IV EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática
2º Encontro Nacional Pibid Matemática
Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas
06 a 08 agosto 2014

ISSN 2316-7785

FRACTAIS: A COMPLEXIDADE E A AUTO-SEMELHANÇA DOS PADRÕES GEOMÉTRICOS REPRESENTADAS COM MATERIAIS CONCRETOS E TECNOLOGIA COMPUTACIONAL

Matheus Garcia Arantes
Universidade Federal do Pampa
mathewsga@gmail.com

Ângela Maria Hartmann
Universidade Federal do Pampa
angelahartmann@unipampa.edu.br

Victor Hugo Hott Costa
Universidade Federal do Pampa
victorhugomgb@gmail.com

Hudá Augusto Cardoso
Universidade Federal do Pampa
hudaaugusto@gmail.com

Resumo

As cinco atividades propostas nesta oficina visam ampliar o conhecimento dos participantes sobre uma temática pouco abordada em Matemática na Educação Básica: a geometria fractal. A oficina tem por meta promover a compreensão conceitual e a criação de formas geométricas fractais virtuais e concretas usando materiais concretos e tecnologias computacionais. Espera-se que os participantes, ao realizar a construção virtual e concreta de fractais, compreendam os elementos matemáticos presentes nessa geometria. Serão explorados conteúdos matemáticos como série de Fibonacci, medidas do retângulo áureo, progressão aritmética e geométrica, além de introduzir algo da arte gráfica computacional e a construção de cartões com formas fractais.

Palavras-chave: Geometria Fractal; Educação Básica; Tecnologia Computacional.

Introdução

A observação atenta do mundo a nossa volta revela formas geométricas tortuosas em caminhos, costas oceânicas, vales, montes, nuvens, folhas e galhos de arbustos ou árvores, vegetais como o brócolis ou couve-flor ou mesmo no sistema vascular humano. Essas formas não são fáceis, para não dizer impossíveis, de reproduzir com figuras geométricas euclidianas. A geometria clássica fornece apenas uma aproximação para estas estruturas. A geometria fractal surge visando representar o contorno de uma nuvem, de costas marítimas, de uma folha ou um floco de neve. Constituindo-se em uma extensão da primeira, pode ser utilizada para construir modelos capazes de representar as formas da natureza (SOUZA, 2012).

Fractais são objetos obtidos geometricamente ou aleatoriamente, através de processos repetitivos aplicados indefinidamente apresentando determinadas características também encontradas em formas da natureza. Essas características são: autossemelhança, escala, complexidade e dimensão.

A autossemelhança é a simetria através de escalas, de modo que cada pequena porção do fractal poder ser vista como uma réplica de todo o fractal numa escala menor. A complexidade infinita prende-se ao fato de o processo gerador de fractais ser recursivo, tendo um número infinito de iterações. Quanto maior for o número de iterações, mais detalhes se apresentam, de forma a nunca obter uma “imagem final". A percepção de infinito está subjacente aos objetos fractais, pois estes são obtidos no limite de um processo de construção que se repete indeterminadamente e como tal, temos necessidade de atribuir um limite ao nosso campo de visão. Para os olhos da mente, um fractal é uma maneira de entrever o infinito (NUNES, 2006).

Existem diversas formas na natureza que apresentam estruturas de autossemelhança e, apesar de não conseguirmos visualizar muitas escalas de ampliação, elas são discutidas sob o ponto de vista da geometria fractal. Para estas formas da natureza, a noção de autossemelhança deve ser vista cuidadosamente e encarada como autossemelhança aproximada, uma vez que, partes destas figuras têm a mesma estrutura ou uma distribuição estatística idêntica, mas não são réplicas exatas dessas (NUNES, 2006).

Assim como fractais são encontrados na natureza (Figura 1), fractais algébricos e geométricos podem ser facilmente gerados e explorados usando tecnologia computacional.

Figura 1: Padrões observados na natureza[1].

Dimensão Fractal

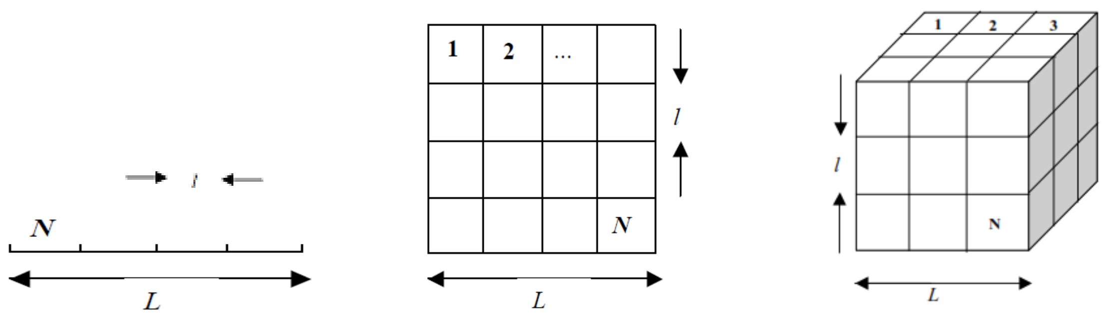
Nem comprimento nem área servem para medir o tamanho dos objetos fractais. Os fractais são "mais" do que linhas, e "menos" do que superfícies. O que podemos medir é um número que caracterize o grau de desordem de um fractal, conhecido como dimensão fractal. Pode-se entender intuitivamente essa ideia compreendendo que uma linha desordenada em um plano preenche mais espaço que uma linha reta, que tem uma dimensão 1, porém menos espaço que um plano, que tem dimensão 2. Quanto mais denteada for a linha, mais perto de 2 estará sua dimensão fractal (Figura 2) (SOUSA JÚNIOR, 2002).

Figura 2: Uma linha desordenada no plano ocupa mais espaço que uma linha reta[2]

[1] Fonte: 29 padrões fractais hipnotizantes encontrados na natureza. Disponível em**:** <http://www.mdig.com.br/index.php?itemid=30380> Acesso em: 28 jun.2014.

[2] Fonte: modificado de Souza (2002).

A formulação matemática para uma dimensão fractal surge da relação entre uma figura geométrica e a quantidade de segmentos, quadrados ou cubos necessários para cobrir toda a figura (Figura 3).



(a) (b) (c)

Figura 3: Uma linha, um quadrado e um cubo são divididos em N partes[3]

Observando a figura 3a podemos dizer que a reta de comprimento *L* é formada por N segmentos menores de comprimento *l*. Da mesma forma o quadrado de área L^2, na figura 3b, é formado por N quadrados menores de área l^2. E o cubo de volume L^3, na figura 3c, é formado por N cubos menores de volume l^3. O mesmo raciocínio pode ser aplicado a figuras de mais de duas dimensões:

$$\underbrace{L^1 = N\,.\,l^1}_{Reta},\quad \underbrace{L^2 = N\,.\,l^2}_{Quadrado},\quad \underbrace{L^3 = N\,.\,l^3}_{Cubo} \Longrightarrow L^d = N\,.\,l^d \quad \text{portando} \quad N\,(l,L) = \left({}^{L}\!/_{l}\right)^d \tag{1}$$

Quando o expoente *d* indica um valor fracionário, é chamado fractal. A dimensão fractal é deduzida a partir da Equação 1 como segue:

$$N\,(l,L) = \left({}^{L}\!/_{l}\right)^d$$

Para retirarmos o expoente D_F aplicamos o logaritmo:

[3] Fonte: modificado de Souza (2002).

$$\ln[N\,(l,L)] = \ln\left[\left({}^{L}/_{l}\right)^{d}\right] = d.\ln\left({}^{L}/_{l}\right) \Rightarrow d = D_F = \frac{\ln[N\,(l,L)]}{\ln[{}^{L}/_{l}]}$$

Fazendo $\varepsilon = \frac{l}{L}$ temos: $$d = D_F = \frac{\ln[N\,(\varepsilon)]}{\ln[{}^{1}/_{\varepsilon}]} \quad (2)$$

Também pode-se usar o logaritmo na base 10: $$d = D_F = \frac{\log\,(N)}{\log({}^{1}/_{\varepsilon})} \quad (3)$$

A equação 3 leva em consideração, para o cálculo da dimensão fractal, o número de elementos gerados em cada iteração (N) e a proporção de cada elemento em relação ao original $({}^{1}/_{\varepsilon})$.

Arte Fractal

A arte fractal é criada utilizando-se funções matemáticas e transformando os resultados dos cálculos em imagens (Figura 4), animações, música ou outro tipo de mídia. Calculados em programas computacionais, os fractais podem não só simular o nascimento de mundos e o crescimento celular, mas serem usados para criar imagens ou sons. A música fractal, tal como os fractais, é o resultado de um processo repetitivo no qual um algoritmo é aplicado múltiplas vezes para elaborar a sua anterior produção.

Figura 4: Arte fractal criada por iterações em programas computacionais[4]

A sequência de Fibonacci, o número de ouro e a proporção áurea

Leonardo de Pisa, conhecido como Fibonacci (por ser filho de Guglielmo dei Bonacci), recebeu os créditos por ter introduzido na Europa os algarismos indo arábicos e a sequência

[4] Fonte: Fractal Fantasy. <http://www.pinterest.com/wn2825/fractal-fantasy/> Acesso em: 28 jun. 2014.

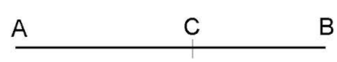
numérica conhecida como a proporção áurea. Em sua obra *Liber abaci* ("Livro do cálculo"), ele explicou o problema hipotético dos pares de coelhos, um de seus problemas mais famosos e que ainda gera controvérsias no mundo da ciência (SILVA, 2012): "Um casal de coelhos pode reproduzir-se após dois meses de vida e, a partir daí, produz um novo casal a cada mês. Começando com um único casal de coelhos recém-nascidos, quantos casais existirão ao final de um ano?"

A resolução do problema deu origem à sequência infinita conhecida como sequência de ouro: 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55... Nela, o número seguinte é o resultado da soma dos dois números anteriores: f(n) = f(n-1) + f(n-2). Fibonacci mostrou que com essa sequência de números a matemática pode definir formas fractais existentes no universo (GOMES, 2013).

A divisão de um número e seu antecessor ao longo dessa sequência, por sua vez, se aproxima cada vez mais de um número conhecido como “número de ouro” (Φ), com valor aproximado de 1,61803. Esse número é obtido a partir do cálculo da razão áurea, expressa pela fórmula (a+b)/a = a/b = Φ.

De um ponto de vista geométrico, na obra *Os Elementos*, Euclides de Alexandria afirma que “um segmento de reta se diz dividido em média e extrema razão, se a razão entre o menor e o maior dos segmentos é igual à razão entre o maior e o segmento todo". A razão entre o segmento menor e o segmento maior chama-se razão áurea.

$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$$



Na razão acima, verifica-se que as razões possuem como característica o fato de que um segmento de reta ser sempre dividido pelo próximo segmento de reta maior (CARVALHO, 2008). Para calcular o número de ouro vamos denominar AC = a e CB = b (ou ainda AB = a + b e AC = a). Fazendo as substituições temos:

$$\frac{a}{a+b} = \frac{b}{a} = \Phi \quad \Rightarrow \quad a = \Phi b$$

então:

$$\frac{\Phi b}{\Phi b + b} = \frac{b}{\Phi b} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Phi}{\Phi + 1} = \frac{1}{\Phi} \quad \Rightarrow \quad \Phi^2 - \Phi - 1 = 0$$

Cuja solução é, $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \cong 1{,}618$ pois Φ é positivo. Este número é conhecido como o número φ, o número de ouro.

No universo existe uma "marca" conhecida como Fenômeno Simétrico da Natureza. Esta "marca", é dirigida à proporção áurea, proveniente da Série de Fibonacci (FERNANDES, s/d). Utilizando os números da sequência de Fibonacci, é possível construir um retângulo e, a partir dele, uma espiral conhecida como espiral áurea. Na geometria, o retângulo de ouro surge do processo de divisão "em média e extrema razão", de Euclides. Ele é assim chamado porque ao dividir a base desse retângulo pela sua altura, obtêm-se o número de ouro 1,618. Deste retângulo surge a espiral de Fibonacci (Figura 5) que cresce na mesma medida que o retângulo de ouro, obedecendo a proporção de 1,618.

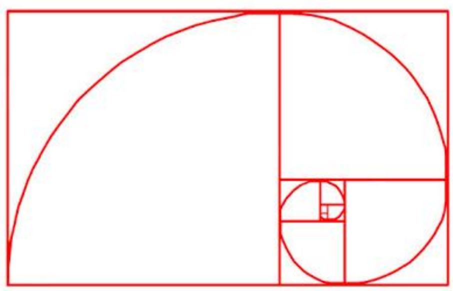


Figura 5: Retângulo de ouro e a espiral de Fibonacci[5]

Esta simetria pode ser aparentemente insignificante, mas constitui grande parte das harmonias da natureza. A relação da Série de Fibonacci e o número de Ouro encontram-se presentes em flores, árvores, ondas, furacões, conchas, articulações, nas simetrias dos rostos dos seres humanos, nos batimentos cardíacos, em chifres de animais e até mesmo galáxias (FERNANDES, s/d).

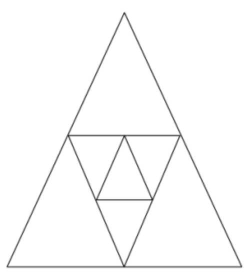
Metodologia

[5] Fonte: The Golden Mean. <http://www.pinterest.com/idesigndec/the-golden-mean/> Acesso em: 25 jun. 2014.

As seis atividades a seguir têm por objetivos fazer os participantes da oficina: i) entender conceitos como autossemelhança e geometria fractal; ii) construir fractais em planilhas eletrônicas; iii) entender os conceitos de razão áurea, progressão aritmética e progressão geométrica em fractais; iv) identificar fractais construídos a partir da série de Fibonacci.

Atividade 1 – Triângulo Fractal

Calcular a soma dos perímetros de triângulos obtidos a partir da ligação dos pontos médios de um triângulo equilátero de 10 cm de lado (Figura 7). Unindo os pontos médios de seus três lados obtém-se um segundo triângulo equilátero. Unindo os pontos médios dos lados desse novo triângulo obtém-se um terceiro e assim por diante, indefinidamente.



Perímetro do primeiro triângulo → 30

Perímetro do segundo triângulo → 15

Perímetro do terceiro triângulo → 7,5

Figura 7: Triângulo equilátero fractal

Calculando a soma dos termos da PG (30, 15, ...) de razão 0,5, obtemos:

$$S = \frac{a_1}{1-q} = \frac{30}{1-{}^{1}\!/_{2}} = \frac{30}{{}^{1}\!/_{2}} = 60$$

Durante as atividades concentremo-nos em observar e anotar a formação de figuras semelhantes e anotar em tabelas. Anote a quantidade de figuras geradas em cada iteração. Verifique se a sequência dada pelos dos valores da coluna “número de figuras” formam uma PA, PG ou uma sequência qualquer. Justifique sua resposta.

Atividade 2 – Cartão Fractal

Material: papel tamanho A4 ou maior; régua; lápis; tesoura sem ponta; calculadora (opcional).

Procedimento:

1. Dobrar uma folha retangular de comprimento C e largura a ao meio de forma que a folha dobrada apresente dimensões C e a/2;
2. Fazer cortes de largura (a/2)/2 a uma distância de ¼ de cada lado;
3. Dobrar o retângulo a "parte" do papel que se encontra entre os dois cortes para cima.
4. Repetir o processo com o retângulo central. Quanto aos retângulos laterais, dividi-los em quatro retângulos congruentes. Recortar o lado comum aos dois que são adjacentes à dobra e dobrar para dentro o retângulo mais interno (Figura 6).

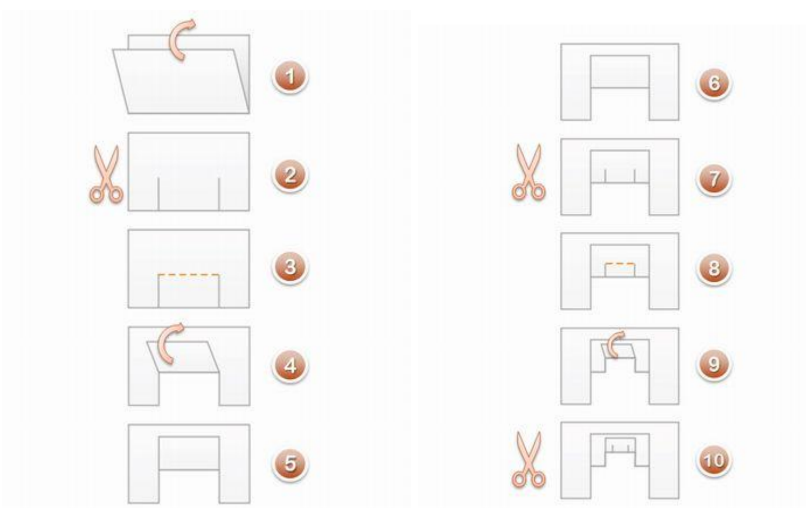


Figura 6: Etapas de montagem do cartão fractal[6]

5. A cada iteração preencher o quadro abaixo:

Etapa	**Número de Figuras**	**Área da face do novo retângulo (em cm^2)**	**Volume total (em cm^3)**

[6] Fonte: Portal do Professor. <http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=28533> Acesso em: 01 jul. 2014.

Quadro 1: Dimensões no cartão fractal

Atividade 3 – Construção do Fractal de Vicsek

Material Utilizado: computadores que tenham planilhas eletrônicas instaladas.

Procedimento:

1) Abrir uma planilha eletrônica e pintar um quadrado de lados iguais a 81 células.

2) Dividir este quadrado em 9 quadrados menores.

3) Pintar de outra cor os quadrados das arestas (“quinas”) de modo a formar uma cruz.

4) Repetir o processo para cada quadrado menor que foi gerado.

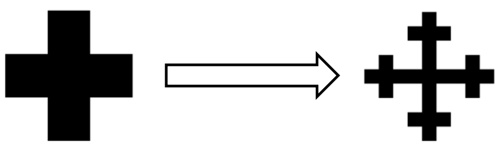


Figura 7: segunda e terceira iteração no Fractal de Vicsek

5) Durante a confecção do fractal, preencher o quadro a seguir:

Etapa	**Número de Figuras**	**Área total dos quadrados**	**Área total do espaço em branco**

Quadro 2: Dimensões no fractal Vicsek

6) Utilizar a equação abaixo para calcular a dimensão fractal de cada um dos fractais gerados:

$$D_F = \frac{\log N}{\log\left(1/_{\varepsilon}\right)}$$

Atividade 4 – Gráficos da Série Fibonacci

Materiais: computador com planilha eletrônica instalada.

Procedimento:

1) Considerando a razão abaixo, entre números consecutivos da sequência Fibonacci:

$$r(n) = \frac{f(n+1)}{f(n)}, n = 1,2,3,4, \dots, n.$$

2) Observar que a sequência r(n) ilustrada abaixo possui algumas propriedades:

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \frac{21}{13}, \frac{34}{21}, \frac{55}{34}, \dots$$

(a) utilizando uma planilha eletrônica realize essas divisões até a 20ª divisão. O que pode ser observado?

(b) Construa um gráfico apenas com os termos de ordem ímpar e descreva o observado.

(c) Construa um gráfico apenas com os termos de ordem par e descreva o observado.

(d) Construa um gráfico das razões em sequência e veja se o resultado corresponde ao observado.

Atividade 5 – Construção da Espiral de Fibonacci

Materiais: compasso; esquadro; borracha; lápis/caneta, folhas quadriculadas.

O Retângulo de Ouro é considerado o formato retangular mais belo e apropriado de todos. Exemplo disso é o uso do seu formato nas folhas A4 e cartões de crédito. <u>Definição do Retângulo Áureo</u> - Um retângulo ABCD é chamado áureo se possuir a seguinte propriedade: a razão entre a medida de todo retângulo e a medida da parte maior desse retângulo é igual à razão entre a parte maior e a menor.

1) Para desenhar um retângulo áureo pode-se utilizar a seguinte sequência (Figura 8):

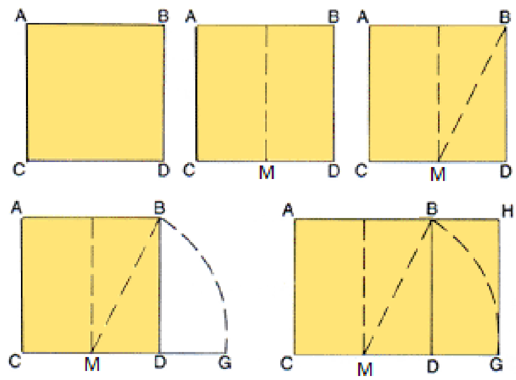


Figura 8: O ponto M no segmento AB é o ponto médio[7]

2) O retângulo AHGC é áureo. Para fazer os próximos retângulos basta desenhar um quadrado de lados DG no retângulo menor (BHDG) gerado e assim sucessivamente até que não seja mais possível (Figura 9).

4) Para desenhar a espiral de Fibonacci ligar os pontos C e E fazendo um arco com um compasso (Figura 9). Fazer o mesmo com os pontos E e G e assim sucessivamente.

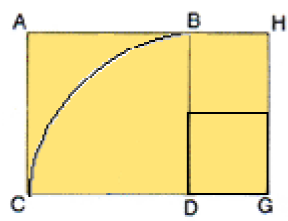


Figura 9: Arco da espiral de Fibonacci[8]

5) Após terminar de montar a espiral de Fibonacci escrever, em sequência, a área de cada “quarto de círculo” (área preenchida pelos arcos em cada retângulo).

6) Deduzir uma fórmula geral para o último termo da série. Se desenhar infinitamente a espiral, qual será o valor da “suposta” última área?

---

[7] Fonte: Modificado de PARAHYBAVISTA EM OBRAS. Disponível em: <http://brunosteinbachsilva.blogspot.com.br/2013_06_01_archive.html> Acessado em: 18 jun. 2014

[8] Fonte: Modificado de PARAHYBAVISTA EM OBRAS. Disponível em: <http://brunosteinbachsilva.blogspot.com.br/2013_06_01_archive.html> Acessado em: 18 jun. 2014

Atividade 6 – Arte fractal computacional

A arte fractal descrita anteriormente pode ser "experimentada" a partir da utilização de um aplicativo disponível gratuitamente no link: http://weavesilk.com/ Ao acessar o link, depara-se com uma imagem sendo construída em um fundo negro. Basta clicar em qualquer lugar da tela para que se comece a desenhar a arte. No canto esquerdo superior observamos um pequeno painel (Figura 10) constituído de dois quadros com as palavras *New* e *Share*.

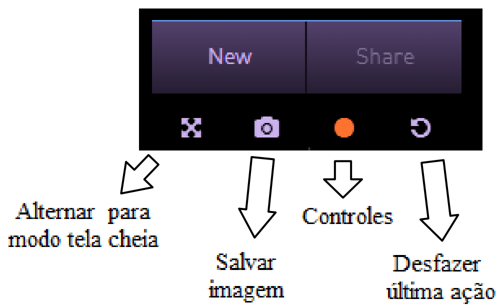


Figura 10: painel com as funções básicas do aplicativo Silk[9]

O primeiro quadro é utilizado para começar uma nova criação (apagando a criação anterior) e o segundo, para compartilhar sua imagem em redes sociais a partir de um link gerado no *site*. Ao clicar em controles serão exibidas algumas opções (Figura 11) como a simetria e quantidade de pontos utilizados para desenhar, colorir e opções de espelhamento e de "espiralamento" dos pontos. O primeiro quadro do aplicativo é utilizado para começar uma nova criação (apagando a criação anterior) e o segundo, para compartilhar sua imagem em redes sociais a partir de um link gerado no *site*. Para gerar as imagens basta pressionar o ponteiro do *mouse* na tela o tempo que achar necessário, explorando as diferentes geometrias e cores do aplicativo. Ao pressionar por um tempo prolongado, serão geradas imagens a partir de funções recursivas definidas pelos programadores. A escolha de quando parar e em qual caminho a

[9] Fonte: http://weavesilk.com/

função/algoritmo irá colorir a tela é do usuário. É possível salvar a imagem gerada e defini-la como plano de fundo da área de trabalho do computador.

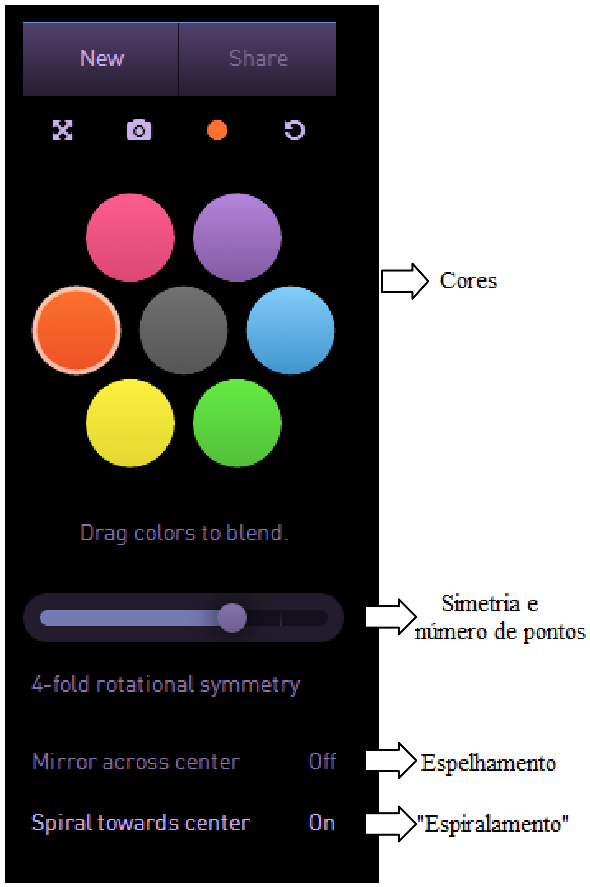


Figura 11: Painel de controles do aplicativo Silk[10]

Considerações Finais

Explorar objetos fractais pode ser uma ótima oportunidade de trabalhar interdisciplinarmente Matemática, Biologia e Arte a partir de questões como: (1) onde se pode observar a espiral de Fibonacci? (2) Em que partes do corpo consegue-se visualizar a proporção do retângulo de ouro? (3) Que tipo de fractais têm área, perímetro ou comprimento que tendem a

[10] Fonte: http://weavesilk.com/

zero? (4) Quais corpos da natureza podem ser considerados fractais? Exercite sua criatividade e imaginação!

Referências

FERNANDES, D. **Série de Fibonacci e o Número de Ouro**. Disponível em: <http://pt.slideshare.net/Naspereira/srie-de-fibonacci-e-o-nmero-de-ouro> Acesso em: 20 jun. 2014.

GOMES, C. A. **Notas de Aula, a Sequência De Fibonacci.** Departamento de Matemática. Universidade Federal do Rio Grande do Norte. Disponível em: <http://www.olimpiada.ccet.ufrn.br/wp-content/uploads/2013/08/nota_aula_03.pdf> Acesso em: 28 jun. 2014.

QUARESMA, I. M. M. C.; OLIVEIRA, J. M. D. M. de; FARIA, P. C. R. P. **Música Fractal:** o mundo dos fractais. Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/musica_fractal.htm> Acesso em: 28 jun. 2014.

NUNES, R. S. R. **Geometria Fractal e Aplicações**. 2006. 78f. Tese (doutorado). Departamento de Matemática Pura, Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Portugal, 2006. Disponível em: <http://www.fc.up.pt/pessoas/jfalves/Teses/Raquel.pdf> Acesso em: 20 jun. 2014.

SOUZA, D. N.; SILVA, G. K. R.; PILATO, M.; PINTO, N. J. B. **Oficina de Matemática Fractais**. Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência. Curitiba: Universidade Federal do Paraná, 2012.

SOUSA JÚNIOR, F. C. **Estudo da Dimensão Fractal de Esferas de Papel Amassado e Arruelas**. Projeto para o curso de Instrumentação para Ensino F809, Universidade Estadual de Campinas, 2002. Disponível em: <http://www.ifi.unicamp.br/~lunazzi/F530_F590_F690_F809_F895/F809/F809_sem1_2002/981212-Rel_Final_Francisco.pdf> Acesso em: 20 jun. 2014.