VISUALIZAÇÃO GEOMÉTRICA DE FRAÇÕES ORDINÁRIAS USANDO O *SOFTWARE* GEOGEBRA

Willian Valverde
Universidade Federal do Paraná
willian_valverde@hotmail.com

Daniela Guerra Ryndack
Universidade Federal do Paraná
dani.dep@hotmail.com

Elisangela de Campos
Universidade Federal do Paraná
eliscamposmat@gmail.com

Jaquelini Rocha Simão
Universidade Federal do Paraná
jaquelini.rocha@yahoo.com.br

Michele Pilato
Universidade Federal do Paraná
mihpilato@yahoo.com.br

Resumo
Este trabalho tem por finalidade mostrar uma representação geométrica para o corpo de frações dos inteiros. A partir desta representação é possível identificar e visualizar algumas propriedades dos números racionais, como também compreender, de uma forma diferente da usual, o funcionamento das operações definidas no conjunto. Essa interpretação consiste em representar as frações através de pontos e as classes de equivalência das frações por retas, "passando pela origem", em $\mathbb{Z}^2$. Comparando as retas que representam as classes de equivalências de frações, podemos interpretar geometricamente a adição, oposto da adição, entre outros conceitos relacionando com conceitos geométricos (reta, ponto, simetria, etc.). Por fim, apresentaremos sugestões de atividades que objetivam a aprendizagem dos conceitos envolvidos. Para desenvolver tais atividades, sugerimos a utilização do *software* Geogebra, pois facilita tais construções.

Palavras-chave: Frações Ordinárias; Visualização Geométrica ; Geogebra.

1. INTRODUÇÃO

Participando do PIBIB-Matemática da UFPR tivemos a oportunidade de vivenciar o dia a dia de algumas escolas, durante as observações das aulas de diferentes anos de ensino, notamos que a noção de fração, as operações com números racionais são fonte de dificuldades até mesmo para os alunos do ensino médio. Para elaborarmos uma sequência didática sobre frações estudamos a construção algébrica dos números racionais como corpo de frações de inteiros (Gonçalves, 1999), fizemos uma pesquisa bibliográfica onde foram abordados os tópicos descritos na unidade 2 segundo a luz das definições em ATIYAH e MACDOVALD (1969, p. 36). Também vimos como estes números são apresentados para os alunos analisando livros didáticos (Bigode, 2000; Imenes e Lellis, 2010) e estudamos também alguns trabalhos em Educação Matemática sobre o tema, entre eles destacamos (Merlini, 2005).

Neste estudo nos chamou a atenção às várias formas de representar os números racionais, eles podem ser escritos com a representação usual de frações ordinárias, como decimal, com figuras geométricas e também como pares ordenados, sendo que esta última não é trabalhada no ensino básico.

Embora a representação em par ordenado não seja comum, entendemos que ela pode ser uma boa oportunidade para explorar recursos visuais para a compreensão de conceitos abstratos, como sugere as diretrizes curriculares "...defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados" (DCE, 2008, p.52).

Propomos então, uma interpretação geométrica para os números racionais que são vistos como pontos em um sistema cartesiano e, com isto, os números representados pelas frações ordinárias passam a ser retas "passando pela origem", conforme veremos mais a diante.

Através destas visualizações é possível compreender conceitos como: relação de equivalência entre frações, desigualdade de frações, elementos opostos das operações definidas, soma, MMC, entre outros. Fazendo assim, relações com outros conceitos geométricos como: retas, sistema cartesiano, ângulos, simetria, distância, etc.

Neste trabalho, iremos apresentar sugestões de atividades que deverão ser propostas de modo que os alunos sejam capazes de construir os conceitos envolvidos, estabelecendo relações e observando padrões. Para a realização das mesmas é necessário ter um domínio mínimo das ferramentas do *software* Geogebra ou outro semelhante.

O Geogebra é um *software* livre destinado ao ensino de matemática, encontrado facilmente em sites de busca para *downloads*. Este *software* de geometria permite realizar construções com diversos objetos geométricos (pontos, retas, segmentos, vetores, seções cônicas, entre outros), assim como funções, que podem ser modificadas dinamicamente. Sua característica principal é a ligação entre geometria, álgebra e cálculo diferencial.

De acordo com Mendes (2009, p.113) "a informática, atualmente, é considerada uma das componentes tecnológicas mais importantes para a efetivação da aprendizagem matemática no mundo moderno". Considerando que grande parte dos alunos que temos hoje nas escolas possui considerável intimidade com o universo tecnológico, uma aula que permita a manipulação de um software matemático pode se tornar uma aula mais prazerosa e estimulante.

2. SÍNTESE DA DEFINIÇÃO ALGÉBRICA DE FRAÇÃO

Considere uma fração a/b com a e b $\in \mathbb{Z}$ e b $\neq 0$. Representaremos essa fração algebricamente como um par ordenado (a,b) $\in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$.

Define-se a seguinte relação de equivalência: (a,b) $\equiv (c, d)$ $\Leftrightarrow$ ad=bc. A partir dessa definição de classe de equivalência, temos que (a,b) $\equiv$ (na,nb) $\in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$.

2.1. OPERAÇÕES

Ao definirmos como (a/b) a classe de equivalência de (a,b), podemos definir duas operações em $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$, a adição e a multiplicação. (ATIYAH e MACDONALD, 1969, p. 36)

Sejam (a/b) e (c/d) $\in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$.

2.1.1. ADIÇÃO

(a/b) + (c/d) = (ad + cd/bd) $\in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$

2.1.2. MULTIPLICAÇÃO

(a/b).(c/d) = (ac/bd) $\in \mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$

3. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA

Vimos que uma fração pode ser representada através de um par ordenado (a,b) com a, b $\in \mathbb{Z}$, e b $\neq$ 0. Logo é possível representar as frações como sendo pontos de um sistema cartesiano. Observe algumas frações representadas no plano $\mathbb{Z}^2$, que contém $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$, na Fig. 1.

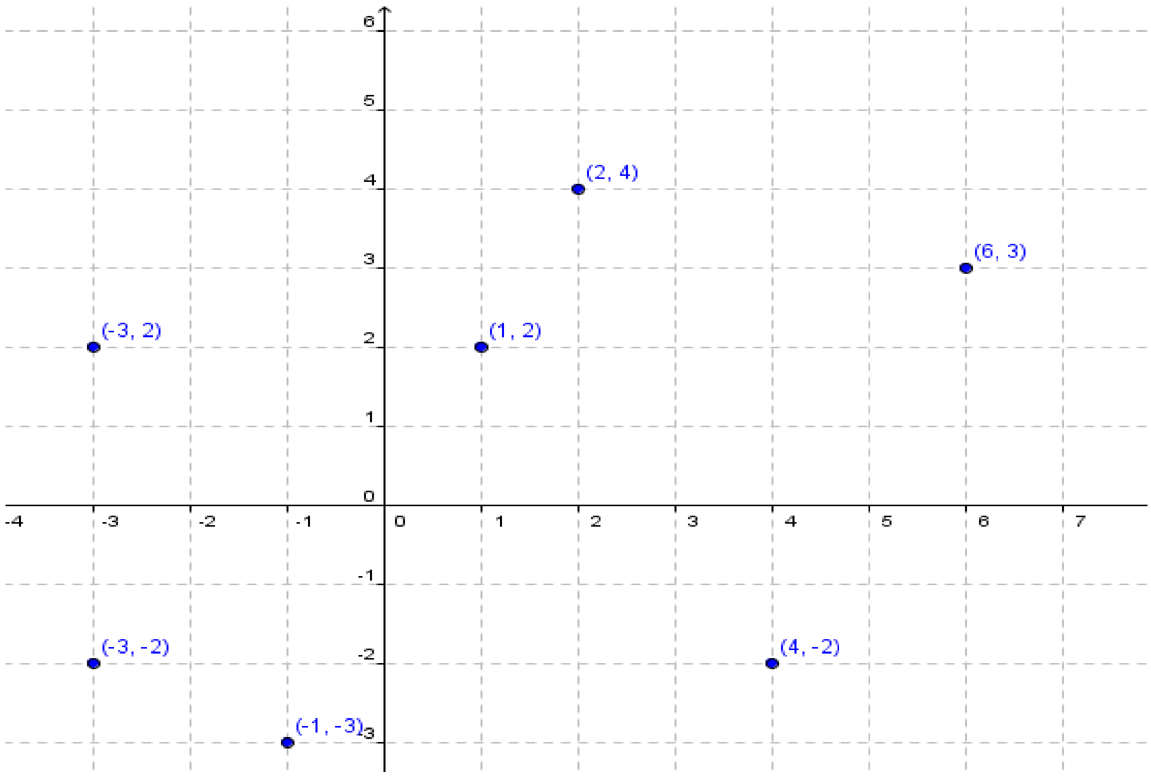

Figura 1- Frações representadas por pontos em um sistema cartesiano.

Se considerarmos uma fração (a,b) simplificada, podemos gerar outras frações da forma (na,nb) com $n \in \mathbb{Z}^*$ que pertencem a mesma classe de equivalência. Se observarmos o conjunto de pontos que satisfaz esta condição, ou seja, que indicam frações de mesma classe de equivalência, nota-se que eles formam uma "reta passando pela origem".

Uma classe de equivalência de frações representa um único número. Como utilizamos pontos para representar cada fração, utilizaremos agora, retas passando pela origem como representações de números racionais, conforme Fig. 2.

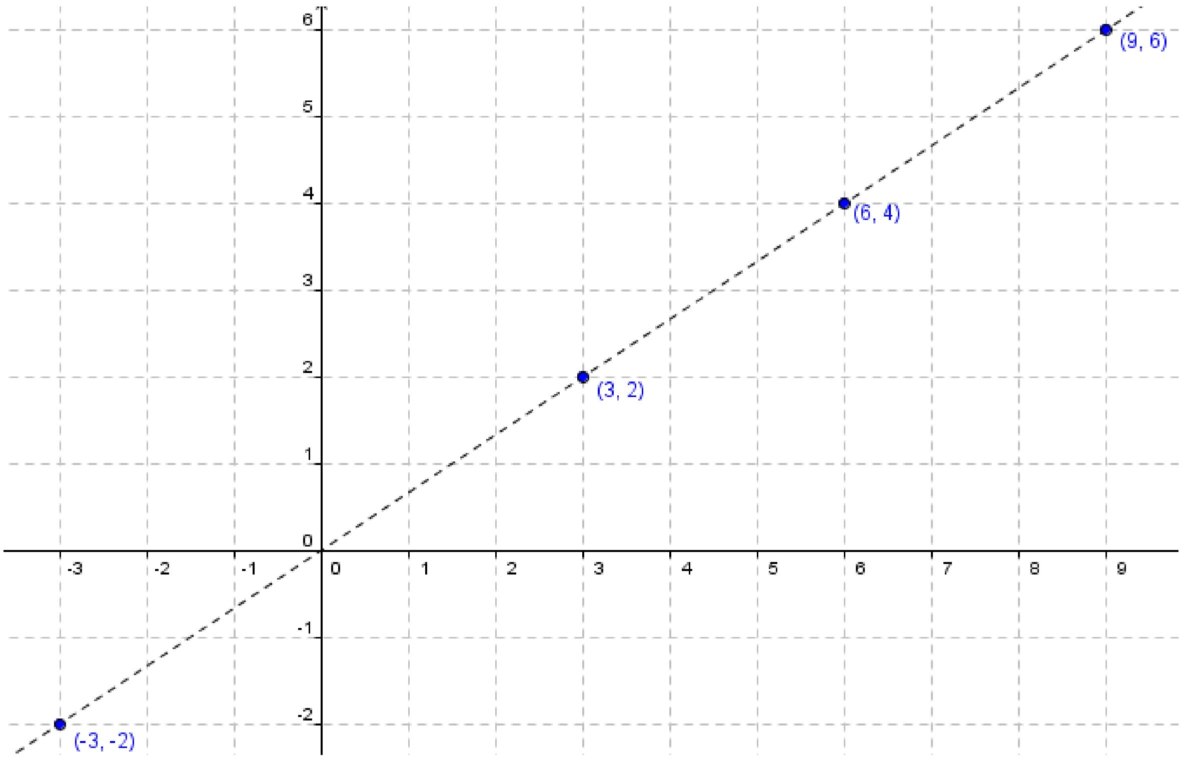

Figura 2- Classe de equivalência da fração (3,2).

3.1. ENTENDENDO A EXPRESSÃO "RETA PASSANDO PELA ORIGEM"

Em $\mathbb{Z}^2$ uma reta é apenas um conjunto de pontos "alinhados". Mas, como abuso de notação, representá-la-emos através de uma reta real.

Conforme podemos observar, esta reta real que liga os pontos das frações equivalentes passa pela origem, mas a fração (0,0) não está definida no corpo das frações. Observe que todas as retas que representam números passam pela origem. Sendo o ponto (0,0) a única interseção entre elas, podemos interpretar a origem com pertencente a todas as retas em questão. Logo não é possível classificá-la como um ponto de uma única reta.

Como essas retas passam pela origem, uma reta que passa pelo primeiro quadrante do sistema cartesiano, passará também pelo terceiro quadrante. Analogamente para o segundo e quarto quadrante.

3.2. VISUALIZANDO A SOMA DE FRAÇÕES

Considere a operação: 1/3 + 3/2

Representando esses números através de retas geométricas, como na Fig. 3:

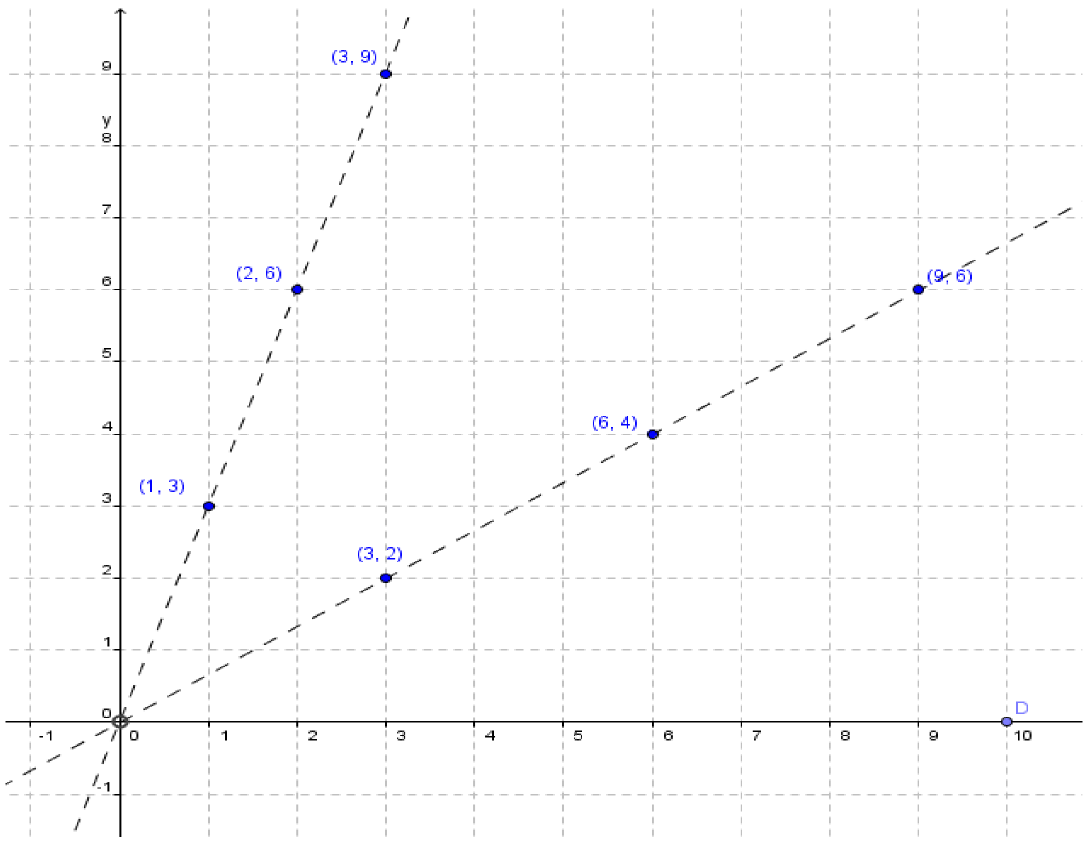

Figura 3- Classes de equivalência de frações distintas.

Observe que a reta horizontal, mais próxima ao eixo horizontal, que intercepta as duas retas em pontos pertencentes à $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}^*$, é a reta que passa pelo ponto (0,6) (Fig. 4).

Note também que 6 é justamente o valor do MMC entre 3 e 2. Podemos então fazer a operação de soma considerando apenas essa nova reta horizontal e os pontos de interseção.

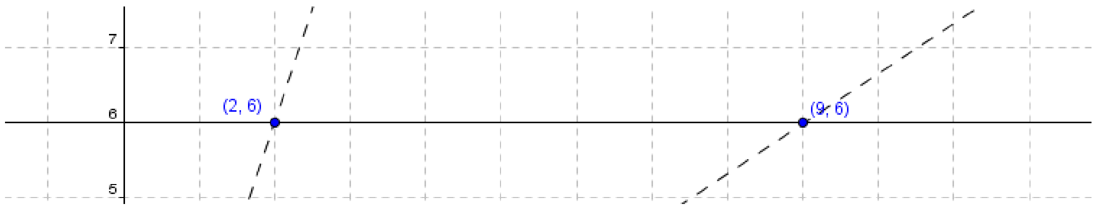

Figura 4- Reta horizontal que intercepta as duas retas.

O primeiro ponto está a uma distância de duas unidades do eixo vertical, enquanto que o segundo ponto está a uma distância de 9 unidades. Somando, temos: 2+9=11(Fig. 5).

Figura 5- Soma na reta horizontal.

Assim, o resultado da operação será representado pela reta que passa pelo ponto (11,6)(Fig. 6).

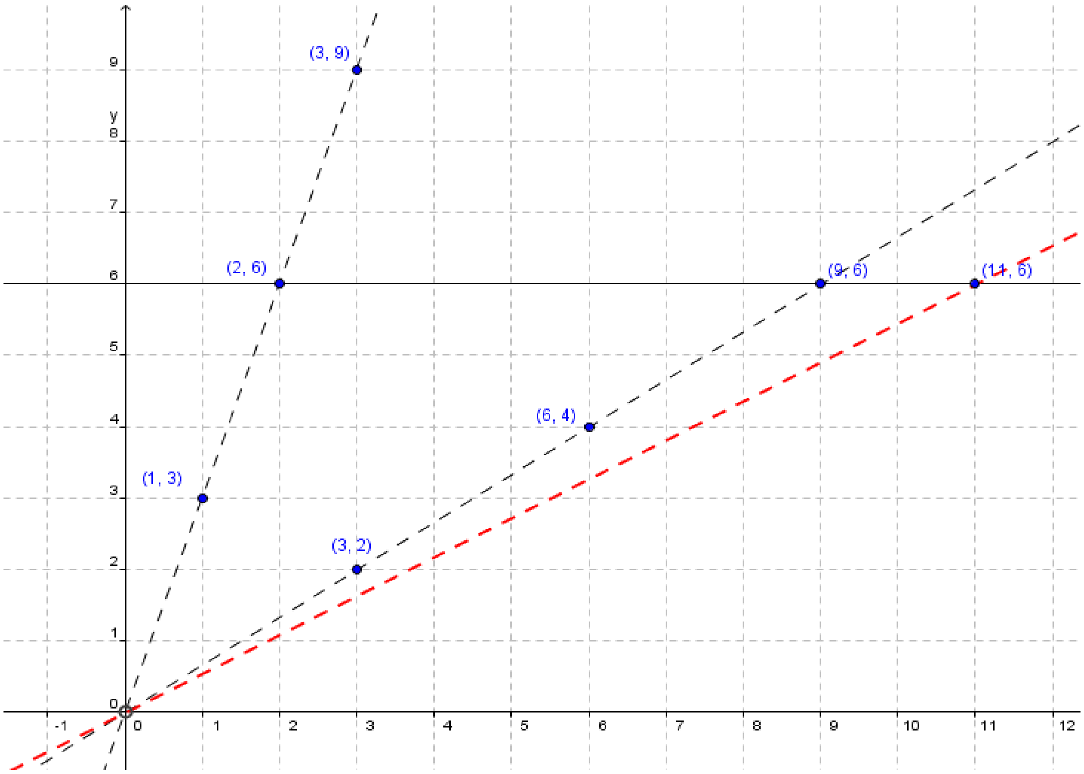

Figura 6- Resultado da soma.

Há outras retas horizontais que interceptam as duas retas, estas têm valor constante para y sendo um múltiplo comum das segundas coordenadas das frações.

3.3. OPOSTO DA SOMA

Como já sabemos algebricamente, dado uma fração (a,b) sua oposta em relação a soma é a fração (-a,b), pois (a,b) + (-a,b) = (0,b) = 0. Note na Fig. 7 que as retas que representam duas frações opostas são simétricas em relação ao eixo y, eixo que representa a fração (0,n) com n em $\mathbb{Z}^*$, o qual é justamente o elemento neutro da soma.

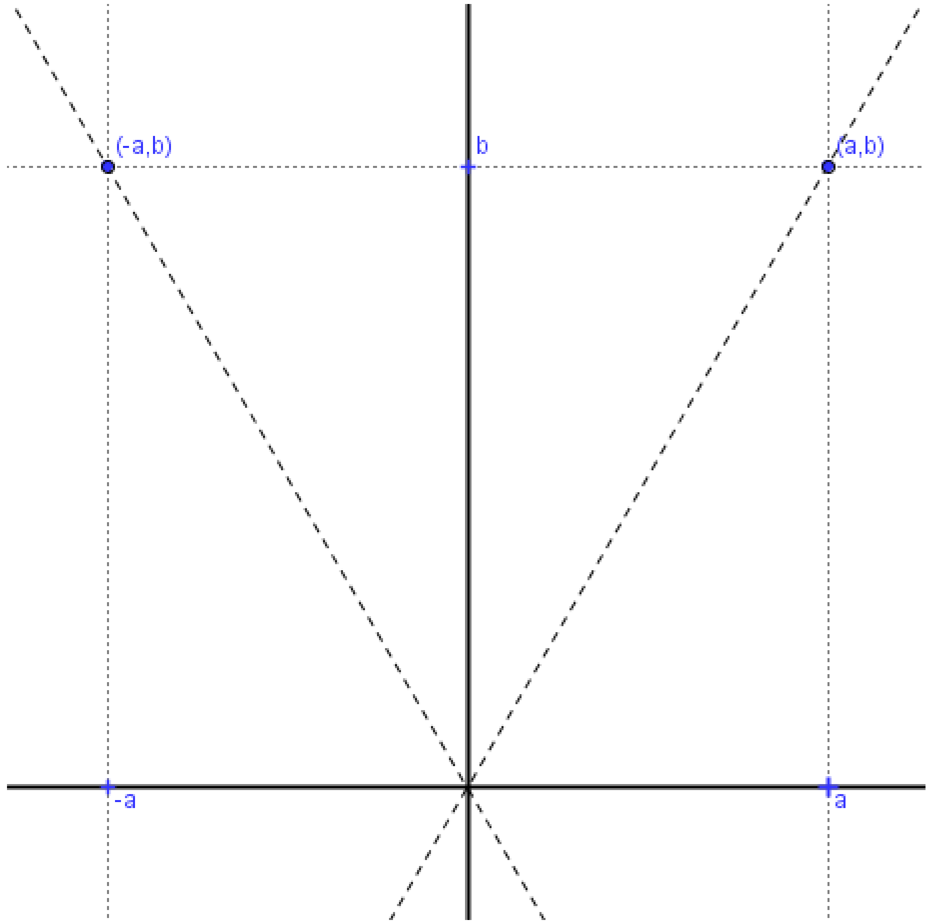

Figura 7- Frações opostas pela soma.

4. SUGESTÕES DE ATIVIDADES

"O computador exerce um papel decisivo no ensino de Matemática, nos dias atuais, em virtude das possibilidades de construção de modelos virtuais para a Matemática imaginária". (MENDES, 2009, p. 113)

Em virtude disso, buscamos através do *software* Geogebra mostrar uma interpretação geométrica para o corpo de frações, possibilitando assim, a compreensão visual de propriedades algébricas.

A utilização do computador como ferramenta de ensino contribui, entre outras coisas, para:

> Uma relativização da importância das competências de cálculo e de simples manipulação simbólica, que podem ser realizadas de forma mais rápida e eficiente; Um reforço do papel da linguagem gráfica e de formas de representação, permitindo novas estratégias de abordagem dos mais variados problemas; Uma atenção redobrada às capacidades intelectuais de ordem mais elevada, que se situam para além do cálculo e da simples compreensão de conceitos e relações matemáticas.
>
> (MENDES, 2009, p.114)

O conteúdo de números racionais deve ser abordado na 6ª série ou 7º ano do Ensino Fundamental. Neste sentido, objetiva-se que o aluno: "Reconheça números racionais em diferentes contextos, realize operações com números racionais e compreenda o princípio de equivalência da igualdade e da desigualdade." (DCE, 2008). No entanto, Imenes diz que "a organização dos conteúdos deve nortear-se pelas concepções de currículo em espiral e currículo em rede" (IMENES, 2010, p. 8). Portanto, é possível utilizar essa interpretação em outras séries, e até mesmo em outros níveis de ensino, abordando assim, a riqueza de outros conteúdos envolvidos, tais como: semelhança de triângulos, limite e infinito, ação de grupos, órbita de grupos, entre outros. Porém, para isso, se torna necessário redirecionar as perguntas das atividades de acordo com os objetivos específicos.

Segue abaixo uma série de questionamentos que podem ser feitos a respeito da interpretação apresentada neste trabalho. Vale a pena alertar que as perguntas abaixo não devem ser aplicadas diretamente a quaisquer turmas ou níveis de ensino, cabe ao professor saber adaptá-las de acordo com seus objetivos e nível dos alunos, utilizando os seguintes questionamentos apenas como um possível suporte.

Atividade 1) Algebricamente representamos uma fração ***a/b,*** com *a* e *b* inteiros e *b* $\neq 0$, como um par ordenado ***(a,b)***.

Neste sentido, podemos representar uma fração como um ponto de um sistema cartesiano?

Se possível, tente representar as frações: $\frac{12}{8}, \frac{-9}{-6}, \frac{24}{16}, \frac{-3}{-2}, \frac{6}{4}, \frac{21}{14}, \frac{-15}{-10}, \frac{27}{18}$ como pontos.

O que há de comum com estes pontos? Porque isso acontece?

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam que frações equivalentes formam uma reta passando pela origem.

Atividade 2) O que são frações equivalentes?

Qual é a relação fração/número? Ou seja, uma fração é um número ou vice-versa? Toda fração é um único número? Todo número é uma única fração? Justifique suas respostas utilizando argumentos geométricos.

Já que podemos representar geometricamente uma fração através de um ponto, como podemos fazer para representar um número geometricamente? O método se aplica somente a números racionais?

Tente representar vários números geometricamente, o que há de comum nestas representações? Quantas frações são necessárias para representar um único número?

É possível dar uma interpretação do por que a fração 0/0 é uma indeterminação?

Os objetivos desta atividade são que os alunos percebam que uma fração é apenas uma representação de um número, que várias frações podem representar o mesmo número e que neste contexto geométrico, ao invés dos pontos, os números são representados pelas retas. Além do mais, objetiva-se dar uma pequena noção intuitiva do por que 0/0 é uma indeterminação, uma vez que esta fração, caso esteja definido como sendo uma fração, é equivalente a todas as demais.

Atividade 3) Utilizando métodos geométricos, é possível somar frações? Dica: pense primeiro em uma interpretação geométrica para a soma de números inteiros.

É preciso utilizar o MMC na soma de frações?

O objetivo desta atividade é que os alunos estabeleçam um método geométrico para somar frações e comparem as propriedades deste método com as propriedades algébricas da soma, como o uso do MMC para efetuar a operação.

Atividade 4) "O elemento neutro da soma é um número que, se somarmos com outro qualquer, o resultado da soma será o mesmo número." Como assim? Que número é este (geometricamente)? Explique.

Dizemos que um número é o oposto de outro quando a soma dos dois é igual a 0. Qual a relação geométrica entre dois números opostos e o elemento neutro da soma?

O objetivo desta atividade é que os alunos percebam a simetria geométrica entre um número racional e seu oposto com relação ao elemento neutro da operação.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Entendo que a aprendizagem matemática está ligada à compreensão e apreensão do significado. Cabe ao professor, então, planejar aulas que objetivam aos alunos maior facilidade de compreensão do significado e de aplicações do conteúdo estudado. Felizmente, a presença de instrumentos tecnológicos nas escolas, à disposição de professores e alunos, tanto para planejamento e aplicação de aulas, se bem utilizados, podem permitir que esses objetivos sejam alcançados.

Com o uso do *software,* o aluno, em primeiro momento, poderá ter um estímulo extra para desenvolver a atividade, talvez somente pelo fato de estar manipulando o *software.* Porém, ao decorrer da aula, ele poderá perceber o significado do conteúdo estudado sem que este se reduza a apenas operações mecanizadas. As sugestões de atividades acima podem permitir ao aluno perceber, não somente a visualização geométrica de frações e números racionais, mas também diversos conteúdos da própria geometria, tais como: reta, simetria, ângulos, localização de pares ordenados, entre outros, fazendo assim uma importante conexão entre álgebra e geometria.

No entanto, o professor deve ter em mente que uma aula com o uso de computadores, necessita de um bom planejamento, levando em consideração as características das turmas,

os conteúdos dominados pelos alunos, a estrutura e disposição da escola onde trabalha, entre outros fatores que podem levar ao insucesso dos objetivos esperados.

As atividades propostas neste trabalho visam apresentar ao professor uma ideia diferente de ensinar conceitos e propriedades dos números racionais, um conteúdo visto muitas vezes como de difícil compreensão. Porém, são de suma importância os questionamentos feitos pelo professor aos alunos, induzindo-os a reconhecer padrões e relações, compreendendo, assim, o significado de cada padrão e relação encontrados, partindo inicialmente de exemplos visuais, para depois poder generalizar e abstrair de acordo com as necessidades de aprendizagem.

REFERÊNCIAS

ATIYAH, M. F; MACDONALD, I. G. *Introduction to Commutative Algebra.* Addison-Wesley Publishing Company, 1969.

BIGODE, A, J. L. *Matemática Hoje é Feita Assim.* Editora FTD, São Paulo, 2000.

GONÇALVES, A. *Introdução à Álgebra*. IMPA, 5ª Edição. Rio de Janeiro, 1999.

IMENES, L. M. Matemática ao alcance de todos. In: *Atas do X ENEM, Encontro Nacional de Educação Matemática: Educação Matemática, Cultura e Diversidade*. Sociedade Brasileira de Educação Matemática, Salvador BA, 2010.

IMENES, L.M; LELLIS, M. *Matemática.* Editora Moderna, São Paulo, 2010.

MENDES, I. A. *Matemática e investigação em sala de aula: tecendo redes cognitivas na aprendizagem.* Editora Livraria da Física. São Paulo, 2009.

MERLINI, V. L. *O conceito de frações em seus diferentes significados: um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental*. Dissertação (Mestre em Educação Matemática), PUC-SP, São Paulo, 2005.

PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. *Diretrizes Curriculares da Educação Básica - Matemática*. Paraná: SEEP, 2008. Disponível em: < http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/diretrizes_2009/matematica.pdf >. Acesso em 13 de junho de 2012.