OPERAÇÕES ARITMÉTICAS COM NÚMEROS NATURAIS EM SISTEMAS DE NUMERAÇÃO DE BASES DISTINTAS COMO RECURSO DE COMPREENSÃO DESTAS OPERAÇÕES NO SISTEMA DECIMAL

Mariane Ocanha
Acadêmica– UFMS
mocanha@hotmail.com
Juliana Alencar da Silva
Acadêmica– UFMS
girl_a57@hotmail.com
Kelly Maira Amaral Soares
Acadêmica– UFMS
kelly_mairaas@hotmail.com
Osmar Jesus Macedo
Docente Orientador – UFMS
ojmacedo@gmail.com

Resumo

As operações aritméticas básicas, ensinadas aos alunos já nas séries iniciais do ensino fundamental, formam o alicerce para o estudo de matemática em todas as suas áreas, tais como geometria, álgebra, cálculo, estatística e demais aplicações. Analisando, assim, a estrutura de conteúdos de matemática ensinados no ensino fundamental e médio, proposta nos Referenciais Curriculares da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino do Estado de Mato Grosso do Sul, verifica-se que as já mencionadas operações aritméticas básicas são trabalhadas no contexto do sistema de numeração posicional de base dez. Este trabalho apresenta a alternativa de resgatar conceitos teóricos que justificam a construção de um sistema de numeração posicional numa base diferente da base dez. O objetivo é compreender a estrutura conceitual dos algoritmos matemáticos utilizados nas operações adição, subtração, multiplicação e divisão de números naturais. Nas séries iniciais do ensino fundamental, geralmente, os professores trabalham o sistema de numeração de base dez associando o conceito de número com objetos familiares aos estudantes. Em seguida trabalha-se a história da representação dos números durante o desenvolvimento da humanidade. Em seguida, é apresentado aos alunos o conceito de agrupamento de dez em dez, muitas vezes utilizando o material dourado, para introduzir os fundamentos do sistema de numeração de base dez, o que permite o início das operações matemáticas por meio de problemas. Enfim, como sugestão didática e metodológica, propõe-se neste trabalho que nas séries finais do ensino fundamental, seja trabalhada a construção de sistemas de numeração de diferentes bases com o intuito de se alcançar a plena compreensão dos algoritmos das operações aritméticas básicas no sistema de numeração de base dez.

Palavras-chave: Sistemas de Numeração; Material Didático; Base de um Sistema

Introdução

O Programa Nacional do Livro Didático, implantado pelo Governo Federal desde 1985, distribui gratuitamente livros didáticos para todos os alunos do ensino fundamental das escolas públicas de Mato Grosso do Sul. Essa política induz o professor a selecionar conteúdos apresentados no livro didático adotado pela escola, que atende os parâmetros curriculares propostos pela Secretaria de Estado de Educação.

Com o objetivo de contemplar as orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, um grande número de autores de livros didáticos de matemática tem abordado o tópico “sistema de numeração” a partir de uma visão histórica do desenvolvimento das civilizações, passando pela representação primitiva dos números até chegar ao sistema de numeração decimal atual.

O trabalho desenvolvido durante o ensino fundamental na disciplina de matemática não tem sido suficiente para que os alunos consigam obter a compreensão plena dos fundamentos teóricos envolvidos no sistema de numeração decimal, apesar de dominarem os algoritmos utilizados nas operações básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão. Essa verificação é fácil de ser constatada nas avaliações institucionais realizadas pelo Ministério da Educação e Secretarias de Estado de Educação ou simplesmente perguntando aos alunos do ensino médio o que eles entendem por: “vai um na adição e multiplicação”, “empresta um na subtração” ou pelo arco que se utiliza sobre o dividendo na operação de divisão.

Neste contexto, os alunos do PIBID – Matemática da Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Campus de Três Lagoas – CPTL/UFMS, desenvolveram um projeto com o objetivo de trabalhar as operações aritméticas básicas utilizando-se do conceito teórico da construção de um sistema de numeração em diferentes bases.

Para tanto, fixa-se uma base para o sistema de numeração e, compreendido a sua aplicação na representação de números, simplifica-se a compreensão dos algoritmos empregados nas operações aritméticas.

Após este estágio do estudo, fica fácil discutir com os alunos o porquê do sistema de numeração de base dez ter sido adotado como o sistema padrão na representação dos números.

O material didático desenvolvido pelos acadêmicos do Grupo PIBID – Matemática CPTL/UFMS – conforme descrito em Ocanha et al. (2011), facilita a apresentação dos conceitos teóricos que conduzem aos algoritmos empregados nas operações aritméticas.

Com os "Kits" que compõem esse material didático, é possível mostrar na prática como os números, representados em diferentes bases, são trabalhados pelas operações aritméticas básicas.

Ao final dessa experiência, ficam evidentes as vantagens proporcionadas pelo sistema decimal, tanto na representação dos números e quanto na execução das contas.

Referencial Teórico e Metodológico

De acordo com Miyaschita (2002), na antiguidade, o processo de contagem era realizado de maneira intuitiva, já que os homens daquela época necessitavam apenas de uma noção de quantidade para administrarem a produção de alimentos, o pastoreio e a agricultura. Por esta razão, não ocorreu o desenvolvimento imediato de um sistema de numeração que pudesse resolver definitivamente os problemas matemáticos da época.

> "O registro das contagens era feito com pedrinhas, marcas na madeira ou na areia, com nós em corda ou com os dedos das mãos, entre outras formas." (CARMO, 2009, p. 21)

No decorrer do tempo, o desenvolvimento social e cultural dos povos fez surgir técnicas de representação baseadas no conceito de sistemas posicionais e não posicionais.

Os sistemas de numeração com base na posição dos algarismos significaram um grande avanço na ciência matemática por favorecerem o processo de cálculo com os números.

Se na representação de um número natural, cada algarismo da representação tem como valor relativo o seu produto por 10^{n-1}, onde n é o valor da posição do algarismo na representação do número, contado da direita para a esquerda, o sistema utilizado é chamado de sistema de numeração decimal.

O sistema decimal foi adotado pela atual civilização por apresentar as melhores propriedades aritméticas, o que facilitou a obtenção de algoritmos específicos para cada uma das operações básicas do cálculo.

A base de um sistema é definida como sendo a quantidade de algarismos disponíveis para a representação dos números.

Generalizando, pode-se representar uma quantidade N qualquer de objetos, numa base b (b >1) dada, do seguinte modo: $N_b=a_nb^n+ \ldots + a_2b^2+a_1b^1+a_0b^0$ com $a_i \in \{0,1,2, \ldots,b-1\}$ e $n \in N$.

Dados dois números naturais, N_1 e N_2 representados na base b na forma: $N_{1b} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b^{n-i}$ e $N_{2b} = \sum_{i=0}^{p} c_{n-i}b^{n-i}$, com a_i e $c_i \in \{0,1,2, \ldots,b-1\}$, $p \leq n$, $a_n \neq 0$ e $c_p \neq 0$.

A operação adição é definida como:

$$N_{1b} + N_{2b} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b^{n-i} + \sum_{i=0}^{p} c_{n-i}b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-p+1} a_{n-i}b^{n-i} + \sum_{i=n-p}^{n}(a_{n-i} + c_{n-i})b^{n-i}.$$

Se ocorrer $(a_j + c_j) > b-1$, para algum j=0,1, 2, ..., p, será necessário realizar novos reagrupamentos para poder obter a soma escrita da forma:

$$Total_b = N_{1b} + N_{2b} = \sum_{i=0}^{m} t_{m-i}b^{m-i}, \text{ com } t_j \in \{0,1,2, \ldots,b-1\},\ j=0,1,2,\ldots,m.$$

A subtração entre N1 e N2 é definida da forma:

$$N_{1b} - N_{2b} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b^{n-i} - \sum_{i=0}^{p} c_{n-i}b^{n-i} = \sum_{i=0}^{n-p+1} a_{n-i}b^{n-i} + \sum_{i=n-p}^{n}(a_{n-i} - c_{n-i})b^{n-i}.$$

Se ocorre $a_j < c_j$, para algum j=1, 2, ..., p, será necessário realizar novos desagrupamentos para se chegar na diferença:

$$Diferença_b = N_{1b} - N_{2b} = \sum_{i=0}^{m} d_{n-i}b^{n-i}, \text{ com } d_j \in \{0,1,2, \ldots,b-1\},\ j=0,1,2,\ldots,n.$$

A operação multiplicação no conjunto dos números naturais deve ser vista como uma adição, pois, multiplicar o número N_1 por N_2, significa que N_1 deve ser somando N_2 vezes.

A operação divisão de N_1 por N_2, onde N_1 e N_2 são números naturais, é definida por $N_{1b}=Q_bN_{2b}+R_b$, onde Q_b e R_b são números naturais e $R_b<N_{2b}$. No processo de divisão, para se obter um algoritmo é preciso olhar o divisor N_2 como unidades e o dividendo N_1 como $N_{1b} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i}b^{n-i}$ e seguir os seguintes passos:

1º Passo: verifica se há possibilidade de repartir pelo menos um b^n para cada unidade de N_2.

2º Passo: No caso afirmativo, no passo anterior, obtém-se o valor $q_n b^n$ no quociente, tal que $q_n b^n N_2 \leq a_n b^n$ e $(q_n b^n N_2 - a_n b^n) = r_n b^n < N_2$.

3º Passo: No caso negativo, no 1º Passo, o número $N_{1b} = \sum_{i=0}^{n} a_{n-i} b^{n-i}$ deve ser reescrito da forma:

$$N_{1b} = a_n.b.\,b^{n-1} + a_{n-1}b^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} a_{n-i}b^{n-i} = (a_n.b + a_{n-1})b^{n-1} + \sum_{i=2}^{n} a_{n-i}b^{n-i}.$$

4º Passo: verifica se há possibilidade de repartir pelo menos um b^{n-1} para cada unidade de N_2.

5º Passo: No caso afirmativo, no passo anterior, obtém-se o valor $q_{n-1}b^{n-1}$ no quociente que atenda as propriedades apresentadas no 2º Passo substituindo n por n-1.

6º Passo: No caso negativo, no 4º Passo, procede-se como no 3º Passo para obter a maior potência de b com expoente n-2 e passa para o 4º Passo.

Esta sequência de passos deve ser seguida até se encontrar os números naturais Q_b e R_b, com $R_b < N_{2b}$ tais que, $N_{1b} = Q_b N_{2b} + R_b$.

Na Escola Estadual Fernando Corrêa de Três Lagoas – MS, os professores do ensino fundamental adotaram o livro didático como auxílio pedagógico. Os livros Carmo (2007) e Carmo (2009), utilizados pelos professores da escola, apresentam o sistema de numeração de base dez associando o conceito de número com objetos que os estudantes já conhecem. Em seguida, faz-se referência à parte histórica da representação dos números durante o desenvolvimento da humanidade e, por fim, apresenta-se o conceito de agrupamento de dez em dez, utilizando o material dourado, para introduzir os fundamentos do sistema de numeração de base dez, o que permite o início das atividades envolvendo operações matemáticas. A proposta destes autores segue as orientações da metodologia construtivista.

Atividades Desenvolvidas

A pesquisa sobre os sistemas de numeração posicionais e não posicionais desenvolvida pelos bolsistas acadêmicos do PIBID-Matemática/CPTL/UFMS propiciou-lhes a capacidade de produzir um material didático que pode auxiliar no ensino de sistemas de numeração de base dez.

Os Kits desenvolvidos possibilitam o trabalho com operações aritméticas nas bases dois, três, quatro e dez, de acordo com Ocanha et al. (2011).

Botões ou sementes podem ser usados como recursos na representação das quantidades envolvidas nas operações aritméticas no momento da utilização do material didático.

Por exemplo, no problema de somar as quantidades doze e oito, explorando a base dois, é preciso inicialmente escrevê-los na base dois. Para tanto, pode-se usar as caixas contidas nos Kits.

Tomando doze e oito botões, e considerando a existência de apenas dois algarismos na base dois, 0 e 1, faz-se a representação destas quantidades agrupando-os de dois em dois nas caixas do kit de menor dimensão. Ao final do agrupamento, verifica-se que não sobram botões fora de tais caixas. Portanto, o valor da unidade de ambas as quantidades, doze e oito, deve ser representada pelo algarismo 0.

Nesse processo, os doze e os oito botões produzem, respectivamente, seis e quatro grupos ou caixas contendo dois botões cada. Não sendo possível representar o “seis” e o “quatro” nesta base, deve-se obter então novos grupos contendo quatro botões, ou seja, colocam-se caixas pequenas de duas em duas em caixas de dimensão imediatamente maior.

Em ambos os casos não sobram grupos ou caixas contendo dois botões. Então, na primeira potência de dois, utiliza-se o algarismo 0 novamente.

Nessa etapa têm-se, respectivamente, três e dois grupos de quatro botões, ou seja, têm-se três e duas caixas contendo duas caixas menores com dois botões cada.

Mais uma vez, não sendo possível representá-los com os algarismos disponíveis, faz-se um novo agrupamento, agora de oito em oito botões, utilizando caixas de dimensões maiores.

O resultado final para a representação do doze na base dois é obtido por meio de um grupo de oito, um grupo de quatro, zero grupo de dois botões e zero unidade. Assim, $12_{10}=1100_2$. E a representação do oito na base dois é obtida por meio de um grupo de oito, zero grupo de quatro, zero grupo de dois botões e zero unidade, de modo que, $8_{10}=1000_2$.

O algoritmo para adicionar esses dois números, 1100_2 e 1000_2, é análogo ao utilizado na operação adição no sistema de numeração de base dez, ou seja,

$12_{10}+8_{10}=1100_2+1000_2=(1.2^3+1.2^2+0.2^1+0.2^0)+(1.2^3+0.2^2+0.2^1+0.2^0)=$
$=(1+1).2^3+(1+0).2^2+(0+0).2^1+(0+0).2^0=(2).2^3+(1).2^2+(0).2^1+(0).2^0=$
$=1.2^4+0.2^3+1.2^2+0.2^1+0.2^0 = 10100_2= 20_{10}.$

Esse algoritmo justifica a tradicional adoção do "armar e efetuar" a operação adição:

$$\begin{array}{r} 1100_2 \\ +1000_2 \\ \hline 10100_2 \end{array}$$

Se a intenção for subtrair oito de doze, o algoritmo passa a ser:
$12_{10}-8_{10}=1100_2-1000_2=(1.2^3+1.2^2+0.2^1+0.2^0) - (1.2^3+0.2^2+0.2^1+0.2^0)=$
$=(1-1).2^3+(1-0).2^2+(0-0).2^1+(0-0).2^0=(0).2^3+(1).2^2+(0).2^1+(0).2^0= 0.2^3+1.2^2+0.2^1+0.2^0 =$
$=1.2^2+0.2^1+0.2^0 =100_2= 4_{10}.$

Ou ainda,

$$\begin{array}{r} 1100_2 \\ -1000_2 \\ \hline 0100_2 \end{array}$$

Multiplicar oito por doze é somar o doze oito vezes, assim:

$$8_{10}.12_{10} = 1000_2.1100_2 = \underbrace{1100_2 + \cdots + 1100_2}_{8\text{ vezes}} =$$

$$\underbrace{= (1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0) + \ldots + (1.2^3 + 1.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0)}_{8\,vezes} =$$

$$= (1+1+1+1+1+1+1+1).2^3 + (1+1+1+1+1+1+1+1).2^2 + (0+0+0+0+0+0+0+0).2^1 + (0+0+0+0+0+0+0+0).2^0 =$$

$$= (2+2+2+2).2^3 + (2+2+2+2).2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 =$$

$$= (1+1+1+1).2^4 + (1+1+1+1).2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 =$$

$$= (2+2).2^4 + (2+2).2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 =$$

$$= (1+1).2^5 + (1+1).2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 =$$

$$= (2).2^5 + (2).2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 =$$

$$= 1.2^6 + 1.2^5 + 0.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 0.2^1 + 0.2^0 = 1100000_2 = 96_{10}.$$

Os procedimentos acima podem ser simplificados da seguinte forma:

$$
\begin{array}{r}
1100_2 \\
x1000_2 \\
\hline
0000 \\
0000+ \\
0000 \\
1100 \\
\hline
1100000_2
\end{array}
$$

Para a operação divisão, considere como exemplo o trinta como dividendo e o seis como divisor.

A operação divisão quando considerada na base dez, se diferencia das demais operações, pois não se inicia a repartição pela unidade e sim pelo algarismo de maior valor relativo.

No exemplo adotado, deve-se iniciar a divisão repartindo as três dezenas. Mas não é possível distribuir ao menos uma dezena para cada uma das seis unidades do divisor, por esta razão, é necessário olhar para as três dezenas como trinta unidades, e assim a divisão se tornará possível (observação: este procedimento justifica o habitual uso de um arco unindo o três com o zero).

De modo análogo se opera a divisão nos sistemas de numeração de base diferente de dez.

Por exemplo, na base três o número trinta e o número seis são representados por 1010_3 e 20_3, respectivamente.

Para dividir 1010_3 por 20_3, o ponto de partida é considerar o divisor como seis unidades.

Analisando o número $1010_3=1.3^3+0.3^2+1.3^1+0.3^0$, observa-se que não é possível distribuir um grupo de 3^3 para cada unidade do divisor. Portanto, é preciso reescrever 1010_3 como $(1.3).3^2+0.3^2+1.3^1+0.3^0=(3).3^2+1.3^1+0.3^0$ e novamente se verifica a impossibilidade de distribuir pelo menos um grupo de 3^2 para cada unidade do divisor.

Então, reescrevendo o número 1010_3 na forma $(3).3^2+1.3^1+0.3^0=$ $(3.3).3^1+1.3^1+0.3^0=(10).3^1+0.3^0$ observa-se que agora é possível distribuir um grupo de 3^1 para cada unidade do divisor e ainda sobram quatro grupos de 3^1 que somados aos 0.3^0 tem-se $(4).3^1+0.3^0=(12)+0.3^0=(12)$ unidades.

Para finalizar, divide-se 12 unidades por seis distribuindo duas unidades para cada unidade do divisor. Logo,

$$30_{10} \div 6_{10} = 1010_3 \div 20_3 = 12_3 = 5_{10}.$$

No esquema de chaves a operação pode ser armada e efetuada assim:

$$\begin{array}{r|l} \widehat{101}0_3 & 20_3 = \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \cline{2-2} -20 & 12_3 \\ \cline{1-1} 110 & \\ -110 & \\ \cline{1-1} 000 & \end{array}$$

As quatro operações definidas acima foram apresentadas em forma de oficina aos professores do ensino fundamental, aos alunos do ensino médio da Escola Estadual Fernando Corrêa e aos acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática - CPTL/UFMS, utilizando os materiais didáticos, chamados de Kit Sistemas de Numeração.

Análise e Resultados Obtidos

A teoria que fundamenta um sistema de numeração posicional de base b>1 qualquer possui uma notação muito rígida, porém, apesar do forte apelo à abstração algébrica para definir as operações básicas de aritméticas, o aluno precisa compreendê-la.

Com as caixas que compõe os Kits é possível visualizar na prática o significado da notação utilizada para definir a representação de um número numa base particularmente escolhida. Além disso, as quatro operações aritméticas básicas podem ser realizadas utilizando os Kits independentemente da base escolhida para a representação das quantidades envolvidas nestas operações.

A experiência mostrou-se eficaz, ao final das oficinas os participantes foram capazes de representar uma mesma quantidade utilizando-se de diferentes bases e de realizar as quatro operações estudadas, utilizando as caixas dos Kits para realizar os processos de agrupar e desagrupar necessários. Após o exercício com o material didático, professores e alunos foram capazes de resolver operações aritméticas com números representados em diferentes bases sem o auxílio dos Kits.

Conclusões

Os participantes das oficinas realizadas, ao conhecerem o processo realizado nas operações aritméticas, mostraram-se mais motivados após compreenderem o que faziam desde a infância. Conclui-se, portanto, que os Kits de Sistemas de Numeração se mostraram eficientes na tarefa de relacionar a prática com a teoria. Por fim, os acadêmicos do curso de Licenciatura de Matemática do Campus de Três Lagoas puderam, com a experiência vivenciada, fazer uma analogia com os conteúdos estudados na disciplina de álgebra.

Referências

BRASIL, Secretaria de Educação Média e Tecnológica/MEC. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio**: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2006.

____, **Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais:** Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília, 2002.

____, **PCN. Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Brasília, 1999.

CARMO, C. **Matemática com Alegria**: 4º Ano**.** Curitiba. Editora Positivo, 2009, 336 p.

______ . **Matemática com Alegria –** 2º Ano**.** Curitiba. Editora Positivo, 2008, 304 p.

OCANHA, M. et al. Sistema de Numeração em Diferentes Bases. In: II ENCONTRO DO PIBID – UFMS, 2011, Campo Grande – MS. **Anais II Encontro do PIBID – UFMS,** 2011, p. 37 – 46. Disponível em: < http://www.pibid.ufms.br/Anais_II_Encontro.pdf>. Acesso em: 22 jun. 2012.

MATO GROSSO DO SUL. Secretaria de Estado de Educação. **Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino:** Ensino Fundamental. Campo Grande, 2012, Versão Preliminar, 360 p. Disponível em: < http://intra.sed.ms.gov.br/portal/Arquivos/Publicos/referencial_curricular_completo_ensino_fundamental_VERSAO_PRELIMINAR.pdf >. Acesso em: 25 jun. 2012.

______. **Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino:** Ensino Médio. Campo Grande, 2012, Versão Preliminar, 263 p. Disponível em: < http://intra.sed.ms.gov.br/portal/Arquivos/Publicos/Referencial%20Curricular_Ensino%20M%C3%A9dio_2012_ok2.pdf >. Acesso em: 25 jun. 2012.

______. **Referencial Curricular da Educação Básica da Rede Estadual de Ensino:** Ensino Médio. Campo Grande, 2004, 150 p.

MIYASCHITA, W. Y. **Sistemas de Numeração: Como Funcionam e como são estruturados os números**. 2002, UNESP-Bauru-SP. Disponível em: http://wwwp.fc.unesp.br/~mauri/TN/Sist Num.pdf. Acesso em: 20/10/2011.