IV EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática
2º Encontro Nacional Pibid Matemática
Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas
06 a 08 agosto 2014

ISSN 2316-7785

OFICINA DE PAVIMENTAÇÃO COM TRIÂNGULOS EQUILÁTEROS

Camila Augusta do Nascimento Amaral
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
camila.amaral.1995@gmail.com

Jegiane C. Favoreto Mariano
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
jegianefavoreto@gmail.com

Julia Schaetzle Wrobel
Universidade Federal do Espírito Santo - UFES
juliasw@gmail.com

Resumo

Trata-se de um relato de experiência na área de geometria de um Subprojeto do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência – Pibid Matemática UFES. Elaboramos uma Oficina de Pavimentação com triângulos equiláteros para explorar os conceitos matemáticos de triângulos, vértices, arestas, classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos, medidas, condição de existência dos triângulos e a construção do triângulo equilátero com régua e compasso. Aplicamos a oficina em três turmas de sétimo ano da rede publica municipal da cidade de Vitória/ES, para que pudéssemos ter uma visão geral das dificuldades dos alunos participantes do projeto. Eles receberam explicações passo a passo. E ao final, cada turma fez sua própria pavimentação. A realização dessa experiência nos fez entender a necessidade de se desenvolver aulas interativas principalmente na área de geometria, matéria de pouco conhecimento pelos alunos e muitas vezes não vivenciada nas escolas. A maioria dos alunos ficou impressionado com a utilização prática de conceitos matemáticos no dia a dia.

Palavras-chave: Ensino-aprendizagem de matemática; Oficina de Pavimentação; Triângulos; Construção Geométrica.

Introdução

O presente trabalho relata a experiência da Oficina de Pavimentação com triângulos equiláteros, realizada por bolsistas do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – Pibid. A oficina foi feita com alunos do sétimo ano de duas escolas da rede municipal de Vitória/ES, ambas as escolas parceiras do Subprojeto de Matemática da Universidade Federal do Espírito Santo. O principal objetivo da atividade era fazer com que os alunos relembrassem e desenvolvessem conceitos matemáticos, como o que é pavimentação, triângulo, vértices, arestas, a classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos e sua condição de existência. A oficina visou desenvolver habilidades por ter sido proposto aos alunos recortar, moldar e colar, e trabalharem em equipe. Incentivando assim uma nova forma de ensino-aprendizagem.

Apresentamos a seguir uma análise geral das atividades e dos resultados alcançados.

Uso da pavimentação no ensino de Matemática

A pavimentação do plano consiste em cobrir totalmente esse plano com figuras geométricas (ou não), de modo que não haja nenhum espaço livre ou sobreposições entre elas. Segundo Serra, Barata e Sacramento (2004), existem vários tipos de pavimentações, as puras que são formadas por um único tipo ladrilho, as regulares em que os ladrilhos são polígonos regulares congruentes, as semirregulares ou arquimedianas que são aquelas em que os ladrilhos são polígonos regulares de dois ou mais tipos diferentes, na qual por um vértice passam quatro segmentos de reta. Há ainda as pavimentações semirregulares, constituídas por mais de um tipo de polígono regular sendo que por um vértice passam cinco ou mais segmentos de retas, as periódicas que são pavimentações que, ao sofrer uma translação, é possível deslocá-la sobre si mesma, continuando os ladrilhos alinhados e as aperiódicas que são pavimentações onde não se repete um padrão, embora seja possível existir a cobertura total do plano, sem espaços intermédios nem sobreposições.

A Oficina tinha como objetivo tratar das pavimentações regulares. Das figuras geométricas regulares, apenas o quadrado, o hexágono regular e o triângulo equilátero pavimentam o plano, pois ao verificar a soma dos ângulos internos ao redor de um vértice dessas figuras, percebe-se que somente esses três polígonos têm soma igual a 360° (Figura 1)

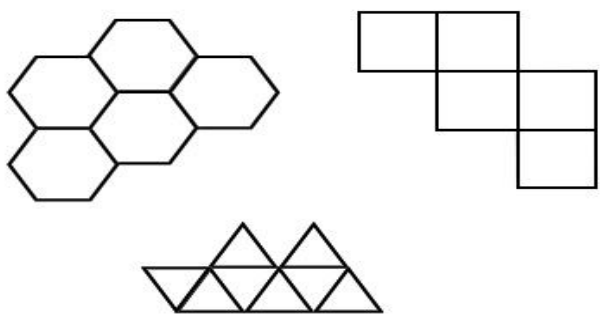

Figura 1 – Polígonos regulares que pavimentam o plano

E com o pentágono regular, posso pavimentar?

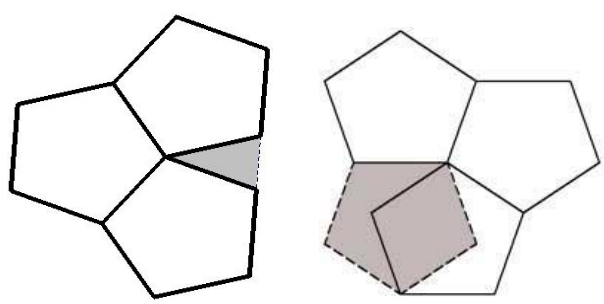

Figura 2 – A tentativa de pavimentação com pentágono

A resposta está na medida do ângulo interno do pentágono regular. Sabemos que os ângulos internos valem 108° logo ao se colocar três pentágonos regulares ao redor de um vértice, a soma desses ângulos será de 108° + 108° + 108° = 324°, o que não totalizará os 360°. Mas se colocarmos o quarto pentágono regular, este irá se sobrepuser ao primeiro, como mostrado na Figura 2, o que não caracterizará uma pavimentação. Outra tentativa é mostrada na Figura 3.

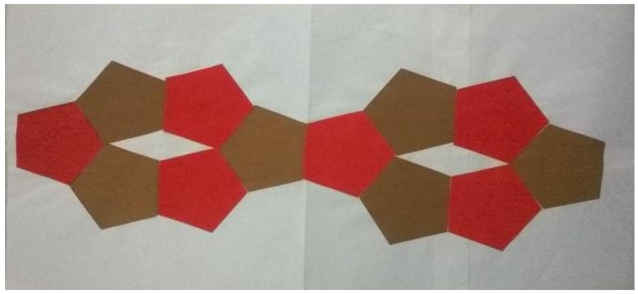
Figura 3 – Tentativa de pavimentação com pentágonos

Os primeiros registros com tratamento matemático que existem sobre a teoria das pavimentações devem-se a Johannes Kepler (1571 - 1630). No seu livro *Harmonices Mundi* (1619), Kepler apresenta uma classificação das pavimentações obtidas a partir dos trabalhos de Platão (c.428 - c. 348 a.C.) e de Arquimedes (287 - 212 a.C.) sobre poliedros. As pavimentações arquimedianas surgem assim por analogia com os poliedros platónicos e arquimedianos. São conhecidos os trabalhos de Maurits Cornelis Escher (1898 - 1972) que utilizou as pavimentações nas suas obras.

A oficina de Pavimentação com Triângulos Equiláteros

A oficina de Pavimentação com Triângulos Equiláteros foi ministrada em três turmas do sétimo ano da rede publica municipal de Vitória/ES, durante cinco aulas de 60 minutos cada, ambas em um mesmo dia, para um total 60 alunos com idade entre 11 e 15 anos. Começamos trabalhando com uma revisão dos conceitos matemáticos envolvendo triângulos. Iniciamos com:

a) O que são vértices?

No início nenhum aluno respondia, estavam quietos e tímidos. Depois de algumas tentativas um aluno respondeu: “É essa linha?” apontando para o encontro de duas paredes. Foi o momento que aproveitamos e dissemos que aquela linha ou segmento de reta era uma aresta. Como os alunos não se recordavam o que eram vértices, definimos como *o extremo comum aos lados dos polígonos* (PAIVA, 2004, p.49) e lembramos que as arestas são as ligações dos vértices dois a dois. Mostramos vários exemplos dentro da sala de aula como a mesa, a parede, o armário e o principal que eram nos polígonos.

b) O que são triângulos?

Os alunos reconheciam o desenho de diferentes triângulos, mas não conseguiram definir com palavras. Então definimos o triângulo como sendo *todo polígono com três lados e consequentemente três vértices e três ângulos* (DANTE, 2005, p.201).

Em seguida, explicamos a classificação dos triângulos de acordo com as medidas de seus lados e de seus ângulos internos.

c) Classificação quanto aos lados (DANTE, 2005, p.202):

i. Triângulo equilátero: é todo triângulo que apresenta os *três lados com medidas iguais*. Dizemos que os três lados são congruentes (Figura 4).

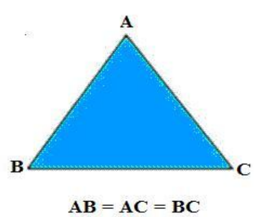

Figura 4 – Triângulo equilátero

Perguntamos o que era um triângulo equilátero. Sem saberem muito da definição, arriscaram em dizer que era um triângulo com todos os lados iguais baseando-se na figura em que mostramos. Ao explicar sua definição, os alunos tiveram mais facilidade em entender que não existe apenas um tipo de triângulo.

ii. Triângulo isósceles: é todo triângulo que *apresenta dois lados com medidas iguais* (Figura 5).

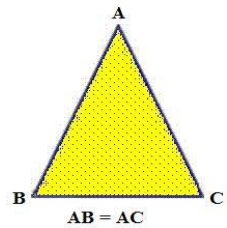

Figura 5 - Triângulo isósceles

Muitos alunos, ao verem o desenho, afirmava que esse era um triângulo equilátero por estar na mesma posição que o anterior. Com isso, pedimos para um aluno medir os lados desse triângulo e ele comprovou que o mesmo não tinha três lados iguais, mas apenas dois. Aproveitamos o momento para girar os triângulos e pedir aos alunos que medissem novamente os lados, levando-os a concluir que as definições não estão relacionadas à posição em que o triângulo está desenhado.

iii. Triângulo escaleno: *seus três lados têm medidas de comprimento diferentes* (Figura 6).

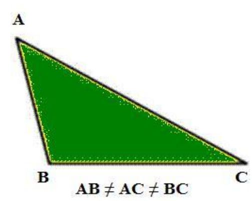

Figura 6 - Triângulo escaleno

Dos três casos, este foi o que os alunos apresentaram uma maior facilidade de classificação, pois além de ser o único caso de lados diferentes, a diferença era claramente perceptível pela imagem.

d) Classificação quanto aos ângulos (DANTE, 2005, p.202):

A turma não se lembrava de ângulos e nem das definições de ângulos internos agudos, retos, obtusos e rasos, o que tornou a classificação dos triângulos por ângulos ainda mais difícil. Por isso, foi feito uma revisão sobre esses conceitos (IEZZI et al, 2005, p.77-80):

a) Ângulo é a *figura formada por duas semirretas de mesma origem*;

b) Ângulo Agudo *é qualquer ângulo cuja medida é menor que 90°*;

c) Ângulo Reto *é o ângulo cuja medida é 90°*;

d) Ângulo Obtuso é *qualquer ângulo cuja medida é maior que 90° e menor que 180º*;

e) Ângulo Raso *é o ângulo cuja medida é 180°.*

i. Triângulo acutângulo: é todo triângulo que apresenta os três ângulos internos menores que 90º, ou seja, *os três ângulos são agudos*. (Figura 7).

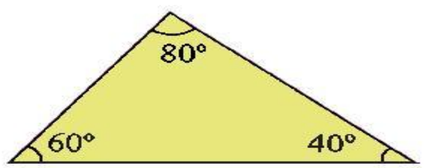

Figura 7 - Triângulo acutângulo

Pela dificuldade que os alunos tiveram em relacionar a classificação dos triângulos com suas respectivas definições, chamamos a atenção deles com as semelhanças destes nomes e a classificação de ângulos comentados anteriormente.

ii. Triângulo retângulo: é todo triângulo que *tem um ângulo interno reto e dois agudos*, ou seja, um ângulo medindo 90º (Figura 8).

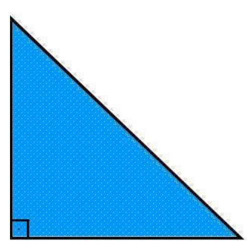

Figura 8 – Triângulo retângulo

Como este triângulo é o mais utilizado em sala de aula, os alunos se recordaram facilmente desta classificação.

iii. Triângulo obtusângulo: é todo triângulo que apresenta um ângulo interno maior que 90º, ou seja, *tem um ângulo obtuso e dois agudos* (Figura 9).

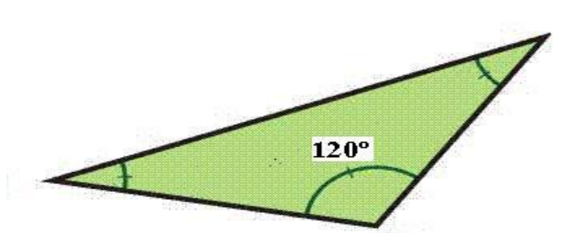

Figura 9 – Triângulo obtusângulo

Ao mostrar o triângulo, os alunos sabiam dizer a classificação quanto aos lados, mas não se recordavam da classificação quanto aos ângulos.

e) Hexágonos

Hexágonos são *polígonos de 6 lados* (DANTE, 2005, p.200). Na construção da pavimentação, a justaposição de triângulos equiláteros forma hexágonos. (Figura 10).

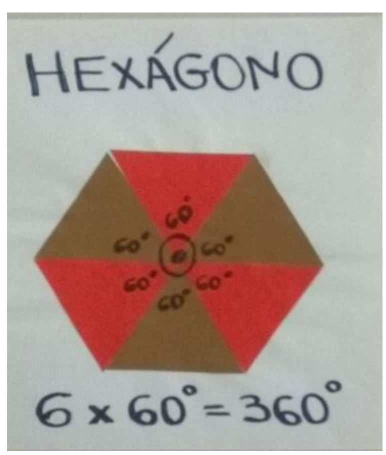

Figura 10 – Hexágono e triângulos

Atividades

1) Classificação dos Triângulos

Para o início da atividade, dividimos as turmas em duplas, distribuímos diversos triângulos (Figura 11) e pedimos para elas classificarem o triângulo recebido quanto ao lado e quanto ao ângulo com o auxílio de uma régua. Logo após todos concluírem a atividade, perguntamos oralmente para cada dupla a classificação.

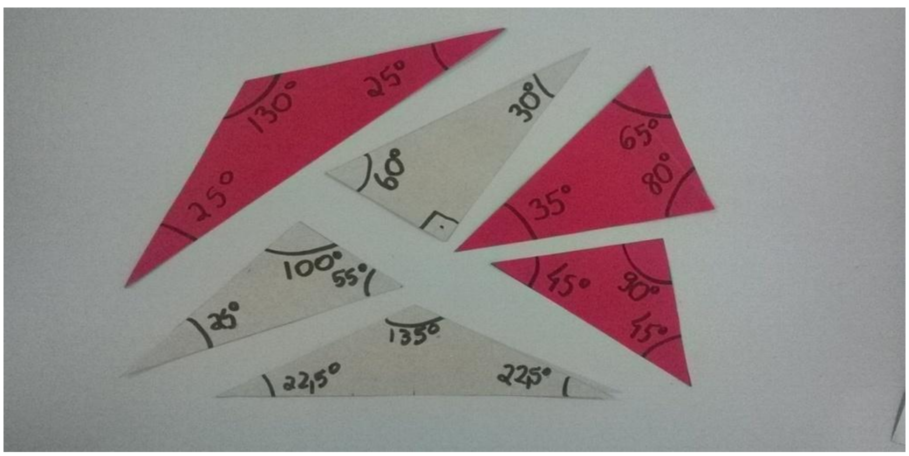

Figura 11 – Diferentes triângulos para classificação

2) Condição de Existência do Triângulo

Ainda em duplas, distribuímos três canudos com diferentes tamanhos para cada dupla e pedimos para que eles formassem triângulos usando os canudos como lados, sem cortá-los ou amassá-los. Todos perceberam que era impossível formar qualquer triângulo sem modificar os tamanhos dos canudos. Com isso, alguns alunos insistiram em cortá-los ou amassá-los, porém não era o objetivo da atividade. Assim, aproveitamos para explicar e mostrar a condição de existência do triângulo que diz que o maior lado deve ser menor que a soma dos outros dois lados do triângulo. Dito isso, pedimos para que cada dupla medissem com a régua seus canudos comprovando a condição de existência (Figura 12).

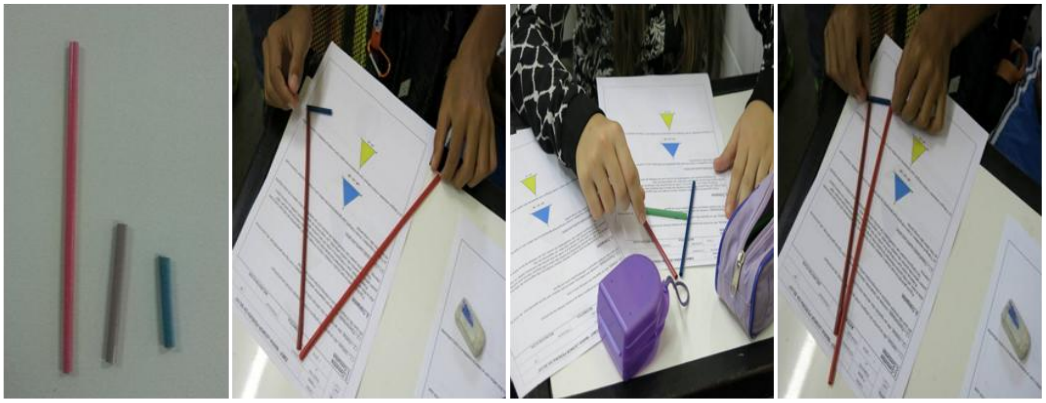

Figura 12 – Alunos tentando formar triângulos com os segmentos dados

3) Construção do Triângulo Equilátero

Nesta atividade, cada aluno recebeu papel, régua e compasso. Construímos com eles, passo a passo, o triângulo equilátero com régua e compasso que seria usado na próxima atividade (Figura 13). Nossa proposta era a construção de vários triângulos equiláteros para pavimentar uma região plana.

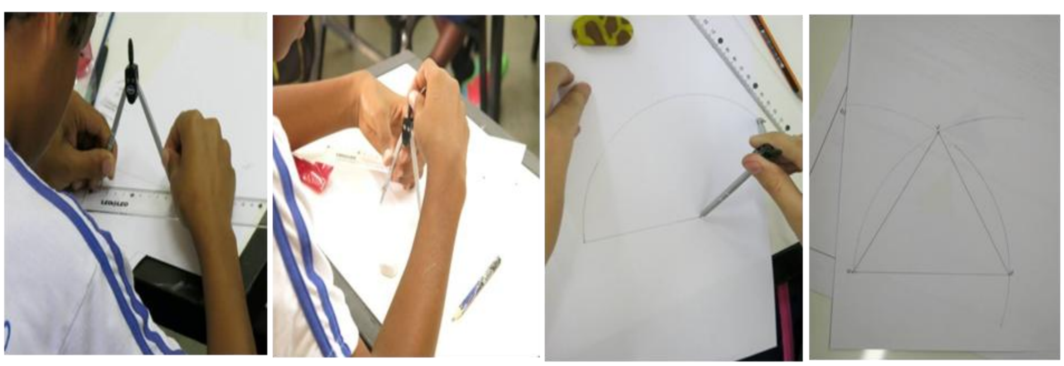

Figura 13 – Construção do triângulo equilátero por régua e compasso

4) Pavimentação

Em seguida, distribuímos para cada dupla a metade de um papel cartão junto com um molde de triângulo equilátero. Utilizamos três cores diferentes. Os alunos riscaram vários triângulos nos papeis cartões e depois recortaram (Figura 14). Preferimos essa estratégia ao desenho com régua e compasso de todos os triângulos por uma questão de tempo. Certamente não era a escolha ideal, mas a escolha possível. Por fim, toda turma se juntou para pavimentar duas folhas de papel cenário. Mostramos o inicio do processo, as rotações e translações do triângulo para compor a pavimentação e os alunos deram sequência à atividade (Figura 15). Eles discutiam entre si qual seria o próximo passo, qual triângulo e qual cor utilizar. A tomada de decisões e análise de estratégias também foi interessante de se observar. Por fim, conseguiram montar lindas pavimentações (Figura 16).

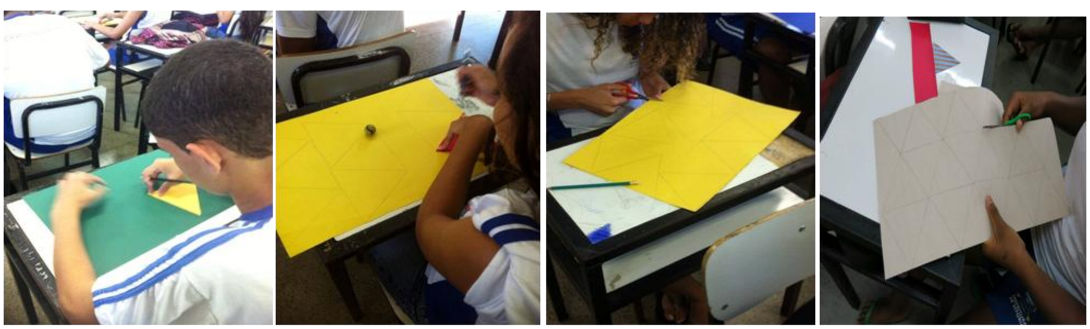

Figura 14 – Alunos desenhando e cortando os triângulos para a pavimentação

Figura 15 – Alunos pavimentando

Figura 16 - Resultado das pavimentações nas três turmas

Silva e Vieira (2011) trabalharam com uma turma do 10º ano do Curso Profissional de Técnico de Design Gráfico, em Lisboa, com alunos com idade média de 16 anos, utilizando-se do *Geometer's Sketchpad*, um software de Geometria Dinâmica (SGD). Entre outras atividades, propôs, assim como nós, a pavimentação do plano com triângulos equiláteros. É interessante observar que as atividades aqui propostas e as propostas por Vieira são as mesmas, em ambientes diferentes. Trabalhamos a construção do triângulo equilátero com régua e compasso enquanto a referida autora trabalhou com a mesma construção, usando o SGD. Utilizamos recorte e colagem dos triângulos e, a partir de rotações e translações, os alunos fizeram a composição da pavimentação. O mesmo foi feito pelos alunos de Silva e Vieira. A partir dessas isometrias, construiu-se a pavimentação. A única diferença foi o método de abordagem. Enquanto nossa proposta utilizou-se de material concreto, a dela trabalhou com SGD. Certamente, há vantagens nas duas abordagens. A principal vantagem da utilização de SGD é a "facilidade com que se podem efectuar construções sucessivas, por experimentação num curto espaço de tempo" (SILVA; VIEIRA, 2011, p.76). Como o objetivo da autora ía além de apenas construir a pavimentação, mas conjecturar e provar sobre os tipos de polígonos que pavimentam o plano, tal metodologia mostrou-se realmente mais adequada. Ao nos decidirmos pelo uso de material concreto, nos apoiamos no fato de que nem todas as escolas possuem laboratório de informática, na beleza artística das pavimentações construídas e nas ideias defendidas por Lorenzato:

> Palavras auxiliam, mas não são suficientes para ensinar. [...] o fazer é mais forte que o ver ou ouvir. [...] o “ver com as mãos” é mais popular do que geralmente se supõe. [...] as pessoas precisam “pegar pra ver”, como dizem as crianças. Então, não começar o ensino pelo concreto é ir contra a natureza humana. (LORENZATO, 2006, p. 17-19).

Após a conclusão da pavimentação, os alunos puderam perceber a aplicação de todo o processo no qual havia passado e adoraram o resultado. A atividade permitiu um maior envolvimento dos alunos nas tarefas propostas, num tema que à princípio seria difícil e pouco motivante, as construções geométricas. Aplicá-la em pavimentações, a partir de recorte e colagem, trouxe motivação extra aos alunos, que acharam super interessante e muito bonito o trabalho que eles haviam realizado durante o dia. Perceberam a Matemática como algo divertido e dinâmico. Na Figura 17 apresentamos relatos de alguns alunos.

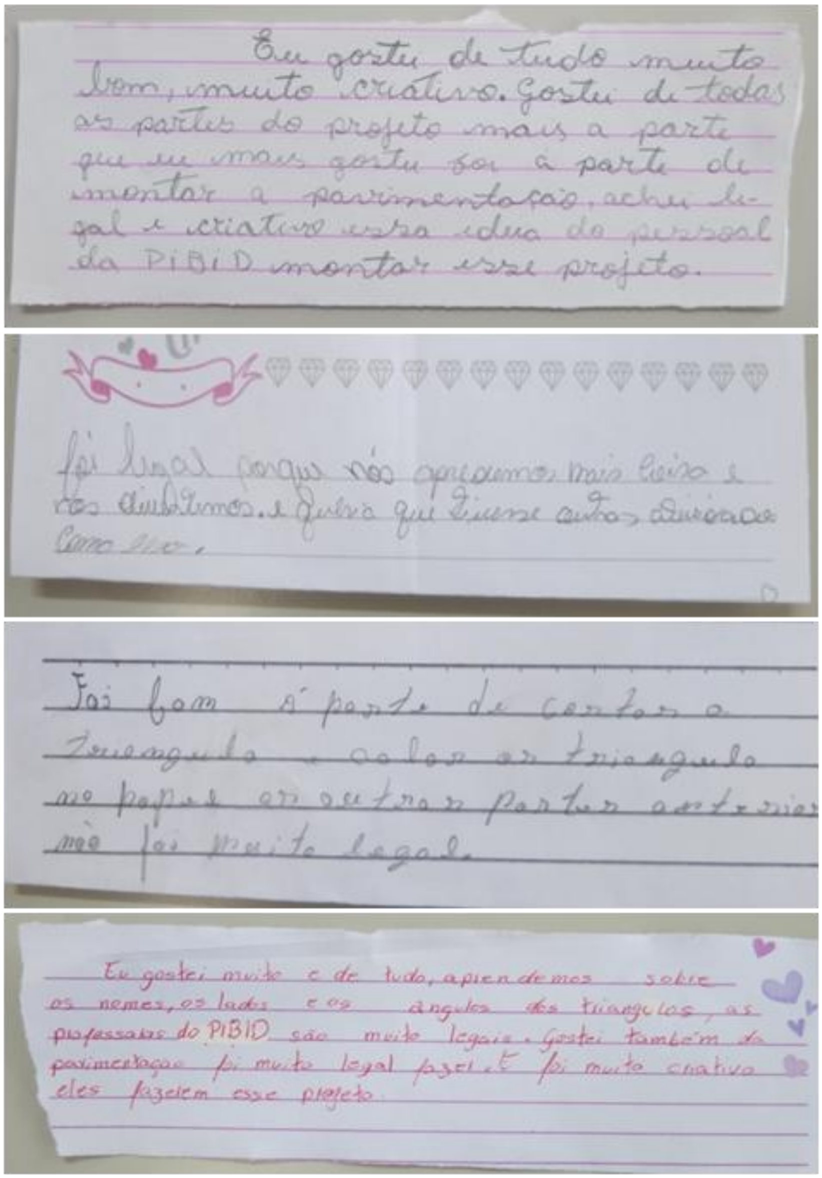

Figura 17 - Comentários dos alunos sobre o resultado da Oficina de Pavimentação

É importante destacar que esse Projeto de Pavimentação envolveu todas as turmas de 6º ao 9º ano do ensino fundamental das duas escolas parceiras do Pibid. Os alunos bolsistas do Pibid Matemática - UFES - Vitória dividiram-se em pequenos grupos, envolvendo no mínimo um componente de cada escola e cada equipe responsabilizou-se por trabalhar com uma série específica, enfocando assuntos matemáticos que pudessem ser inseridos no contexto de pavimentação. A Figura 18 mostra os painéis com as pavimentações de todas as turmas nas duas escolas.

Figura 18 – Painel com as pavimentações das escolas

Conclusão

Neste artigo, divulgamos uma experiência de trabalho em duas escolas municipais sobre pavimentação com triângulos equiláteros. Como a geometria é um tema muito importante, porém pouco abordado no ensino básico, os bolsistas do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência de Matemática da UFES resolveram tratá-lo de uma forma interativa para os alunos. Escolhemos o assunto pavimentação por ser algo bastante atrativo, artisticamente envolvente, e pela possibilidade de exploração de diversos conceitos matemáticos. Em especial, nos 7º anos, foram apresentados os conceitos de vértices, arestas, ângulos, assim como as figuras geométricas, em especial, os triângulos equiláteros e suas classificações quanto aos lados e ângulos. Assim, aplicamos uma Oficina com bastantes atividades participativas e criativas como a construção do triângulo equilátero com régua e compasso, material quase nunca utilizado nas escolas, até a formação de uma pavimentação.

Maria Montessori acreditava não haver aprendizagem sem ação: "Nada deve ser dado à criança, no campo da matemática, sem primeiro apresentar-se a ela uma situação concreta que a leve a agir, a pensar, a experimentar, a descobrir, e daí, a mergulhar na abstração" (MONTESSORI apud AZEVEDO, 1979, p. 27).

Agradecimentos

Os autores agradecem a CAPES pelo apoio ao desenvolvimento deste trabalho, por meio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - Pibid.

Referências bibliográficas

AZEVEDO, Edith D. M. Apresentação do trabalho matemático pelo sistema montessoriano. In: Revista de Educação e Matemática, n. 3, 1979 (p. 26-27).

DANTE, Luiz Roberto. **Tudo é Matemática:** 5a série. São Paulo: Ática, 2005.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACHADO, Antonio. **Matemática e Realidade:** Ensino Fundamental, 7ª série. São Paulo: Atual, 2005.

LORENZATO, Sérgio. **Para aprender matemática**. Campinas, SP: Autores associados, 2006 (Coleção Formação de Professores).

PAIVA, Manuel. **Matemática:** Ensino Médio, vol.1. São Paulo: Moderna, 2004.

SERRA, Andreia; BARATA, Dora; SACRAMENTO, Sofia. **Pavimentações.** 2004. Disponível em: <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2003/icm22/>. Acesso em: 24 jun. 2014.

SILVA, Maria João Pereira da; VIEIRA, Filipe Mendes. **O estudo de Pavimentações Regulares e Semi - Regulares com Ambiente de Geometria Dinâmica.** 2011. 109 f. Dissertação (Mestrado) - Curso de Ensino da Matemática, Universidade Nova de Lisboa, Lisboa, 2011.