GEOMETRIA ANALÍTICA: UMA ANÁLISE DOS REGISTROS MOBILIZADOS POR UM GRUPO DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

Franciele Catelan Cardoso
Unijui/GEEM/RS
francielecatelan@gmail.com

Catia Maria Nehring
Unijui/GEEM/RS
catia@unijui.edu.br

Maria Arlita da Silveira Soares
URI/Santiago/GEEM/RS
arlita@urisantiago.br

Resumo
Neste artigo, analisamos os registros de representação semiótica mobilizados por um grupo de acadêmicos de um curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade comunitária do interior do estado do RS ao resolverem atividades envolvendo conceitos de geometria analítica com o auxilio do software Geogebra. Para tanto, apoiamo-nos na Teoria dos Registros de Representação Semiótica de Duval (2003), em especial na forma como o autor compreende a aprendizagem em matemática. O método escolhido para a realização foi uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso, cujas fontes de análise foram os protocolos dos acadêmicos. Concluímos que a utilização do Geogebra contribuiu para que os acadêmicos visualizassem e interpretassem os elementos geométricos explorados nas atividades, bem como explorassem as várias representações do objeto matemático. Verificamos ainda que alguns acadêmicos apresentaram dificuldades nas conversões do registro gráfico para o registro algébrico, isso porque, as diferentes representações para o mesmo objeto matemático nem sempre são assimiladas rapidamente pelos alunos, de mesma forma e num mesmo tempo.

Palavras-chave: Geometria Analítica; Registros de Representação Semiótica; Geogebra.

Introdução

A Matemática é uma área do conhecimento indispensável para a formação do cidadão, pois, cada vez mais, a sociedade (globalizada) utiliza conhecimentos científicos e recursos tecnológicos, que exigem saber calcular, trabalhar com estimativas, representar dados em diferentes formas, dominar procedimentos para a validação de resultados, bem como, analisar as variadas representações gráficas expostas nos meios de comunicação, etc.

Nesse sentido, a geometria torna-se importante por ser um “campo ideal para o desenvolvimento da capacidade de representação e de um tipo especial de pensamento, o visual, inerente à resolução de diferentes questões matemáticas” (PAVANELLO e ANDRADE, 2002, p. 78), ainda, fundamental na resolução de problemas do cotidiano e de outras áreas do conhecimento.

A geometria analítica destaca-se por explorar e relação entre a geometria e a álgebra, proporcionando uma visão e a compreensão do espaço de maneira mais elaborada mobilizando formas e raciocínios singulares em relação aos utilizados na Geometria Euclidiana (SANTOS, 2008). Porque permite “o entendimento de figuras geométricas via equações, e o entendimento de equações, via figuras geométricas” (BRASIL, 2006, p. 77).

No entanto, dados empíricos revelam que o ensino da geometria analítica tem se restringido a uma única série do Ensino Médio (3º ano) e explorado de forma fragmentada, não valorizando as conexões com outros tópicos. Ainda, geralmente, o seu ensino caracteriza-se como um “amontoado” de fórmulas.

Talvez os problemas do ensino de geometria estejam relacionados à formação inicial de professores. Segundo Almouloud et al (2004) o ensino desse campo da Matemática na formação inicial é insuficiente, existindo um destaque à álgebra, não exigindo raciocínio dedutivo e demonstrações, impedindo a passagem da geometria empírica à geometria dedutiva. Porém, o desenvolvimento do raciocínio e da visualização depende da mobilização e coordenação de variadas representações matemáticas.

Conforme Gravina e Santarosa (1998) no estudo da geometria há um tratamento estereotipado para os objetos. A apresentação das demonstrações é realizada a partir de argumentos ordenados e prontos como os livros didáticos apresentam, ou seja, demonstrações nem sempre claras, acompanhadas de desenhos bem particulares, os ditos desenhos prototípicos.

Acreditamos que a utilização de softwares de matemática dinâmica como o Geogebra, podem ser aliados para a apreensão dos conceitos geométricos.

Este estudo buscou a compreensão detalhada e descritiva de um fenômeno que instiga as pesquisadoras, ou seja, a mobilização de registros de representação por um grupo de quatorze licenciandos em Matemática de uma Universidade Comunitária do interior do RS ao resolverem atividades relacionadas à geometria analítica com o auxílio do software Geogebra. Essas atividades foram propostas em uma disciplina eletiva denominada Tópicos Especiais em Ensino de Matemática, cujo objetivo é proporcionar a análise, discussão e aprofundamento de conteúdos de Matemática da Educação Básica, através da resolução de problemas, inclusive os relacionados à Geometria Analítica. Sendo assim, o estudo caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa na forma de estudo de caso.

Para a exploração dos conceitos relacionados à Geometria Analítica a professora organizou três sequências de ensino. A primeira sequência contemplou os seguintes assuntos: plano cartesiano, distância entre dois pontos, ponto médio, mediatriz e equações paramétricas. A segunda explorou as diferentes equações da reta, paralelismo e perpendicularismo. Já a terceira explorou a equação da circunferência.

Analisaremos um recorte composto por oito atividades da primeira sequência de ensino elaborada pela professora, que tinha, no total, dezesseis atividades. Cabe destacar que essas atividades foram selecionadas por meio da análise de algumas pesquisas em Educação Matemática (DALEMOLLE, 2010; GOULART, 2009) e dos livros didáticos aprovados pela PNLDEM[1] (2012).

Ensino da geometria analítica sob a ótica dos registros de representação semiótica

A geometria analítica desenvolve a capacidade de expressão, ou seja, de falar sobre os problemas que envolvem a Geometria, por meio de uma linguagem matemática específica, a

[1] Programa Nacional do Livro Didático do Ensino Médio.

Álgebra, bem como, utilizar a Geometria e suas propriedades para validar resultados algébricos. Para tal, é importante que tanto o professor quanto o aluno percebam que um mesmo problema pode ser tratado com instrumentos diversos conforme suas características, sendo capazes de mobilizar/identificar/coordenar as várias representações do objeto matemático.

A teoria que trata das várias representações matemáticas e suas implicações na aprendizagem dos objetos matemáticos é a teoria dos Registros de Representação Semiótica, desenvolvida por Duval (2003), que define um registro de representação como um sistema semiótico que tem as funções cognitivas fundamentais em nível do funcionamento cognitivo consciente, não servindo apenas para a comunicação entre as pessoas, mas também para realizar uma função de objetivação (entendimento para si) e tratamento.

Em sua teoria Duval (2003 apud SOARES, 2007) afirma que a aprendizagem em matemática só ocorre quando o aluno consegue mobilizar e coordenar vários registros de representação semiótica, no mínimo dois, ao mesmo tempo. Para ele não há noésis (conceituação) sem semiósis (apreensão ou produção de uma representação semiótica).

Neste momento, cabe o questionamento: *como ocorre a aquisição de um conceito por meio da mobilização e coordenação de vários registros de representação?* Para respondê-lo, é necessário entendermos duas atividades cognitivas descritas pelo teórico: *tratamento* e *conversão*, como sendo transformações bem diferentes (SOARES, 2007). No tratamento as transformações ficam num mesmo sistema semiótico, já na conversão muda o sistema, permanecendo a referência ao mesmo objeto, por exemplo, o tratamento algébrico dos elementos de uma reta.

Ainda, conforme Duval (2003), não se pode confundir o objeto com sua representação, pois a compreensão da matemática só ocorre quando o aluno consegue fazer a distinção entre objeto matemático e sua representação que é fundamental quando tratamos da geometria analítica, pois a reta, por exemplo, possui diferentes representações algébricas ($ax+by+c=0$- geral, $y=ax+b$- reduzida, etc.), pode também ser representada numericamente por dois pontos $((x_1,y_1)\,e\,(x_2,y_2))$. Assim, a geometria analítica, por mobilizar conceitos algébricos via representação gráfica e vice versa, se torna um importante campo de conexão entre os conteúdos matemáticos e das várias representações matemáticas, podendo ser explorada durante todo o Ensino Médio.

Dessa maneira, é importante que os conceitos matemáticos sejam trabalhados de forma articulada, possibilitando ao aluno a percepção de que um conceito matemático pode ser acessado a partir de diversas representações.

Análise dos protocolos dos acadêmicos

Para esta análise optamos por apresentar, primeiramente, o objetivo das atividades e, em seguida, a análise dos protocolos dos acadêmicos.

As duas primeiras atividades possibilitavam explorar uma das ferramentas do Geogebra, "controle deslizante", que permite a variação de um número. Além disso, buscava relembrar a qual eixo pertence um ponto onde uma das coordenadas é zero, a partir da visualização do movimento do ponto P quando t varia.

Quadro 1: Localização de pontos no plano cartesiano

1- Sendo t um número real, então podemos dizer que na medida que t varia, o ponto $P(t,0)$ se move:

a) Pelo eixo das ordenadas.
b) Pela reta bissetriz do primeiro quadrante.
c) Pelo eixo das abscissas.
d) Não anda em linha reta.

2- Sendo t um número real, então podemos dizer que na medida que t varia, o ponto $P(0,t)$ se move:

a) Por uma reta paralela ao eixo das ordenadas.
b) Pela reta bissetriz do primeiro quadrante.
c) Por uma reta paralela ao eixo das abscissas.
d) Não anda em linha reta.

Fonte: Adaptado de Dallemole, 2010.

Analisando os protocolos dos acadêmicos verificamos que a maioria só marcou a alternativa correta. Apenas uma acadêmica atribuiu três valores para t (valores inteiros). Representou no plano cartesiano e concluiu que o ponto, na atividade 1, se move sobre o eixo

das abscissas cuja equação da reta é dada por $y = 0$ e, na atividade 2, o ponto se move sobre o eixo das ordenadas cuja equação da reta é dada por $x = 0$, destacando a partir da visualização da representação gráfica que a equação não representa uma função. Ou seja, a resolução dessa atividade exigiu a tarefa cognitiva de conversão do registro da língua natural para o registro gráfico e, depois, deste para a língua natural novamente. Realizando essas conversões foi possível a visualização e a mobilização de outros conceitos matemáticos, como a de função.

Nas atividades, expostas no quadro 2, o objetivo era levar os acadêmicos a observar, manipulando o Geogebra, que o ponto dado movimentava-se sobre uma reta e a partir dessa análise determinar a equação da reta. A comprovação da equação da reta, visualizada na "janela da álgebra" do software, poderia ser obtida por meio da resolução do sistema das equações paramétricas ou definindo-se dois pontos que pertencem à reta. A resolução dessas atividades exigia a atividade cognitiva de conversão do registro da língua natural para o registro gráfico e depois retornar para a língua natural para marcar a resposta correta.

Quadro 2: Equação paramétrica da reta

3- Sendo t um número real, então podemos dizer que na medida que t varia, o ponto $P(1,t)$ se move:
a) Por uma reta paralela ao eixo das ordenadas.
b) Pela reta bissetriz do primeiro quadrante.
c) Por uma reta paralela ao eixo das abscissas.
d) Não anda em linha reta.

4- Sendo a qualquer valor real, então podemos dizer que na medida em que a varia o ponto $P(a,a)$:
a) Gira em torno da origem.
b) Anda sobre a bissetriz dos quadrantes pares.
c) Anda sobre a bissetriz dos quadrantes ímpares.
d) Faz movimento ondulatório.

5- Sendo t um número real, então podemos dizer que na medida que t varia, o ponto $P(2+t, 3+t)$ se move:
a) Por uma reta que passa na origem do sistema cartesiano.
b) Pela reta bissetriz do primeiro quadrante.
c) Por uma reta paralela a bissetriz dos quadrantes ímpares.
d) Não anda em linha reta.

6- Sendo t um número real, então podemos dizer que na medida que t varia, o ponto $P(-t, t+1)$ se move:
a) Por uma reta que passa na origem do sistema cartesiano.
b) Pela reta bissetriz dos quadrantes ímpares.
c) Por uma reta paralela a bissetriz dos quadrantes pares.
d) Não anda em linha reta.

7- Sendo k qualquer valor real, então podemos dizer que na medida em que k varia o ponto $P(4k-1, 2k+3)$:
a) Gira em torno da origem.
b) Anda sobre uma reta com coeficiente angular igual a 0,5.
c) Passa na origem do plano cartesiano.
d) Faz movimento ondulatório.

Fonte: Adaptado de Dallemole, 2010.

Nessas atividades constatamos que os acadêmicos, para responder as questões, realizaram as seguintes conversões: registro da língua natural → registro gráfico (manipulação de objetos matemáticos no software) → registro da língua natural (selecionar a alternativa) e para determinar a equação da reta: registro gráfico (representação no software) → registro algébrico (equação da reta). Esta última conversão não ocorreu de forma espontânea sendo necessária a intervenção da professora, pois os acadêmicos não mobilizaram os conceitos de geometria analítica que permitem a percepção das equações paramétricas dadas nas coordenadas do ponto. A partir da intervenção da professora todos determinaram a equação da reta pela resolução do sistema. Portanto, para que os alunos percebessem que na solução dessas atividades eles poderiam utilizar instrumentos matemáticos diversos, foi necessária a intervenção da professora, que buscou levá-los a mobilização e coordenação de outra representação semiótica do objeto matemático para garantir a apreensão do conhecimento matemático e a articulação entre os conceitos.

Na atividade oito (quadro 3) o objetivo foi relembrar os procedimentos para a construção de uma figura plana no Geogebra, cujas medidas (base maior, base menor, lados) estavam determinadas e explorar, ainda, a determinação das coordenadas dos vértices dessa figura quando apenas um deles está fixo (vértice A(0,0)). Ainda, a intenção da professora com essa atividade era a de que os alunos a desenvolvessem a atividade cognitiva de conversão do registo da língua natural para o registro figural (construção da figura), deste para o registro numérico (determinação das coordenadas dos vértices) e depois, a exploração do registro da língua natural para que os alunos justificassem as suas respostas neste registro.

Quadro 3: Coordenadas do vértice de um Trapézio

8- Construa um trapézio isósceles ABCD, cuja base menor mede 10, a base maior mede 20 e AB=CD=13. Determine as coordenadas dos vértices A, B, C e D; considerando que o vértice A está na origem do sistema.

Fonte: Adaptado de Iezzi et al, 2010.

Esta atividade foi proposta por um dos livros didáticos aprovados pelo PNLDEM (2012), mas a figura, no livro, estava construída no primeiro quadrante, tendo os dois vértices correspondentes a base maior localizados no eixo das abscissas. A professora adaptou essa atividade para explorar o movimento proporcionado pelo Geogebra e levar os alunos a mobilizar a lei que permite determinar a distância entre dois pontos, consequentemente, a equação da circunferência, o que por meio apenas da visualização da figura estática não seria possível (figura 1).

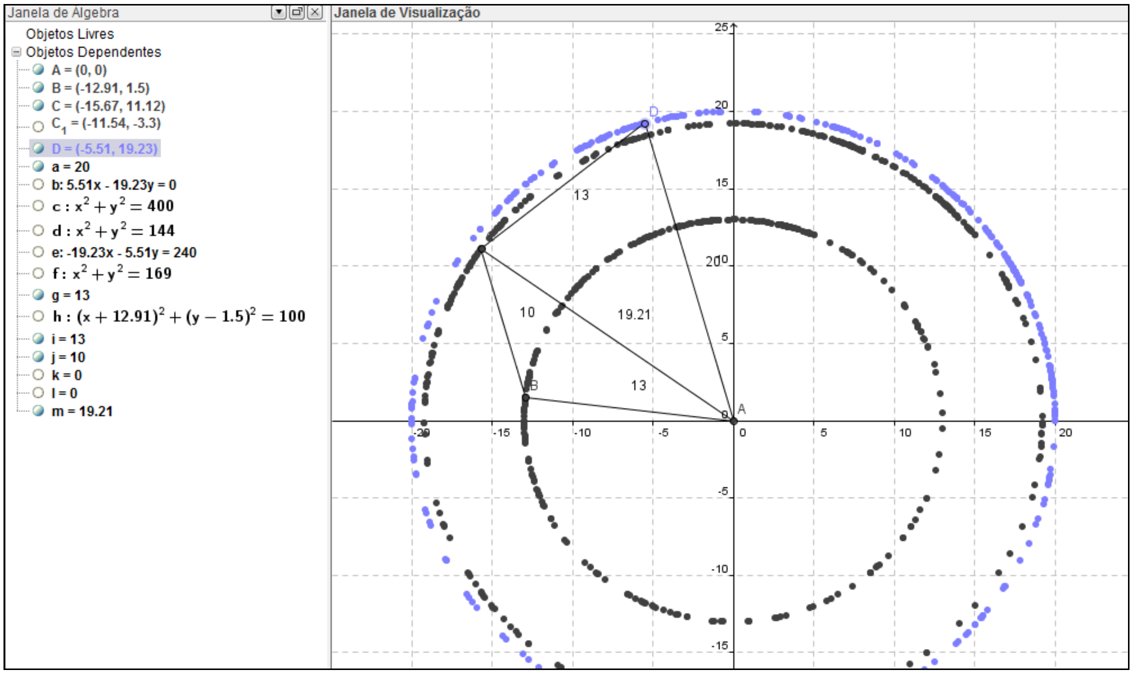

Figura 1: Construção de um trapézio isósceles, dado vértice A (0,0)

Ao construírem o trapézio os acadêmicos apresentaram dificuldades, primeiramente, para manipular as ferramentas do Geogebra necessárias para manter os lados da figura com as medidas dadas, eles deveriam ter seguido os seguintes passos: traçar uma circunferência de centro A(0,0) e raio 20, definindo o segmento AD; determinar a altura (h=12) e construir uma circunferência de centro A(0,0) e raio 12, em seguida, traçar uma reta perpendicular ao segmento AD passando pelo ponto A e marcar o ponto de interseção da reta com a circunferência (ponto E), com o objetivo de definir a localização do ponto B traçar uma reta paralela ao segmento AD passando por E e uma circunferência com centro A(0,0) e raio igual a 13, para marcar definir o ponto C traçar uma circunferência de centro em B e raio 10, marcando o ponto na interseção da circunferência com a reta paralela ao segmento AD, para finalizar a construção esconder os objetos matemáticos auxiliares (retas e circunferências) e traçar os segmentos unindo os pontos. Como a construção exigia a mobilização de vários conceitos da geometria plana e conhecimento das ferramentas do software os acadêmicos demoraram um bom tempo para realizá-la, a professora interviu estabelecendo uma condição para as coordenadas do vértice D (0, 20), conforme a figura 2.

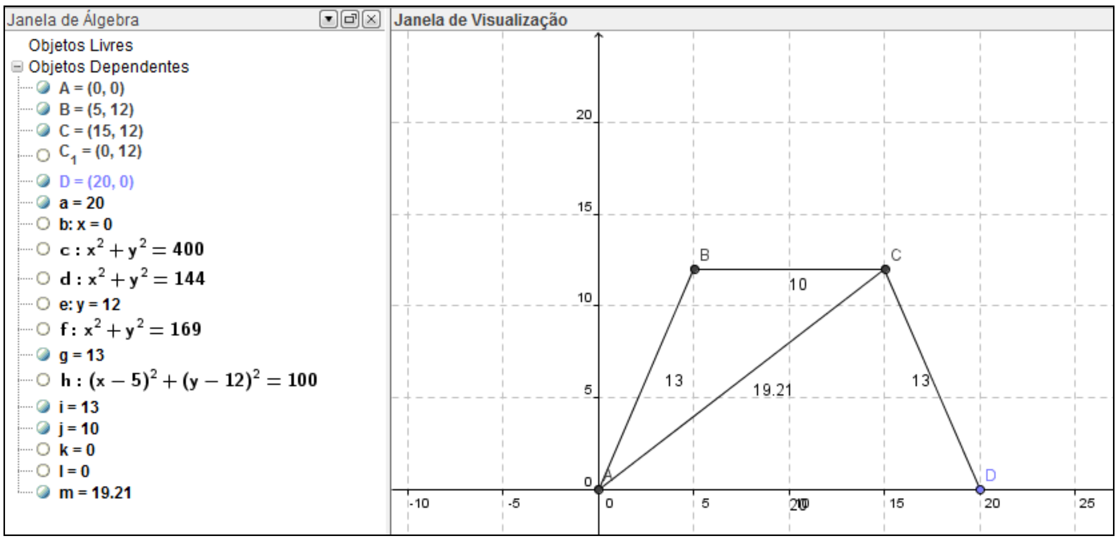

Figura 2: Construção de um trapézio isósceles, dado vértice A (0,0) e D (0,20)

Portanto, o objetivo da atividade descrito anteriormente não foi plenamente alcançado, pois a construção demandou um tempo considerável impedindo uma análise mais aprofundada dos conceitos de geometria analítica que poderiam ser explorados (distância entre dois pontos, equação da circunferência), sendo essa discutida no grande grupo.

É importante destacarmos que na resolução desta atividade um dos grupos conseguiu fazer as conversões que a professora havia objetivado, utilizando o registro da língua natural para justificar os passos que utilizaram para construir o trapézio, bem como mobilizaram os conceitos da Geometria Plana para garantirem as medidas propostas na atividade, como por exemplo, a utilização das circunferências para garantir as medidas das bases do trapézio e das retas paralelas para garantir as distâncias.

Considerações Finais

Constatamos que a utilização do Geogebra no desenvolvimento das atividades contribuiu para a visualização e interpretação dos elementos geométricos explorados. Em especial, a utilização da ferramenta "controle deslizante" possibilitou a análise das variações do registro gráfico quando alterado um parâmetro.

Alguns alunos, entretanto, apresentaram dificuldades para relacionar os conceitos da geometria plana com os da geometria analítica, principalmente, na atividade oito e para converter as diferentes representações, em especial da representação gráfica para a algébrica. Assim, podemos afirmar que as diferentes representações do mesmo objeto matemático nem sempre são assimiladas rapidamente pelos alunos, de mesma forma e num mesmo tempo.

Além disso, as atividades possibilitaram aos acadêmicos explorar o registro da língua natural não apenas para converter desse registro para os demais, mas também utilizá-la para argumentar e descrever suas análises.

Referências bibliográficas

ALMOULOUD, S. Ag. *A Geometria na escola básica: que espaços e formas tem hoje?* In: VII EPEM: Encontro Paulista de Educação Matemática, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação (MEC), Secretaria de Educação Básica (SEB). *Orientações curriculares para o Ensino Médio*. Brasília, vol. 2, 2006.

DALLEMOLE, J.J. *Registros de Representação Semiótica e Geometria Analítica: uma experiência com o ambiente virtual SIENA*. 2011. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Luterana do Brasil. ULBRA. RS.

DUVAL, R. *Registros de Representação Semióticas e Funcionamento Cognitivo da Compreensão em Matemática*. IN: Machado, Silvia Dias Alcântara (org.). Aprendizagem em Matemática: registros de representação semiótica- Campinas, São Paulo. Papirus, pp. 11-33, 2003.

GOULART, J. B. *O estudo da equação $Ax^2+By^2+Cxy+Dx+Ey+F=0$ utilizando o software grafeq:* Uma proposta para o Ensino Médio. 2009. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio Grande do Sul- UFRGS. RS.

GRAVINA, M. A. e SANTAROSA, L. M. *A aprendizagem da Matemática em ambientes informatizados.* IV Congresso RIBIE, Brasília 1998.

PAVANELLO, M.R e ANDRADE, R. N. G. *Formar professores para ensinar Geometria : Um desafio para as licenciaturas de Matemática.*2002. Disponível em: <www.fe.unb.br/sbem-df www.sbem.com.br > Acesso em 15 out. 2009.

SANTOS, R, S. *Tecnologias digitais na sala de aula para a aprendizagem de conceitos de Geometria Analítica:* Manipulações no software Grafeq. 2008. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). UFRGS. Porto Alegre. RS.

SOARES, M.A.S. *Os números racionais e os registros de representação semiótica:* análise de planejamentos das séries finais do ensino fundamental. 2007. Dissertação(Mestrado em Educação nas Ciências) Universidade do Noroeste do Estado do Rio Grande do Sul- UNIJUÍ. RS.