



ISSN 2316-7785

ANÁLISE DAS DIFICULDADES DOS ALUNOS DO ENSINO MÉDIO EM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Nitiele Medeiros Contessa
Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete
e-mail: nitielemc@gmail.com

Marcia Viaro Flores
Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete
marcia.flores@iffarroupilha.edu.br

Laize Dariele de Lima Trindade
Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete
e-mail: trindadedariele@hotmail.com

Gessica Pereira Trindade
Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete
e-mail: gessica.trindadep@gmail.com

Resumo

Este trabalho é um relato de experiência que é parte integrante de um projeto de ensino intitulado: Análise de Erros na Produção Matemática de Alunos do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio que tem como objetivo principal analisar a produção matemática dos alunos do terceiro ano do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete, verificando os erros cometidos, para utilizar os resultados dessa análise como metodologia de ensino. O método aplicado foi verificação e discussão dos erros na resolução de questões envolvendo conteúdo de análise combinatória, tendo como base questões do Exame Nacional do Ensino Médio dos anos de 2010, 2011, 2012 e 2013 que agregavam este conteúdo, pedindo aos alunos que o desenvolvimento da questão fosse colocado de forma escrita, o mais detalhado possível, para que pudesse ser observado. A análise dos erros foi feita com base na literatura encontrada sobre o tema, da qual podemos concluir que muitos dos erros encontrados se assemelham aos relatos de outros pesquisadores, destacando entre estes, a interpretação da questão e consequente dificuldade do emprego da técnica adequada para resolução.

Palavras-chave: Análise de Erros. Análise Combinatória. Ensino Médio.



1. Introdução

Um dos maiores desafios no ensino médio é promover um aprendizado que leve a efetivar a aprendizagem dos alunos, principalmente na área da Matemática. Sabemos que não existe uma “receita” para um ensino eficaz e que funcione para todos, muitas vezes na sala de aula é difícil ter um olhar mais atento e individualizado. Sendo assim, temos consciência que atividades extracurriculares como projetos são importantes para que se oportunize aos estudantes uma formação completa.

Esse relato de experiência é parte de um projeto de ensino destinado aos estudantes do terceiro ano do Curso Técnico em Informática Integrado ao Ensino Médio do Instituto Federal Farroupilha – Câmpus Alegrete, tendo como principal objetivo analisar a produção matemática dos alunos, identificando os erros cometidos, para utilizar os resultados como metodologia de ensino.

Utilizamos esse processo de análise na resolução de questões envolvendo conteúdo de análise combinatória, tendo como base questões do Exame Nacional do Ensino Médio dos anos de 2010, 2011, 2012 e 2013 que envolviam este conteúdo. Esta escolha se fez por considerarmos o erro não como algo negativo, mas uma oportunidade de estudo e aprendizagem, tanto para os alunos quanto para o professor da disciplina e os estudantes do curso de licenciatura envolvidos no projeto.

2. Referencial Teórico

Sobre análise de erros

Ensinar não é uma tarefa fácil, e ensinar Matemática parece ser ainda mais difícil. Alguns preconceitos parecem ser impostos culturalmente e às vezes se constituem em uma



barreira para que a aprendizagem se dê de forma plena. Para muitos estudantes, a Matemática é vista como uma ciência dura, difícil e bastante complexa.

Mudanças têm sido propostas no ensino de Matemática e algumas metodologias começaram a ser utilizadas na melhoria dos processos de ensino e aprendizagem. Uma dessas metodologias é a análise de erros, com a qual estamos trabalhando na execução do projeto. Conforme Cury (2008),

Por outro lado, a análise de erros pode ser considerada uma metodologia de ensino, visto que, ao devolver para os alunos as questões analisadas detalhadamente, o professor lhes proporciona a oportunidade de se conscientizar das suas dificuldades e de discuti-las com ele ou com seus colegas. Além disso, o próprio professor pode, a partir dos erros mais frequentes, elaborar materiais instrucionais que venham auxiliar os estudantes a superarem os problemas encontrados. (CURY, 2008, p. 2)

O erro no processo de ensino e aprendizagem é visto como algo negativo, como uma ausência de saber. Porém, se analisarmos por outro ângulo, pode-se perceber que a análise do erro contribui no sentido de entender melhor qual foi a etapa não compreendida no processo, podendo tornar-se uma ferramenta de grande auxílio para o professor no sentido de melhor planejar suas atividades.

Segundo (Costa apud Feltes, 2007, p. 29), “a análise do ‘erro’ nos permite valorizar o processo subjacente às respostas, não apenas a resposta como um produto que se encerra em si mesmo”. Para (Borasi apud Viola dos Santos, 2007, p. 24), os erros podem ser considerados como “trampolins” para a aprendizagem, oportunizando aos alunos uma reflexão sobre seus próprios processos.

Sendo assim, percebemos a importância de refletirmos sobre a prática em sala de aula, buscando novas metodologias para nossas próprias experiências.

O erro e a Análise Combinatória

Na literatura podemos encontrar exemplos de categorização dos erros cometidos quando se trata de análise combinatória. Segundo (Batanero, Navarro-Pelayo e Godino apud Alves, 2012, p.30) temos uma classificação baseada em onze categorias de erros,



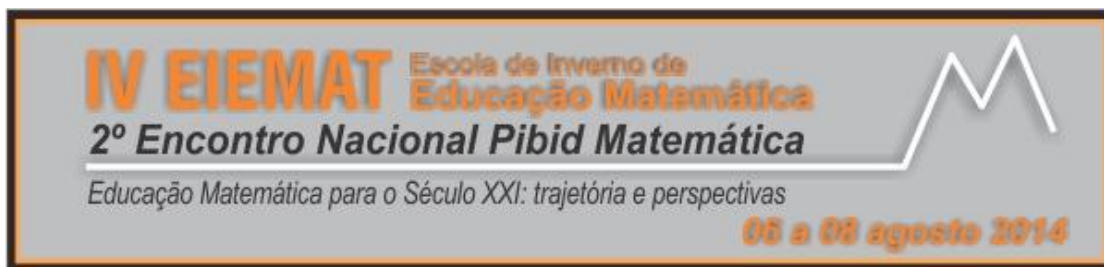
envolvendo desde a interpretação do modelo a ser utilizado até a formação equivocada de partições. Alves (2012), em seu estudo, leva em consideração as onze categorias, mas agrupa algumas consideradas semelhantes e reduz esse número para sete.

No presente trabalho adotamos a categorização de Alves (2012), que é dada da seguinte forma:

- Erro 1: trocar o tipo de modelo (técnica) necessário(a) para resolver o problema;
- Erro 2: erros de ordem, tanto quando a mesma é essencial, como quando é irrelevante;
- Erro 3: erros de repetição (repete quando não pode e não repete quando pode), considerar idênticos objetos que são distinguíveis, e considerar diferentes objetos que são indistinguíveis e confusão entre tipos de subconjuntos, quando os mesmos são distinguíveis ou indistinguíveis;
- Erro 4: enumeração não sistemática, que permite encontrar algumas soluções do problema, mas não todas, ou soluções repetidas já encontradas anteriormente, interpretação ou construção errada de um diagrama de árvore correspondente à questão e erro na formação de partições, seja pelo fato da união de todas as partições possíveis não formar todo o conjunto original (contar a menos), seja pelo fato de considerar um número maior do que o de todas as partições possíveis.
- Erro 5: resposta intuitiva errada, que não possui justificativa;
- Erro 6: identificar o modelo correto, mas utilizar uma fórmula errada;
- Erro 7: não lembrar o significado de cada parâmetro na fórmula utilizada na resolução.

Através da categorização proposta, trabalhamos no sentido de identificar e classificar os erros apresentados.

Metodologia



Esse trabalho é resultado parcial de um projeto destinado aos estudantes que busca proporcionar a uma formação mais sólida no que diz respeito aos conteúdos específicos da disciplina de Matemática.

Numa primeira etapa do projeto, os estudantes resolveram quatro questões selecionadas das provas de Matemática do ENEM descrevendo, detalhadamente, o caminho utilizado para chegar à resposta, em seguida, foi feita uma análise. Após, foram devolvidos esses resultados em forma de discussão em grupo, onde foram trabalhados os principais erros cometidos, de forma a encontrar a melhor maneira de solucioná-los.

3. Resultados

Abaixo seguem as questões trabalhadas e uma análise dos erros cometidos para cada uma delas. Tivemos, no total, dez estudantes que participaram desta etapa e resolveram as questões propostas. A escolha das questões do ENEM se dá pelo fato desses estudantes serem concluintes do ensino médio e demonstrarem interesse por processos seletivos. Como a ementa do curso prevê o conteúdo de Análise Combinatória, selecionamos questões que pudessem verificar desde o princípio fundamental de contagem até a idéia do uso de combinações simples.

Questão1:

Questão 175

Considere que um professor de arqueologia tenha obtido recursos para visitar 5 museus, sendo 3 deles no Brasil e 2 fora do país. Ele decidiu restringir sua escolha aos museus nacionais e internacionais relacionados na tabela a seguir.

Museus Nacionais	Museus Internacionais
Masp – São Paulo	Louvre – Paris
MAM – São Paulo	Prado – Madri
Ipiranga – São Paulo	British Museum – Londres
Imperial – Petrópolis	Metropolitan – Nova York

De acordo com os recursos obtidos, de quantas maneiras diferentes esse professor pode escolher os 5 museus para visitar?

- A** 6 **B** 8 **C** 20 **D** 24 **E** 36

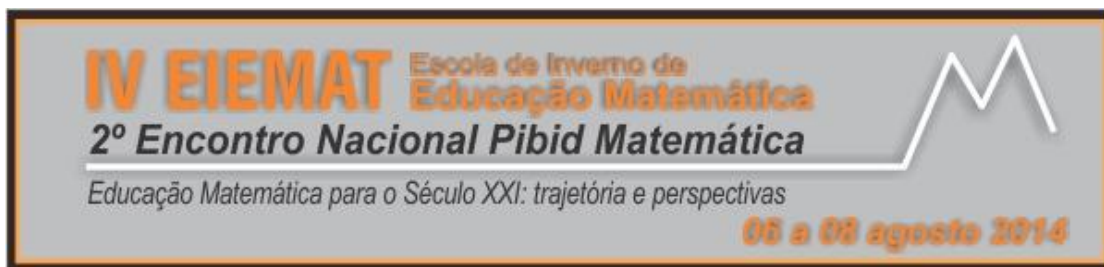


Figura 1 – Questão do ENEM 2010. Fonte: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-antiores/provas-e-gabaritos>

No quadro desenhemos o panorama com relação à quantidade de erros e acertos relativos à questão 1, bem como seu percentual em cada categoria.

		Erro 1	Erro 2	Erro 3	Erro 4	Erro 5	Erro 6	Erro 7
Erros	4	50%	30%	0%	10%	10%	10%	0%
Acertos	6							

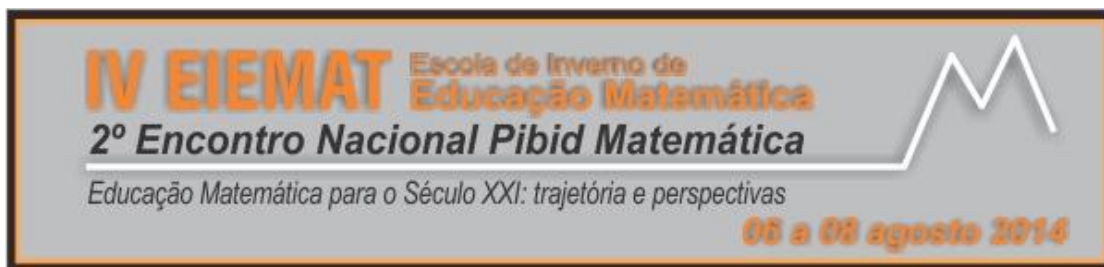
Quadro 1 – Sistematização dos erros relativos à questão 1

Percebemos que essa questão, trata-se de uma combinação simples, juntamente com o princípio multiplicativo, pois temos as categorias de museus nacionais e internacionais. O ponto chave para a resolução é que a ordem não influencia na visita.

Sendo assim, de acordo com a categorização dos erros, podemos destacar o aparecimento, com frequência maior, dos erros 1 e 2. Devido ao fato da ordem não influenciar e de termos que aplicar o princípio multiplicativo, na nossa percepção, gerou os erros citados. Destacando o aparecimento dos erros 4, 5 e 6, com uma menor frequência. Sendo que, algumas respostas foram classificadas em mais de uma categoria de erros.

No grupo de discussões feito após a categorização dos erros, abordamos essa questão, questionando-os sobre a ordem. Ficando claro aos que cometeram erros na resolução, que se tratava de um problema de combinação. As dúvidas restantes, foram sanadas após a visualização na árvore de possibilidades.

Questão 2:



QUESTÃO 144

O diretor de uma escola convidou os 280 alunos de terceiro ano a participarem de uma brincadeira. Suponha que existem 5 objetos e 6 personagens numa casa de 9 cômodos; um dos personagens esconde um dos objetos em um dos cômodos da casa. O objetivo da brincadeira é adivinhar qual objeto foi escondido por qual personagem e em qual cômodo da casa o objeto foi escondido.

Todos os alunos decidiram participar. A cada vez um aluno é sorteado e dá a sua resposta. As respostas devem ser sempre distintas das anteriores, e um mesmo aluno não pode ser sorteado mais de uma vez. Se a resposta do aluno estiver correta, ele é declarado vencedor e a brincadeira é encerrada.

O diretor sabe que algum aluno acertará a resposta porque há

- A 10 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- B 20 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- C 119 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- D 260 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.
- E 270 alunos a mais do que possíveis respostas distintas.

Figura 2 – Questão do ENEM 2012. Fonte: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-antteriores/provas-e-gabaritos>

No quadro desenhamos o panorama com relação à quantidade de erros e acertos relativos à questão 2, bem como o seu percentual em cada categoria.

		Erro 1	Erro 2	Erro 3	Erro 4	Erro 5	Erro 6	Erro 7
Erros	6	30%	0%	0%	0%	10%	0%	0%
Acertos	4							

Quadro 2 – Sistematização dos erros relativos à questão 2

Nessa questão trata-se de uma correta identificação dos dados do problema, relacionando objetos, personagens e cômodos, num primeiro momento. Notando o aparecimento da ideia do princípio multiplicativo e numa última etapa, a releitura e interpretação do problema conforme as alternativas.

A questão apresenta um percentual de erros maior do que a anterior, que julgamos acontecer por uma falta de interpretação e de uma fórmula que conduza à resposta.



Destacamos o aparecimento do erro 1 e do erro 5. E o aparecimento de dois erros não categorizados, mas que foram identificados. O primeiro refere-se a um erro de interpretação dos dados, pois o desenvolvimento foi correto, até a etapa de releitura, sendo que uma das alternativas conduz a resposta equivocada. O segundo se refere a um erro de contas, não prejudicando o desenvolvimento do raciocínio, mas conduzindo ao erro no momento de escolher a alternativa.

Na etapa devolutiva, o principal ponto volta na questão do princípio multiplicativo, onde o entendimento é que a segunda escolha depende da primeira parece não ser claro. Na própria releitura do problema, muitos perceberam os erros de interpretação.

Questão 3:

QUESTÃO 177

O *designer* português Miguel Neiva criou um sistema de símbolos que permite que pessoas daltônicas identifiquem cores. O sistema consiste na utilização de símbolos que identificam as cores primárias (azul, amarelo e vermelho). Além disso, a justaposição de dois desses símbolos permite identificar cores secundárias (como o verde, que é o amarelo combinado com o azul). O preto e o branco são identificados por pequenos quadrados: o que simboliza o preto é cheio, enquanto o que simboliza o branco é vazio. Os símbolos que representam preto e branco também podem estar associados aos símbolos que identificam cores, significando se estas são claras ou escuras.

Folha de São Paulo. Disponível em: www1.folha.uol.com.br. Acesso em: 18 fev. 2012 (adaptado).

De acordo com o texto, quantas cores podem ser representadas pelo sistema proposto?

- ☐ A 14
- ☐ B 18
- ☐ C 20
- ☐ D 21
- ☐ E 23

Figura 3 – Questão do ENEM 2012. Fonte: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-antiores/provas-e-gabaritos>

No quadro desenhamos o panorama com relação à quantidade de erros e acertos relativos à questão 3, bem como o seu percentual em cada categoria.

		Erro 1	Erro 2	Erro 3	Erro 4	Erro 5	Erro 6	Erro 7
Erros	7	10%	0%	0%	30%	40%	0%	0%



Acertos	2							
Sem Resposta	1							

Quadro 3 – Sistematização dos erros relativos à questão 3

Aqui, a ideia é trabalhar com a identificação das cores secundárias que podem ser formadas com as cores primárias dadas, tendo como ponto central o fato de não importar a ordem para a obtenção das cores secundárias. Após essa identificação, perceber as variações para cada cor entre claro e escuro.

O percentual de erros para essa questão foi considerável, sendo que foram identificados os erros 4 e 5 com maior frequência. O erro 1 também foi identificado, mas em apenas uma resposta. Podemos destacar, que dos dois acertos, um deles foi sem resolução, o que torna a análise difícil.

Ao reunir o grupo para a devolutiva e discussão dos resultados, foi salientado que o texto da questão foi de difícil leitura e interpretação, sendo apontado este o principal motivo de erros. Nessa questão discutimos o fato de ter aparecido em algumas resoluções um começo de listagem dos elementos, mas que não evoluiu até completar o raciocínio.

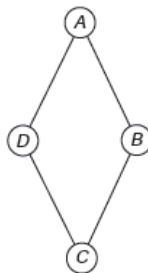
Questão 4:

QUESTÃO 165

Um artesão de joias tem à sua disposição pedras brasileiras de três cores: vermelhas, azuis e verdes.

Ele pretende produzir joias constituídas por uma liga metálica, a partir de um molde no formato de um losango não quadrado com pedras nos seus vértices, de modo que dois vértices consecutivos tenham sempre pedras de cores diferentes.

A figura ilustra uma joia, produzida por esse artesão, cujos vértices *A*, *B*, *C* e *D* correspondem às posições ocupadas pelas pedras.



Com base nas informações fornecidas, quantas joias diferentes, nesse formato, o artesão poderá obter?

- ☐ A 6
- ☐ B 12
- ☐ C 18
- ☐ D 24
- ☐ E 36

Figura 4 – Questão do ENEM 2013. Fonte: <http://portal.inep.gov.br/web/enem/edicoes-antteriores/provas-e-gabaritos>

No quadro desenhamos o panorama com relação à quantidade de erros e acertos relativos à questão 4, bem como seu percentual em cada categoria.

		Erro 1	Erro 2	Erro 3	Erro 4	Erro 5	Erro 6	Erro 7
Erros	7	50%	0%	0%	20%	10%	0%	0%
Acertos	3							

Quadro 4 – Sistematização dos erros relativos à questão 4

Pelas nossas reflexões, essa é a mais exigente no sentido de interpretação e percepção de respostas que se repetem. O primeiro passo é ter a noção de que vértices



consecutivos não podem ter mesma cor de pedra, a partir daí, notar também que algumas configurações se repetem, devendo ser desconsideradas no final.

Notamos o aparecimento dos erros 1, 4 e 5, sendo o erro 1 de maior frequência. Destacamos também que um dos acertos apresenta desenvolvimento incorreto, porém foi marcada a alternativa certa.

Na devolutiva destacamos a opção de citar as possibilidades, o que poderia conduzir à percepção de alternativas que se repetem.

4. Considerações Finais

Ao finalizar essa primeira etapa, percebemos o quanto é importante esse tipo de projeto, tanto na formação inicial do licenciando, quanto na formação dos alunos do ensino médio, pois constitui um espaço de discussão, com um olhar mais individualizado para a produção matemática de cada um dos participantes e permite a integração entre os alunos do ensino médio, os licenciandos e a professora regente, constituindo um espaço estimulador para estudo e discussão de tópicos da matemática.

Uma das grandes contribuições do trabalho é fazer com que os estudantes analisem sua própria produção. No momento em que houve a devolutiva, realizada na forma de um grupo de discussão, pode-se perceber o interesse dos alunos, e ao conduzir a discussão notamos que algumas dúvidas ainda eram latentes.

Temos aqui claramente a ideia que esse é um primeiro passo dado em relação ao estudo da teoria de análise de erros e percebemos o quanto ela é rica, tanto como metodologia de pesquisa quanto de ensino. Sabemos que a interpretação dos erros é uma das formas de colaborar com a aprendizagem dos alunos, mas esta não resolve todas as dificuldades, pois a matemática apresenta muitas especificidades ao trabalhar com objetos abstratos.

5. Referências



ALVES, R. de C. *O ensino de análise combinatória na educação básica e a formação de professores*. 2012. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro.

CURY, H. N. Avaliação e análise de erros em educação matemática. In: *Jornada Nacional de Educação Matemática*. 2008, Passo Fundo. Disponível em: < http://www.unifra.br/professores/13935/CURY_Jornada.pdf >. Acesso em 07 jul 2014.

CURY, H. N.; SILVA, P. N. da. Análise de erros em resolução de problemas: uma experiência de estágio em um curso de licenciatura em matemática. In: *R.B.E.C.T.*, vol.1, n.1, jan/abr, 2008. Disponível em: <http://revistas.utfpr.edu.br/pg/index.php/rbect/article/viewFile/226/199>. Acesso em 13 mar 2014.

FELTES, R.Z. *Análise de erros em potenciação e radiciação: um estudo com alunos de ensino fundamental e médio*. Dissertação de mestrado. Porto Alegre, 2007. Disponível em: <http://repositorio.pucrs.br/dspace/handle/10923/3108>. Acesso em 10 mar 2014.

SPERAFICO, Y. L. S.; GOLBERT, C. S. *Análise de erros na resolução de problemas envolvendo equações algébricas do 1º grau*. IX ANPED SUL, 2012. Disponível em: <http://www.ucs.br/etc/conferencias/index.php/anpedsul/9anpedsul/paper/view/35/255>. Acesso em 13 mar 2014.

VIOLA DOS SANTOS, J. R. *O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática*. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) – Universidade Estadual de Londrina, Londrina.