

ISSN 2316-7785

UM MODELO MATEMÁTICO PARA O LANÇAMENTO DE FOGUETES A BASE DE ÁGUA

Alexandre Bronzoni Disconzi

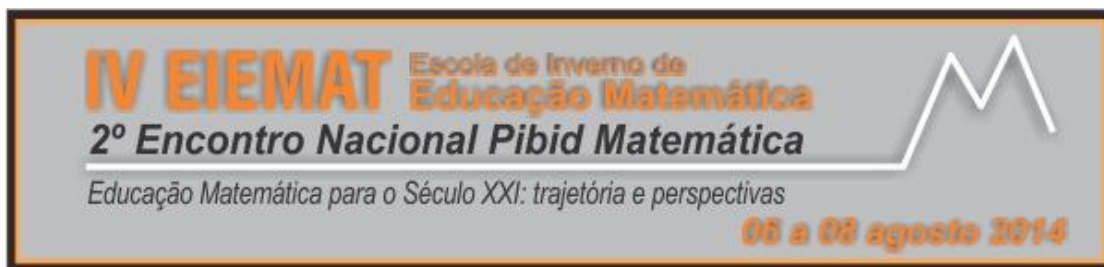
Instituto Federal Farroupilha – Campus São Borja
alelosgambas@hotmail.com

Alex Sandro Gomes Leão
Instituto Federal Farroupilha – Campus São Borja
profaleao@gmail.com

Resumo

Este trabalho relata uma experiência vivenciada na disciplina de Matemática Básica com uma turma do primeiro semestre de alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha-Campus São Borja. Ao ingressarem no curso superior uma das necessidades dos futuros professores era aplicar o conhecimento vivenciado no semestre em situações práticas, para isso, foi proposto um trabalho envolvendo a aplicação de funções quadráticas por meio da Modelagem Matemática. Para este trabalho foi proposto a seguinte situação: Construa, lance, observe e Modele Matematicamente a trajetória de um foguete a base de água. Aplicamos a Modelagem como uma ferramenta de ensino; para isso nos embasamos em uma das classificações apresentada por Barbosa (2001), onde ao professor cabe elaborar o problema e aos alunos sua investigação, sendo necessário sair da sala de aula para pesquisar dados referentes à situação. Com base em observações, nas apresentações dos alunos e nos resultados obtidos de suas pesquisas, podemos concluir que para trabalhar com Modelagem Matemática, se faz necessário “um desacomodar”, “um buscar mais”, o que o aluno não está acostumado, tornando o trabalho com modelagem muito trabalhoso. O fato de os alunos terem que buscar novos conhecimentos, ou buscar respostas em outros conteúdos vai contra o que estão acostumados. Por outro lado, mostrar uma nova visão de ensino, se faz necessário para os futuros professores, para que estes possam aos poucos se apropriarem de novos métodos de ensino, agregando novas metodologias a seus planejamentos. É no ensino superior que estes métodos devem ser apresentados aos futuros professores, e é nele que os alunos devem aprender a trabalhar.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, Ensino-aprendizagem, Ensino Superior.

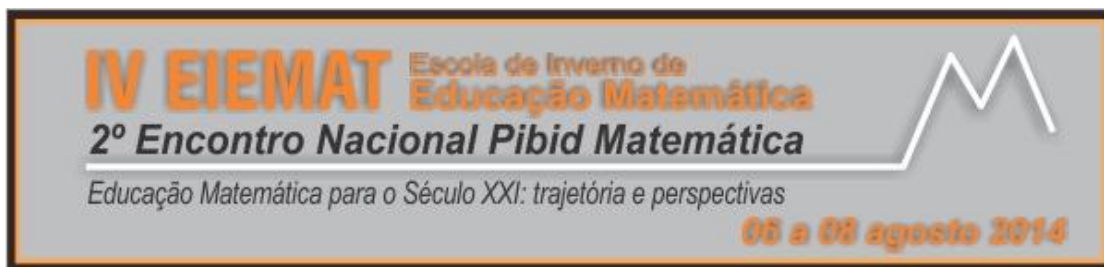


Considerações Iniciais

Os alunos ingressam no ensino superior com uma visão empírica da Matemática, desejando que todos os conteúdos aqui trabalhados tenham uma aplicação direta no seu dia a dia, difícil é convencê-los de que muitos dos conteúdos que estão sendo estudados são bases de um processo que conduz para um conhecimento maior, que permite transformarmos dados reais em modelos matemáticos. E que para se apropriar desta gama de conhecimentos, primeiro se faz necessário compreender conceitos básicos de matemática que são estudados no ensino fundamental e médio.

Durante o primeiro semestre de 2014, este foi uma das aflições dos alunos que cursaram a disciplina de Matemática Básica no Instituto Federal Farroupilha – Campus São Borja. Tentando minimizar esta aflição foi proposto um trabalho de Modelagem Matemática, por acreditar que este método de ensino possibilita ao professor aplicar a matemática trabalhada em sala de aula com uma aplicação de um fenômeno de nossas vidas. No entanto, nem sempre o caminho que desejamos tomar para modelar um fenômeno físico, será realmente o suficiente para modelar o que pensamos. Quando trabalhamos com Modelagem Matemática em muitos casos, nossas pesquisas nos levam a caminhos que onde mais pesquisas são necessárias e mais conhecimento matemático, físico, ou qualquer outro se fazem necessários para compreendermos o fenômeno estudado. Quase nunca, os conteúdos estudados em sala de aula serão suficientes para resolvermos o problema proposto. Porém o professor como mediador do processo ensino-aprendizagem, pode direcionar os alunos para um novo conhecimento, e para que este siga um rumo, no qual os conteúdos trabalhados sejam percebidos no decorrer do trabalho.

Assim, que nosso trabalho consistia em possibilitar aos alunos encontrarem uma aplicação direta das funções quadráticas, para isso fizemos a seguinte proposta: Construa



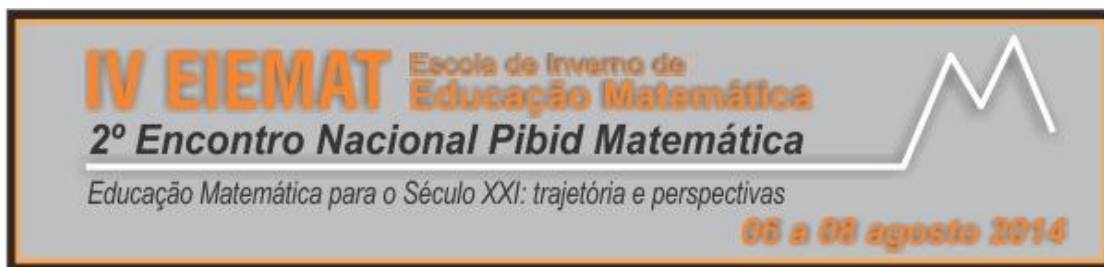
um foguete a base de água, faça seu lançamento e encontre um modelo matemático que determine a sua trajetória.

O Ensino com Modelagem Matemática

O trabalho com Modelagem não é novo, seu conceito surge durante o Renascimento, para auxiliar na construção das ideias iniciais da Física. Atualmente, constitui um ramo da Matemática que auxilia diversas áreas do conhecimento. O trabalho com Modelagem oferece uma maneira de colocar a aplicabilidade da matemática em situações do cotidiano, no currículo escolar em conjunto com o tratamento formal que é predominante no modelo tradicional. Essa ligação da matemática escolar com a matemática da vida cotidiana do aluno cumpre um papel importante no processo de escolarização do indivíduo, pois dá sentido ao conteúdo estudado, facilitando sua aprendizagem e tornando-a mais significativa.

Em face de seus pressupostos multidisciplinares, a Modelagem foi transportada para o terreno do ensino-aprendizagem e vem sendo empregada como metodologia nos últimos trinta anos, com objetivo de trabalhar problemas reais em sala de aula.

Alguns autores divergem no que concerne ao uso da Modelagem em sala de aula, no entanto, Bassanezi (1994) destaca a motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sócio-cultural da matemática. Porém, todos parecem aceitar o fato de que, por meio da Modelagem, podem-se motivar os alunos, desenvolver atitude crítica perante a realidade, despertar a criatividade e impulsionar os estudantes para utilizarem estratégias informais.



Borba, Moneghetti e Hermini (1997) consideram que Modelagem “(...) pode ser vista como um esforço de descrever matematicamente um fenômeno que é escolhido pelos alunos com o auxílio do professor”.(p.76).

Para Barbosa (2001) Modelagem “(...) é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade”(p.6).

Araújo (2002), por sua vez, entende ser a Modelagem “(...) uma abordagem por meio da matemática, de um problema não matemático da realidade, escolhida pelos alunos reunidos em grupos, de tal forma que as questões da Educação Matemática Crítica embasem o desenvolvimento do trabalho” (p.39).

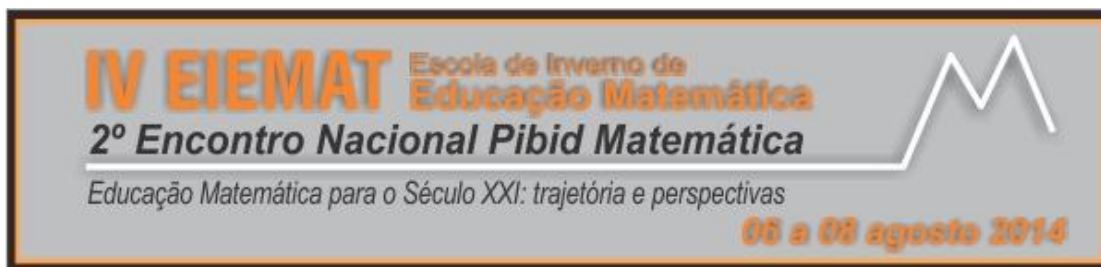
Vemos, então, que um problema escolhido pelos alunos e estes inseridos em um ambiente propício, é fator que vem sendo apontado como fundamental para o uso dessa abordagem metodológica no ensino de Matemática.

Para D’ambrosio (1986): Modelagem é um processo muito rico de encarar situações e culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial.

Já, Biembengut (2005) considera que o processo de modelagem, pode ser um processo artístico, visto que, para se elaborar um modelo, além de conhecimento de matemática, o modelador precisa ter uma dose significativa de intuição e criatividade para interpretar e compreender o contexto, saber discernir qual conteúdo matemático melhor se adapta e também ter senso lúdico para jogar com as variáveis envolvidas.

Podemos então dizer que modelagem é um processo que envolve a obtenção de um modelo a partir de situações-problema, constitui-se de um conjunto de procedimentos que objetiva construir um modelo para analisar matematicamente os fenômenos que ocorrem no cotidiano, ajudando a interpretar, fazer previsões e tomar decisões.

De acordo com Bean,



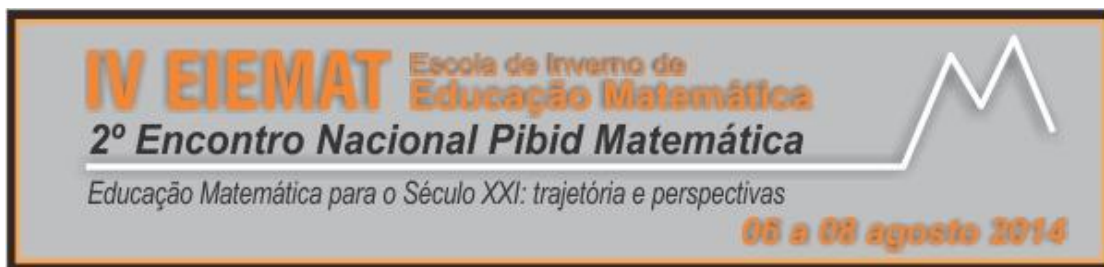
A essência da **modelagem matemática** consiste em um processo no qual as características pertinentes de um objeto ou sistema são extraídas, com a ajuda de hipóteses e aproximações simplificadoras e representadas em termos matemáticos (o modelo). As hipóteses e as aproximações significam que o modelo criado por esse processo é sempre aberto à crítica e ao aperfeiçoamento (2001, p.53).

Tomando por base as definições de modelagem apresentada por diferentes autores, é possível identificar nelas a formulação e a resolução de problemas como uma atividade inerente ao processo de modelagem, da qual decorre a elaboração de um modelo. Segundo Ribeiro (2009), “Essa característica central na modelagem matemática, permite que outras em formulação e resolução de problemas não sejam confundidas com atividades de modelagem, como é muito comum ocorrer”(p.66), ou seja, para haver uma atividade de modelagem matemática deve existir juntamente uma proposta de resolução de problemas em sua essência.

O Problema Proposto e o Modelo Encontrado pelos Alunos

Ao trabalhar a disciplina de Matemática Básica no Instituto Federal Farroupilha – Campus São Borja, procurei enfatizar os conteúdos de acordo com a necessidade dos alunos, e para isso sempre fazendo uso de alguma Metodologia que propicie o ensino dos conteúdos matemáticos que foram trabalhados em sala de aula.

Para esta experiência, procuramos trabalhar uma aplicação das funções quadráticas em algo que os alunos pudessem manipular e sentir a necessidade do uso da matemática para que seu experimento pudesse ter um respaldo científico e uma descrição matemática que garantisse seu sucesso. Para isso, fizemos uso da Modelagem Matemática, que, segundo Barbosa (2001), define “Modelagem como “(...) um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações com referência na realidade”(p.31), considerando que existem três diferentes possibilidades de aplicação dessa estratégia, que denomina como casos:



Caso 1) O professor apresenta o problema inicial, devidamente relatado, informando os dados qualitativos e quantitativos, e cabe aos alunos a investigação.

Caso 2) Cabe ao professor elaborar o problema e aos alunos sua investigação, sendo necessário sair da sala de aula para pesquisar dados referentes à situação.

Caso 3) Trabalhar projetos desenvolvidos a partir de temas ‘não-matemáticos’, que podem ser escolhidos pelo professor ou pelos alunos, em que a formulação do problema, a coleta dos dados e a resolução são tarefa dos alunos.

Para resumir os três casos o autor apresenta uma tabela.

	Caso 1	Caso 2	Caso 3
Formulação do problema	Professor	Professor	Professor/Aluno
Simplificação	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Coleta de dados	Professor	Professor/Aluno	Professor/Aluno
Resolução do problema	Professor/Aluno	Professor/Aluno	Professor/Aluno

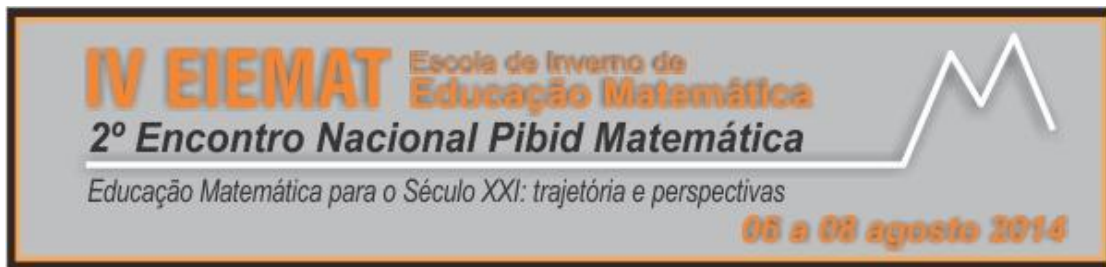
Figura 1: Casos de Modelagem Matemática segundo Barbosa

Assim que seguindo os passos propostos por Barbosa organizamos nosso trabalho da seguinte maneira:

Primeiro Momento: os alunos foram organizados em grupos de quatro elementos cada;

Segundo Momento: o professor propôs a turma o problema de pesquisa, que consistia em: Construir um foguete a base de água, lançar o foguete e observar sua trajetória. Descrever a trajetória percorrida pelo foguete com um modelo matemático.

Terceiro Momento: foi proposto aos alunos momentos de pesquisa na biblioteca da instituição para que eles pudessem pesquisar e construir uma base de conceitos matemáticos ou físicos capazes de solucionar o problema. Neste interim, o professor era o mediador do processo, passando de grupo em grupo orientado e levantando hipóteses de grupo em grupo.



Quarto Momento: Após quinze dias de pesquisas realizadas na biblioteca, e na internet, conversas com professores de outras disciplinas, cada grupo apresentou para os demais os resultados encontrados para o problema.

Ressaltamos aqui, que teve grupos que não conseguiram resolver o problema, e solicitaram ajuda dos outros grupos, apresentando após uma solução compatível com as apresentadas a seguir.

A seguir apresentaremos duas soluções encontradas pelos grupos.

Grupo 1: Buscou o recurso da Física para solucionar o problema.

Os alunos construíram uma plataforma de lançamento a partir da qual conseguiam colocar um ângulo de inclinação desejável, o ângulo escolhido foi de 60° . Após o lançamento os dados coletados foram:

- *Distância = 14 metros*
- *Ângulo de lançamento = 60°*
- *Gravidade = $9,8 \text{ m/s}^2$*
- *$\text{Sen } 60^\circ = \text{sen } 120^\circ = 0,866$*
- *$\text{Cos } 60^\circ = \text{cos } 120^\circ = 0,05$*

Com esses dados e de posse do alcance atingido pelo foguete, os alunos queriam saber a velocidade inicial de lançamento, para isso usaram a seguinte fórmula:

ALCANCE DO FOGUETE

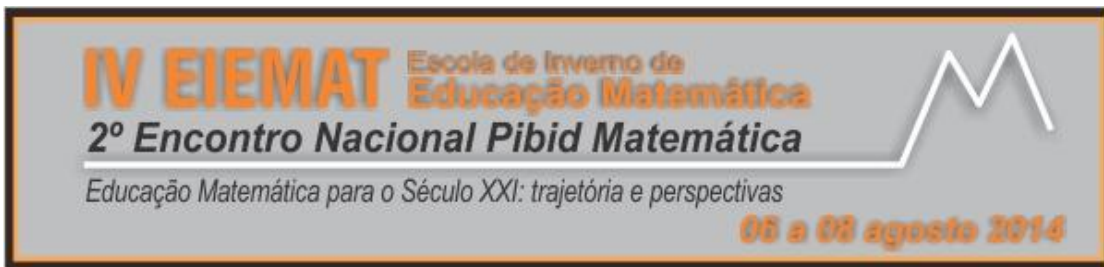
$$A = V_o^2 \cdot \frac{\text{sen } 2\sigma}{g}$$

$$14 = V_o^2 \cdot \frac{\text{sen } 120^\circ}{9,8}$$

$$14 \cdot 9,8 = V_o^2 \cdot 0,866$$

$$\frac{14 \cdot 9,8}{0,866} = V_o^2$$

$$V_o^2 = 158,43$$



$$V_o = 12,58m/s$$

Calcularam também o tempo total do percurso do foguete.

TEMPO TOTAL DO FOGUETE

$$Tt = \frac{2V_o \cdot \text{sen} \sigma}{g}$$

$$Tt = \frac{2 \cdot 12,58 \cdot \text{sen } 60^\circ}{9,8}$$

$$Tt = \frac{2 \cdot 12,58 \cdot 0,866}{9,8}$$

$$Tt = 2,22s$$

De posse desses dados calcularam a altura máxima atingida pelo foguete.

ALTURA MÁXIMA

$$H = \frac{V_o^2 \cdot \text{sen}^2 \sigma}{2g}$$

$$H = \frac{(12,58)^2 \cdot (0,866)^2}{2 \cdot 9,8}$$

$$H = 6,06m$$

Com os dados obtidos, e fazendo uso da Geometria Analítica, montaram os pontos

- 1º (0 ; 0)
- 2º (7 ; 6,06)
- 3º (14 ; 0)



Substituindo esses pontos na escrita genérica da função do segundo grau, procurou-se encontrar os valores de a , b e c .

$$1^a) y = ax^2 + bx + c$$

Substituindo os valores do primeiro ponto encontrado temos:

$$0 = 0.a + 0.b + c, \text{ logo}$$

$$c = 0$$

Fazendo o mesmo para o segundo ponto temos:

$$2^o) y = ax^2 + bx + c$$

$$6,06 = a.7^2 + b.7 + 0, \text{ logo}$$

$$6,06 = 49a + 7b$$

Para o terceiro ponto temos:

$$3^o) y = ax^2 + bx + c$$

$$0 = a.14^2 + b.14 + 0, \text{ logo}$$

$$0 = 196a + 14b$$

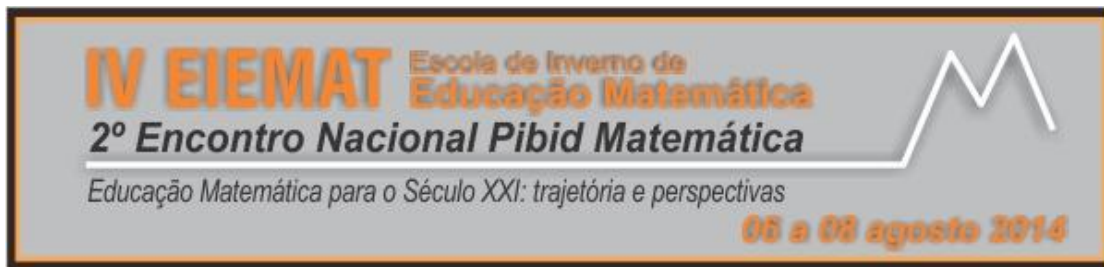
Temos então um sistema que após resolvido nos fornecerá os valores de a e b .

$$\begin{cases} 49a + 7b = 6,06 \\ 196a + 14b = 0 \end{cases}$$

Resolvendo os sistemas temos:

$$a = -0,12 \text{ e } b = 1,68$$

Substituindo agora os valores de a , b e c na escrita genérica encontramos



$$y = -0,12x^2 + 1,68x$$

Esta foi a função encontrada pelo grupo que determinava a curvatura da parábola ou a trajetória do foguete que eles lançaram.

O segundo grupo buscou uma estratégia diferente do grupo anterior, eles procuraram um modelo empírico, baseado em suas observações.

Grupo 2: Buscou uma solução construindo um modelo próprio, embasado em seus experimentos.

Os alunos realizaram vários lançamentos e verificaram que a variação de distância entre eles era mínima. Concluíram então que a altura máxima atingida pelo foguete também não iria variar muito.

A distância atingida pelo foguete girou sempre em torno dos 24 m do ponto de origem. Sabendo que a trajetória era parabólica, que uma função com esta característica tem uma propriedade simétrica em relação ao seu eixo de simetria, concluíram então que a altura máxima ocorreria no ponto $x=12$ m, de distância a partir do ponto de saída do foguete.

Marcaram uma distância de 12 m de um muro e lançaram o foguete. O foguete bateu no muro e a medida foi de 8m de altura.

Assim os alunos, construíram os pontos

A(0,0) – ponto de lançamento do foguete

B(12,8) – ponto de altura máxima

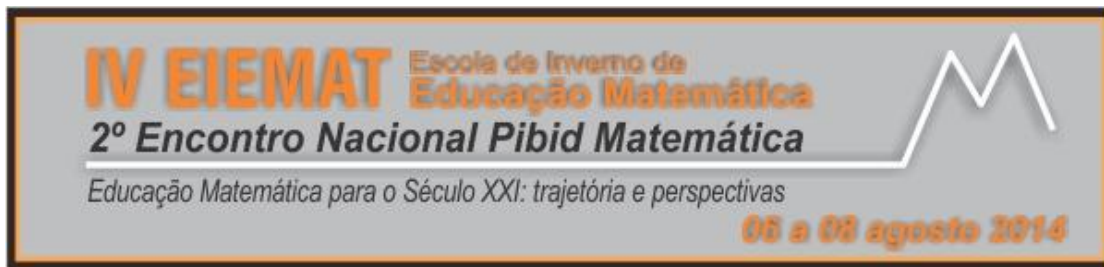
C(24,0) – ponto onde o foguete caiu.

Substituíram os pontos na sua escrita genérica $y = ax^2 + bx + c$.

$$\text{Ponto A: } 0 = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c$$

$$c = 0$$

$$\text{Ponto B: } 8 = a \cdot 12^2 + b \cdot 12 + 0$$



$$8 = 144a + 12b$$

$$\text{Ponto C: } 0 = a \cdot 24^2 + b \cdot 24 + 0$$

$$0 = 576a + 24b$$

Assim foi encontrado o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 144a + 12b = 8 \\ 576a + 24b = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$a = -0,05 \text{ e } b = 1,2$$

Substituindo na escrita genérica novamente $y = ax^2 + bx + c$, encontraram:

$$y = -0,05x^2 + 1,2x$$

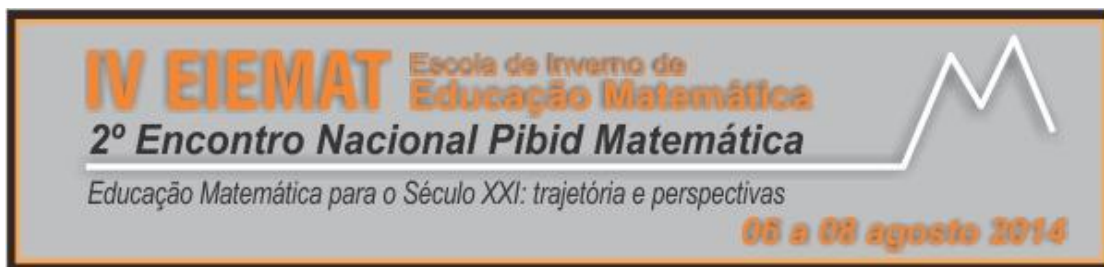
Função que segundo o grupo, descrevia a trajetória do lançamento de seu foguete.

De posse dos dois resultados, e dos demais apresentados pelos outros grupos, foram debatidos os resultados com os alunos. Eles perceberam que a solução apresentada pelo primeiro grupo era solução mais adequada, pois estava fundamentado em estudos de física. Também perceberam que para se chegar a esta solução era preciso mais pesquisas e estudos, na qual o Grupo 1 teve a “competência” de realizar, e os outros grupos não tiveram, pois esperavam que o professor fosse dar a resposta pronta do problema, na medida em que eles se mostrassem que não conseguiam chegar a uma solução.

Percebe-se neste contexto, que os alunos estão acostumados a uma metodologia tradicional na qual os alunos recebem soluções prontas do professor, não cabendo a eles a construção de seu próprio conhecimento, sendo o professor um mediador do processo.

Conclusão

Percebemos que a modelagem matemática desacomoda alunos e professores, no entanto, muitos alunos ainda estão acostumados com um ensino tradicional, e quanto



proposta uma nova metodologia de ensino, constroem uma certa resistência. Esta resistência se dá pelo fato de que para trabalhar com Modelagem Matemática, se faz necessário “um desacomodar”, “um buscar mais”, o que o aluno não está acostumado, tornando o trabalho com modelagem muito trabalhoso. O fato de os alunos terem que buscar novos conhecimentos, ou buscar respostas em outros conteúdos vai contra o que estão acostumados.

Por outro lado, mostrar uma nova visão de ensino, se faz necessário para os futuros professores, para que estes possam aos poucos se apropriarem de novos métodos de ensino, agregando novas metodologias a seus planejamentos. É no ensino superior que estes métodos devem ser apresentados aos futuros professores, e é nele que os alunos devem aprender a trabalhar.

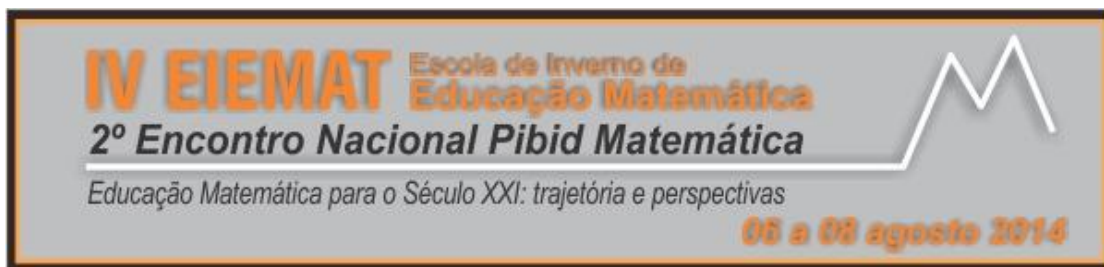
A pesquisa, as discussões em sala construídas com a utilização desta nova metodologia, trouxeram para nossas aulas um fato muito importante: a pesquisa, as discussões e a percepção de que é possível utilizar a linguagem matemática para transcrever um fenômeno físico. Embora todo este processo não seja algo simples de se realizar, exigindo dos alunos e do professor um engajamento em pesquisa e discussões de resultados.

Referências bibliográficas

ARAÚJO, Jussara de Loiola. **Uma Abordagem Sócio-Crítica da Modelagem Matemática: a perspectiva da modelagem matemática crítica.** ALEXANDRIA Revista de Educação em Ciência e Tecnologia, v.2, n.2, p.55-68, jul. 2009. Disponível em <<http://alexandria.ppget.ufsc.br/files/2012/03/jussara.pdf>>

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais—Ensino Médio: Matemática.** Brasília: MEC/SEF, 1999.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação. In: Bolema. Rio Claro, n.15, p.5-23, 2001. Disponível em:



<http://www.educadores.diaadia.pr.gov.br/arquivos/File/2010/artigos_teses/MATEMATIC A/Artigo_Barbosa.pdf>. Acesso em junho de 2014.

BEAN, D. **O que é modelagem matemática?** Revista Educação em Revista – nº 09. Campinas: UNICAMP, jan2001.

BIEMBENGUT, Maria. S; Hein, Nelson. Modelagem matemática no ensino. São Paulo: Contexto, 2003.

BORBA, M. C.; MENEGHETTI, R. C. G.; HERMINI, H. A. **Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas.** *Revista de Educação Matemática da SBEM-SP*, [São José do Rio Preto], n. 3, p. 63-70, 1997.

D'AMBROSIO, U. **Educação matemática: da teoria à prática.** 13. ed. Campinas: Papirus, 1986. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

LEAL, L.C. **Funções no terceiro ciclo do ensino básico-uma possível abordagem...**- Ver.Educação Matemática, vol.15, 1990,p.5-15.

PALHARES, P. **Elementos de Matemática: para professores do ensino básico.** Ed. Lisboa: Lidel, 2004.

PALHARES, P. **Histórias com problemas construídos por futuros professores de Matemática.** In D. Fernandes, F. Lester, A. Borralho & I. Vale, Resolução de problemas na formação inicial de professores de Matemática: Múltiplos contextos e perspectivas. Aveiro: Grupo de Investigação em Resolução de Problemas. (1997).

TINOCO, L. A. A.(coord.) - **Razões e Proporções** - Projeto Fundação, Instituto de Matemática, UFRJ, Rio de Janeiro, 1996.

SALOMÉ,H. and SILVA,L.P. **Matemática-Funções Polinomiais** . Lisboa Editora, Lisboa, Portugal, 2007.