}{GM}\right)$$

Aqui, podemos ver porque k tem, aproximadamente, o mesmo valor para todos os planetas. Aproximadamente, porque as órbitas planetárias são, aproximadamente, circunferências e o mesmo valor para todos os planetas porque k só depende da constante universal G e da massa do Sol. Um cálculo mais próximo da realidade indicaria que k depende também da massa do planeta.

Exercício 1

Considere as órbitas de Marte e da Terra como circunferências num referencial fixo no Sol. Sabendo, então, que o raio da órbita de Marte é cerca de 1,5 vezes o raio da órbita da Terra, calcule a duração do ano marciano.

Exercício 2

Considere a órbita de Vênus como uma circunferência num referencial fixo no Sol. Calcule a massa de Vênus sabendo que o seu ano dura 245 dias terrestres e o raio da sua órbita ao redor do Sol tem $1,08 \times 10^{11}$ m. Para comparação, a massa da Terra é de cerca de $6,0 \times 10^{24}$ kg.

Exercício 3

A Fig.43 representa as órbitas de dois cometas num referencial fixo no Sol. Identifique o cometa que leva mais tempo para completar a sua órbita.

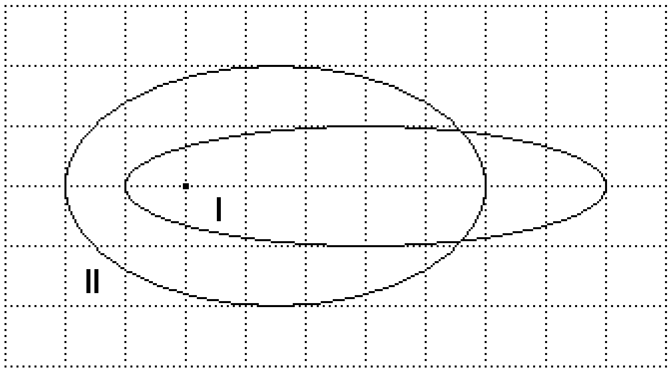

Fig.43

Exercício 4

O ponto da órbita de um planeta mais próximo do Sol é o periélio e o ponto mais afastado é o afélio. O planeta Mercúrio tem uma órbita com semi-eixo maior de $5,8 \times 10^{7}$ km e excentricidade $e = 0,206$. Calcule as distâncias do periélio e do afélio de Mercúrio ao Sol.