EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UM VIÉS HISTÓRICO PARA INTRODUZIR ESTRATÉGIAS DE RESOLUÇÃO EM PROBLEMAS DE INDETERMINAÇÃO LINEAR

Wagner Marcelo Pommer
Pós-Graduando/Faculdade de Educação da USP
wmpommer@usp.br

Resumo

Este artigo visa discutir a relevância na utilização de situações-problema envolvendo tópicos da teoria dos Números no ciclo básico, enfatizando aspectos da origem e desenvolvimento histórico/epistemológico das Equações Diofantinas Lineares. Na parte metodológica foram investigados problemas de indeterminação linear que surgiram no percurso da História da Matemática. A análise deste material revelou um potencial didático para introduzir estratégias de resolução que valorizam aspectos da teoria Elementar dos Números, numa articulação entre aspectos aritméticos e algébricos, que contribuem ao ensino da matemática pela possibilidade de compreensão do papel das estratégias algébricas como otimizadoras de problemas de indeterminação linear.

Palavras-chave: Equações Diofantinas Lineares; Estratégias de resolução; Problemas de Indeterminação Linear.

Introdução

No ensino médio raras são as oportunidades de explorar problemas envolvendo números inteiros. O currículo de matemática do Ensino Fundamental insere tópicos da Teoria Elementar dos Números abordando os números naturais e inteiros. Porém, após a apresentação destes tópicos, eles são raramente re-utilizados no decorrer dos estudos do próprio ciclo fundamental e, posteriormente, no ensino médio.

No ensino básico, é fundamental vincular a aprendizagem de matemática a expressão e argumentação do aluno em diferentes linguagens (natural, numérica, algébrica, gráfica), dentre outras, assim como resolver situações e tomar decisões que extrapolem a capacidade do âmbito original, examinando e vislumbrando outras possibilidades de enfrentamento dos contextos e possibilitando outros pontos de vista, atos destacados pela proposta do ENEM (BRASIL, 2009).

Campell; Zazkis (2002) destacam o contexto dos números inteiros presente na Teoria dos Números como propício para se desenvolver estratégias sem necessariamente recorrer a algoritmos, favorecendo a interpretação dos enunciados e o desenvolvimento de conjecturas. Os autores apontam que dentre as diversas possibilidades, é extremamente importante o uso da estratégia da tentativa e erro, a verificação direta através de cálculos numéricos mentais ou por escrito, o uso de propriedades e conceitos dos números, de modo a possibilitar que os objetos a serem estudados façam sentido ao aluno, incentivando o desenvolvimento e a valorização de heurísticas[1].

Um aspecto importante da Teoria dos Números, para Maranhão;Machado;Coelho (2005), é a possibilidade de ser trabalhada de modo articulado e complementar com a Álgebra, pois são campos que historicamente se entrelaçaram, permitindo que se formulem questões cuja solução completa requer manejo de conceitos de forma integrada.

Um tema apontado por Campell;Zazkis (2002) como favorecendo tal entrelaçamento são as equações diofantinas[2]. Em particular, neste estudo focamos as equações diofantinas lineares[3], num quadro de resolução de reutilização de conceitos de múltiplos e divisores, assim como pela possibilidade de exploração de diferentes estratégias de resolução de problemas.

Existem questões interessantes e simples envolvendo números inteiros, não usualmente abordadas na Escola Básica, pois geralmente são resolvidas no conjunto dos números reais e ajusta(m)-se a(s) solução(ões) particular(es) para os números inteiros.

Para melhor compreensão destes aspectos, este texto almeja realizar uma abordagem histórica do objeto matemático equação diofantina linear, delineando um breve percurso histórico para evidenciar a origem e desenvolvimento, através da utilização da resolução de problemas como recurso didático para introduzir estratégias de resolução que valorizem aspectos da teoria Elementar dos Números.

---

[1] Segundo Pozo (1998), procedimentos heurísticos ou estratégias são planos e metas desenvolvidas pelos alunos que os guiam, de forma global, à busca de solução de problemas.

[2] A equação diofantina é definida como uma equação algébrica com uma ou mais incógnitas e coeficientes inteiros, para a qual são buscadas soluções inteiras.

[3] A equação diofantina linear a duas incógnita é uma equação algébrica da forma $ax+by=c$, com $a, b, c \varepsilon Z$ e soluções inteiras.

Diofanto e o desenvolvimento das equações lineares indeterminadas

Diofanto, um matemático grego do século II a.C. que viveu em Alexandria, escreveu o livro *Arithmetica*, teve uma influência peculiar no desenvolvimento das equações diofantinas.

Encontramos em Boyer (1973) e Rocque & Pitombeira (1991) menção de que as obras de Diofanto representaram um novo ramo, com metodologia e estilo próprio e, em certa medida, estranho ao modo de pensar dos gregos antigos.

Diofanto utiliza explicitamente um símbolo para a incógnita (ζ), porém sua problemática aparentemente segue a tradição clássica grega, ao estilo de Thales, Pitágoras e Euclides[4]. Este dúbio aspecto se faz presente, ao serem encontrados muitos problemas abordados em Diofanto com motivação geométrica, porém a forma de resolvê-las não faz uso da Geometria (estilo que hoje é denominado de Álgebra Geométrica), a moda clássica grega, mas utiliza palavras e manipulações algébricas.

Outro aspecto aparentemente grego da obra de Diofanto se refere ao trabalho com números inteiros. Diofanto resolve casos particulares envolvendo equações. Assim:

> O aspecto algébrico da obra de Diofanto é o pioneirismo em que as soluções são encontradas para um problema particular e, com o correr da exposição, vão se acumulando regras de manipulação de equações, algumas altamente engenhosas, dependendo de artifícios sutis que demonstram a grande capacidade de seu autor (LINTZ, 1999, p. 365).

A obra de Diofanto contém uma maior proximidade com a álgebra babilônica e se afasta da metodologia grega. Porém, uma diferença fundamental é que enquanto os:

> (...) babilônios se ocupavam principalmente com soluções aproximadas de equações determinadas (...), [a obra de] Diofanto de Alexandria é quase toda dedicada à resolução exata de equações, tanto determinadas como indeterminadas (BOYER, 1973, p. 132).

Lins&Gimenez (2005) apontam que *A Arithmetica,* de Diofanto, é uma coletânea de cerca de 150 problemas resolvidos de álgebra, onde técnicas diversas iam

[4] Struik (1992) ressalta que o raciocínio algébrico, em Euclides, é feito numa forma geométrica.

sendo introduzidas, envolvendo equações subdivididas em dois grupos: as determinadas e as indeterminadas ou diofantinas.

Porém, "não é feita uma distinção clara entre problemas determinados e indeterminados, e mesmo para os últimos, para os quais o número de soluções é geralmente infinito, uma só resposta é dada" (ROCQUE; PITOMBEIRA, 1991, p. 46).

Um mérito de Diofanto de Alexandria foi utilizar algumas abreviações introduzindo um tipo de simbolismo algébrico para as incógnitas, porém sem utilizar uma notação algébrica sofisticada.

Segundo Milies&Coelho (2003), Diofanto procurava soluções inteiras ou racionais não negativas em equações indeterminadas, atualmente designadas como equações diofantinas. As equações diofantinas são expressões na forma polinomial onde são procuradas todas as soluções no âmbito do conjunto dos inteiros.

Zerhusen; Rakes; Meece (2005) destacam que *A Arithmetica* não contém problemas envolvendo as equações indeterminadas de primeiro grau, por que Diofanto não lhes atribuía qualquer importância. Porém, as equações indeterminadas lineares são designadas como equações diofantinas lineares, em homenagem póstuma a Diofanto.

Os problemas de indeterminação linear: Um capítulo envolvendo História & Estratégias.

Segundo Dias (2000), problemas de indeterminação linear apareceram na civilização hindu, em Aryabhata, matemático que viveu em cerca de 500 d.C. Porém, foi Brahmagupta, que viveu em 628 d.C., na Índia central, que teve a primazia em propor um método para encontrar as soluções gerais das equações diofantinas lineares. Transpondo para uma linguagem mais atual, Brahmagupta:

> (...) foi o primeiro a dar uma solução geral da equação linear diofantina [do tipo] $ax + by = c$, onde *a*, *b* e *c* são inteiros. Para que essa equação tenha soluções inteiras, o máximo divisor comum de *a* e *b* deve dividir *c*; e Brahmagupta sabia que se *a* e *b* são primos entre si, todas as soluções da equação são dadas por $x = p + m.b$ e $y = q - m.a$, onde *m* é um número inteiro arbitrário (BOYER, 1973, p. 161).

Este método é utilizado atualmente na Análise Diofantina, se baseando no algoritmo de Euclides e consiste numa série de reduções. Historicamente permanece o mérito de Brahmagupta por "(...) por ter dado todas as soluções inteiras da equação linear diofantina, enquanto que Diofanto de Alexandria tinha se contentado em dar uma solução particular de uma equação indeterminada" (BOYER, 1973, p. 161).

Os problemas de indeterminação linear podem ser abordados por diferentes estratégias. A seguir apresentamos as resoluções de dois problemas encontrados em textos antigos, analisados com base nas propriedades de tópicos da teoria dos Números.

Em um manuscrito árabe, copiado em cerca de 1200 d.C., mas supostamente com origem anterior a esta data, propõe o seguinte problema 1:

> One duck may be bought for 5 drachmas, one chicken for 1 drachma, and 20 starlings for 1 drachma. You are given 100 drachmas and ordered to buy 100 birds. How many will there be each kind?[5] (ORE, 1988, p. 121).

A abordagem para a procura de soluções recai na modelagem x+ y + z = 100 e 5x + y +z/20= 100 (1), onde x, y e z são os valores de patos, galinhas e estorninhos.

$$(1)\qquad \begin{cases} 5x + y + 0{,}05z = 100 \\ x + y + z = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 100x + 20y + z = 2000 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

$$95x + 19y = 1900 \rightarrow 5x + y = 100$$

Na Análise Diofantina, inicialmente estabelecem-se as condições de contorno, que são: (a) os valores inteiros das incógnitas (ou naturais, caso deste problema); (b) seja conhecido o domínio de pelo menos uma das incógnitas.

O primeiro passo é isolar a incógnita de menor coeficiente: y = 100 – 5x

Como não há coeficientes fracionários, a partir da parametrização elementar y = t e x = 100 -5 t, estuda-se o domínio. Como y ≥ 0, em y = 100 – 5x, então: 100 - 5x ≥ 0 e x ≤ 20, o que delimita os valores de x: 0 ≤ x ≤ 20. Na tabela 1 encontram-se as 21 soluções.

Tabela 1: As vinte e uma soluções do problema 1

[5] Problema 1: Um pato pode ser comprado por 5 dracmas, uma galinha por 1 dracma, e 20 estorninhos por 1 dracma. Você possui 100 dracmas e deseja comprar 100 aves. Quantas aves de cada tipo você pode adquirir?. [Um dracma é uma moeda ou peso da Grécia antiga, e equivalente a 1,772 g].

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
y	100	95	90	85	80	75	70	65	60	55	50	45	40	35	30	25	20	15	10	5	0

Este problema é propício de abordagem no ciclo básico pela quantidade de soluções que restringe o uso da estratégia da tentativa e erro, muito utilizada pelos alunos. Além disso, a proposta deste problema a luz da Análise Diofantina fica viabilizada pela escolha das variáveis didáticas, que restringe o grau de dificuldade, que consideramos adequada para um primeiro contato do aluno com tais tipos de problema.

A seguir, apresentamos a resolução de um problema encontrado num manuscrito redigido na Europa do século X, escrito por Alcuin:

> Problema 2: When 100 bushels of grain are distributed among 100 persons so that each man receives three bushels, each woman two bushels, and each child half a bushel, how many men, women, and children are there?[6] (ORE, 1988, p. 121).

Este problema apresenta maior dificuldade por apresentar três incógnitas e necessita de uma busca de padrão para encontrar as sete soluções naturais:

A equação modelizadora é 3x + 2y + 0,5z = 100 e x + y + z = 100 (2), onde x é o número de homens, y é o número de mulheres e z é o número de crianças. A partir do sistema de duas equações (2) obtém-se uma única equação 5x + 3y = 100.

$$(2)\qquad \begin{cases} 3x+2y+0{,}5z=100 \\ x+y+z=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+4y+z=200 \\ x+y+z=100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x+4y+z=200 \\ x+y+z=100 \end{cases} \qquad \overline{5x+3y=100}$$

Como 5 é divisor de 5 e 100, e por 3 e 5 serem primos entre si, então 5 deve ser divisor de y. Assim, os possíveis valores de y são: y = {0, 5, 10, ...}. O máximo valor possível de y é obtido através da equação 5x+ 3y = 100. Se x for 0, então y = 100/3, o que permite elaborar uma tabela, a partir dos valores de y e calcular os valores de x (tabela 2).

Tabela 2: Cálculo dos valores de 'x' no problema 2

[6] Problema 2: "Quando 100 'bushels' de grãos são distribuídos entre 100 pessoas de modo que cada homem recebe 3 'bushels', cada mulher recebe 2 'bushels', e cada criança recebe metade de um 'bushel', quantos homens, mulheres e crianças haviam?". [Bushel é uma medida de capacidade volumétrica de grãos de cereais, correspondendo a 35,238 litros nos E.U.A. e 36,367 litros na Inglaterra].

x	20	17	14	11	8	5	2
y	0	5	10	15	20	25	30

A partir dos valores dos pares x e y, podem-se calcular os possíveis valores de z.

Tabela 3: As sete soluções do problema 2

x	20	17	14	11	8	5	2
y	0	5	10	15	20	25	30
z	76	78	76	74	72	70	68

Este problema apresenta uma excelente possibilidade de utilização de propriedades dos números - múltiplos, divisores e números primos entre si - que se configura numa estratégia otimizadora, de abordagem acessível a alunos do ciclo básico.

Considerações Finais

A abordagem de problemas indeterminados do tipo linear permite mobilizar uma diversidade de estratégias de resolução, o que viabiliza localizar o âmbito de pertinência, validade e otimização da possível escolha de cada uma delas. Também, estas questões possibilitam a exploração de situações com mais de uma solução, algo não comum nesta faixa de ensino.

Geralmente, os alunos utilizam inicialmente a tentativa e erro como estratégia espontânea, que historicamente se revela como a principal via de acesso para a resolução desses problemas. Isto abre espaço para o aluno buscar outras estratégias, pois os problemas ilustrados apresentam dificuldades diferentes em relação as variáveis escolhidas, possibilitando a evolução de estratégias diversificadas envolvendo conceitos aritméticos como ferramenta facilitadora na busca de soluções inteiras.

O objetivo da abordagem desses tipos de problemas não é aprender o algoritmo para se obter as soluções das equações diofantinas lineares, desprezando as outras estratégias. Pelo contrário, o professor deve valorizar os vários procedimentos e os conhecimentos como ferramenta como meios em relação aos fins, que é a finalidade de propiciar condições ao aluno em dar sentido ao conhecimento. Por estes motivos, não foram apresentados os algoritmos existentes para as equações diofantinas lineares.

Vale salientar que as estratégias apresentadas favorecem o desenvolvimento de competências diversificadas, descritas em Machado (2009), levando em consideração que é possível abordar qualquer assunto nas aulas, desde que respeitando a escala, o âmbito e o projeto de ensino do professor e da escola.

Em síntese, a utilização das equações diofantinas lineares como tema articulador em situações-problema contextualizadas, que foram historicamente se constituindo e que dialeticamente organizaram o próprio conhecimento do assunto em pauta, permitem o desenvolvimento de competências essenciais no ciclo básico, e ainda revitalizando os tópicos usuais do currículo, numa postura de valorização da inter-disciplinaridade, dentro da idéia que o conhecimento é um bem que está cada vez mais vivo na medida em que mais conexões são estabelecidas para favorecer a rede de significados dos temas matemáticos, na própria Matemática, conforme Machado (2004).

Referências Bibliográficas

BRASIL. Alguns historiadores pressupõe que o autor considera que na outras situações numéricas o procedimento é análogo Ministério da Educação. *Matriz de Referência para o ENEM.* Brasília, 2009.

BOYER, C. B. *História da Matemática.* 9. ed. São Paulo: Editora Edgard Blücher, 1974. 488p.

CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: CAMPBELL, S.; ZAZKIS, R. (org.). *Learning and Teaching Number Theory.* London: Ablex Publishing, 2002. Cap. 1. p. 1-14.

KARLSON, P. *A Magia dos Números.* São Paulo: Ed Globo, 1961.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI.* 5. ed. Campinas, SP: Papirus, 2005. 176p.

LINTZ, R. G. *História da Matemática.* Blumenau: Editora FURB. v. 1, 1999. ISBN 85-7114-064-2

MACHADO, N. J. *Conhecimento e Valor.* São Paulo: Editora Moderna, 2004.

_______________. *Educação:* Competência e Qualidade. São Paulo: Escrituras, 2009.

MARANHÃO, M. C. S. A.; MACHADO, S. D. A.; COELHO, S. P. *PROJETO:* O que se entende por Álgebra? Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ORE, O. *Number Theory and Its History.* New York, Dover Publications Inc. 1988.

Cap 6-8, p.116-207.

POZO, J. I. Introdução. In: POZO, J. I. (org). *A Solução de problemas:* Aprender a resolver, resolver para aprender. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-11.

ROCQUE, G. de La ; PITOMBEIRA, J. B. *Uma equação diofantina e suas resoluções.* Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1991. v. 19, p. 39-47.

SÃO PAULO. *Proposta Curricular do Estado de São Paulo:* Matemática/ Ensino Fundamental (Ciclo II) e Médio. São Paulo: SEE, 2008.

STRUIK, D. J. *História Concisa das Matemáticas*. 2. ed. Trad: João Cosme Santos Guerreiro. Lisboa: Gradiva, 1992.