IV EIEMAT Escola de Inverno de Educação Matemática
2º Encontro Nacional Pibid Matemática
Educação Matemática para o Século XXI: trajetória e perspectivas
06 a 08 agosto 2014

ISSN 2316-7785

CONSTRUÇÃO DO CONCEITO DE LIMITES NO ENSINO MÉDIO POR MEIO DA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Caroline Conrado Pereira
Centro Universitário Franciscano
caroline_conrado@ymail.com

Charles Bruno da Silva Melo
Centro Universitário Franciscano
xarlesdemelo@yahoo.com.br

Vanilde Bisognin
Centro Universitário Franciscano
vanilde@unifra.br

Resumo
Neste trabalho serão relatados os resultados de uma experiência de ensino, desenvolvida com estudantes primeiro ano e do segundo ano do Ensino Médio, de uma escola estadual localizada no município de Candelária/RS, tendo como objetivo a construção do conceito de limite de funções reais. Seguindo a Metodologia de Resolução de Problemas e alicerçada na teoria de "imagem de conceito" e "definição de conceito", de Tall e Vinner (1981), foram propostos diferentes problemas, que permitiram a construção de imagens conceituais sobre o conceito de limite. Como resultado da experiência, é possível inferir que, o uso da Metodologia de Resolução de Problemas, apresentou-se adequada e coerente para a construção intuitiva do conceito de limite de funções reais.

Palavras-chave: limite de funções reais; resolução de problemas; imagem de conceito; definição de conceito.

Introdução

Ao longo da História da Educação os currículos trabalhados nas escolas passaram por várias reformas, sempre no sentido de adaptar aos novos tempos da sociedade e a evolução do conhecimento. Os programas da disciplina de matemática, acompanhando a evolução das ciências, também passaram por diferentes reformulações, especialmente nos séculos XIX e XX, em que muitos conhecimentos foram substituídos por outros.

Se analisarmos os documentos referentes aos Parâmetros Curriculares Nacionais, para o Ensino Fundamental e Médio, é possível observar que alguns conteúdos, especialmente do Ensino Médio como: limites, derivadas e integrais de funções reais, que na década de 60 eram conteúdos do ensino médio, antigo científico, hoje são vistos apenas no Ensino Superior.

Por outro lado, observa-se que muitos livros didáticos atuais, como os de Benigno Barreto Filho e Cláudio Xavier da Silva (1999), José Ruy Giovanni e José Roberto Bonjorno (2011) e Luiz Roberto Dante (2004), os quais são livros usados no nível médio, passaram a incluir um capítulo sobre a construção do conceito de limite de funções reais. Além disso, em eventos da área de Educação Matemática, como o ENEM (2013) e CIAEM (2013), há trabalhos de pesquisas de educadores matemáticos que realizaram experiências sobre a introdução do conceito de limite de funções reais. Como resultado, os autores defendem a ideia de que é possível trabalhar este conteúdo neste nível de ensino, desde que se utilize uma metodologia de ensino adequada.

No intuito de fazer uma busca sobre o ensino deste conteúdo, procurou-se analisar alguns livros, em número de sete, que constam do Plano Nacional do Livro Didático do ano de 2012, e constatou-se que dos livros analisados, como propostas para o uso nas escolas públicas, dois contemplam o estudo de Limites no terceiro volume de cada coleção.

Assim, embora o conteúdo de limites, não seja obrigatório no currículo do Ensino Médio das escolas de hoje ele tem lugar entre capítulos nos livros didáticos usados pelas mesmas e, também, aparece como sugestão, não tão clara, nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio de Matemática, parte extra dos Parâmetros Curriculares Nacionais. Neste caso, o assunto de Limites apresenta-se como uma proposta de trabalha-lo por meio do estudo da "soma dos termos de uma progressão geométrica", o que na realidade, é o único momento no qual o estudante terá a oportunidade de ter o contato com a ideia de infinito.

Diante disso, neste trabalho propõem-se a descrever os resultados de uma investigação sobre a construção do conceito de limite de funções reais, tendo como metodologia de ensino a Resolução de Problemas e alicerçada nas ideias de “imagem de conceito” e “definição de conceito” de Tall e Vinner (1981), realizada com alunos do segundo ano do Ensino Médio de uma escola estadual do município de Candelária/RS.

Imagem de conceito e Definição de conceito

A aquisição de um conhecimento novo em matemática envolve muitos fatores: maturidade intelectual, diferentes formas de representação de um objeto de estudo, bem como a contextualização. Abordar um conceito matemático partindo da sua definição formal, não é apropriado, pois não contribui para uma aprendizagem significativa, e deste modo, o aluno não vê sentido no que está sendo ensinado, esquecendo rapidamente o conteúdo.

Segundo Tall e Vinner (1981), para que a definição formal seja satisfatoriamente compreendida pelo estudante, é preciso que haja uma familiarização anterior com o conceito em questão, desenvolvida com base em impressões e experiências variadas. Para os professores, Tall e Vinner, imagem conceitual e definição conceitual são:

> Nós usaremos o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que está associada com o conceito, que inclui todas as figuras mentais e propriedades e processos associados. Esta é construída ao longo dos anos, através de experiências de todos os tipos, mudando enquanto o indivíduo amadurece e se depara com novos estímulos [...]. Definição conceitual é a forma de palavras usadas para especificar o conceito (TALL E VINNER APUD AMORIN, 1981, p. 152)

Portanto, defendem que para a construção de um conceito novo, é necessário o uso de várias representações ricas do objeto de estudo, para que desta maneira, possa a imagem conceitual ser bem definida, esta imagem, pode ser modificada, conforme o indivíduo amadurece e recebe outros estímulos, que podem ser agregados a imagem conceitual. Quando o individuo expressa a imagem conceitual com palavras, temos a definição conceitual.

Diante do exposto, este trabalho busca a construção do conceito de limite, a partir de várias representações, nesse caso: geométrica, algébrica e tabular.

Metodologia de Resolução de Problemas

Para ser um bom solucionador de problemas o aluno precisa estar diante de situações que o faça pensar, de modo que ele mobilize a capacidade cognitiva para traçar estratégias e procedimentos para solucionar determinado problema.

Para que isso ocorra, é fundamental o papel do professor no processo de ensino e aprendizagem do estudante, pois é necessário estimular o hábito da investigação, do questionamento e do trabalho colaborativo, e para que isso aconteça deverá se propor situações que exijam uma maneira diferente de enfrentamento por parte do aluno.

Contudo, as Orientações complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais na área de conhecimento de Matemática – prevê que o estudante de matemática possa adquirir competências na resolução de problemas:

> A resolução de problemas é peça central para o ensino de Matemática, pois o pensar e o fazer se mobilizam e se desenvolvem quando o indivíduo está engajado ativamente no enfrentamento de desafios. Essa competência não se desenvolve quando propomos apenas exercícios de aplicação dos conceitos e técnicas matemáticas, pois, neste caso, o que está em ação é uma simples transposição analógica: o aluno busca na memória um exercício semelhante e desenvolve passos análogos aos daquela situação, o que não garante que seja capaz de utilizar seus conhecimentos em situações diferentes ou mais complexas (BRASIL, 2012. p. 112).

Deste modo, procuramos na Metodologia de Resolução de Problemas proposta por Onuchic e Allevato (2009), pois ela proporciona ao aluno a construção de um conhecimento matemático, sem o conhecimento prévio do aluno do objeto de estudo.

As etapas desenvolvidas foram: Primeiramente a preparação dos problemas, nessa etapa foram formuladas as atividades, procurando utilizar representações diferentes do objeto de estudo. Na segunda etapa, desenvolvida pelos alunos, foi realizada uma leitura individual e logo após em conjunto. Na sequência, os estudantes partiram para a resolução dos problemas e o professor buscou observar e incentivar. Em seguida, após a etapa da resolução, os estudantes foram convidados a fazerem os registros das resoluções no quadro e desta maneira, realizaram a plenária, onde foi discutido as suas soluções e feito um comparativo das respostas, mediado pelo professor. Após buscou-se um consenso sobre a resposta correta, para então na etapa final o professor formalizar o conteúdo.

Aplicação em sala de aula

As atividades continham cinco problemas que enfocavam a construção do conceito de limite de funções reais. Elas foram aplicadas com dois grupos de alunos, do segundo ano e do primeiro ano do Ensino Médio em uma escola pública estadual do município de Candelária/RS, em forma de oficina, no turno inverso com duração de quatro períodos de 50 min. O desenvolvimento da atividade foi conduzido pelo professor regente, o qual é o segundo autor do trabalho.

No primeiro problema foi proposto aos alunos que considerassem uma região quadrada de área igual a um. Na sequência, deveriam pintar metade do quadrado e assim sucessivamente com o restante da região em cada estágio, observando o que ocorria com a área. Os grupos, logo identificaram que os estágios para colorir a área toda deveriam ser infinitos, portanto a área se aproximaria de um, porém não chegaria a exatamente esse valor, já que sempre iria faltar um espaço para ser preenchido. Essa conclusão foi à mesma em relação à soma das áreas de cada estágio.

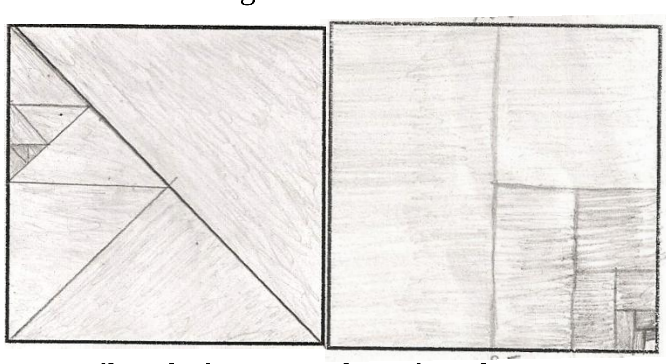
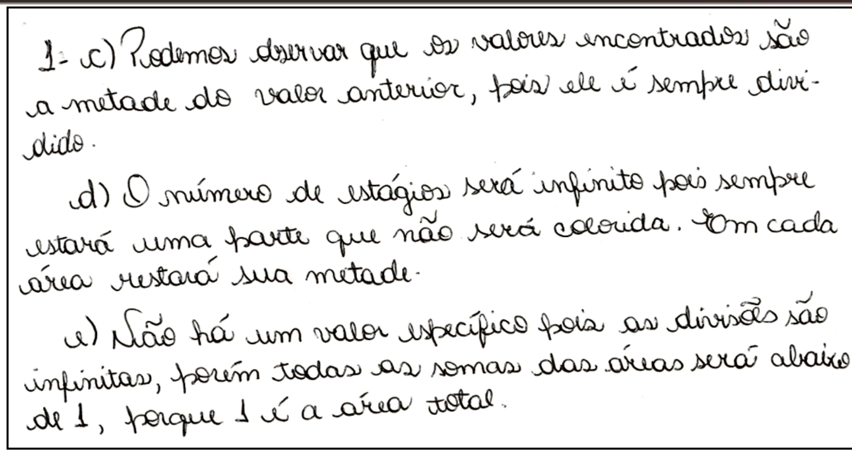


Figura 1 – Análise da área em cada estágio dos grupos A e B



1- c) Podemos observar que os valores encontrados são a metade do valor anterior, pois ele é sempre dividido.

d) O número de estágios será infinito pois sempre estará uma parte que não será colorida. Em cada área restará sua metade.

e) Não há um valor específico pois as divisões são infinitas, porém todas as somas das áreas será abaixo de 1, porque 1 é a área total.

Figura 2 - Solução apresentada pelo grupo B.

As soluções de ambos os grupos foram idênticas, demonstrando que os alunos conseguiram visualizar e relacionar a área do quadrado com o conceito intuitivo de infinito, bem como a noção de limite.

No segundo problema, tratava-se também da exploração de área, nesse caso, de um retângulo. Nela, foi apresentada uma região de um plano limitada por um retângulo de base seis centímetros a qual solicitava que fosse preenchida uma tabela relacionando a altura com a área do retângulo. Nessa tabela, eram informados alguns valores aleatórios de alturas, de modo que os alunos observassem que a área tenderia para 18 cm².

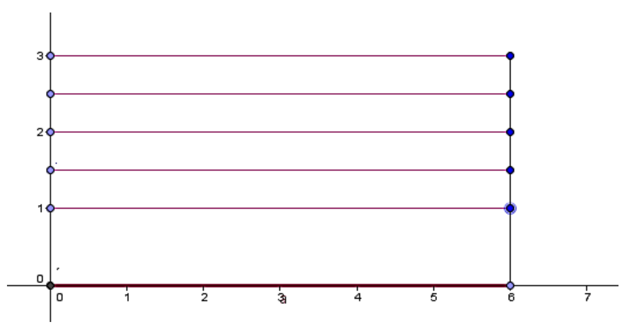


Figura 3 – Ilustração da segunda atividade.

Nessa questão, ambos os grupos encontraram com facilidade a relação entre as alturas informadas e à tendência da área do retângulo.

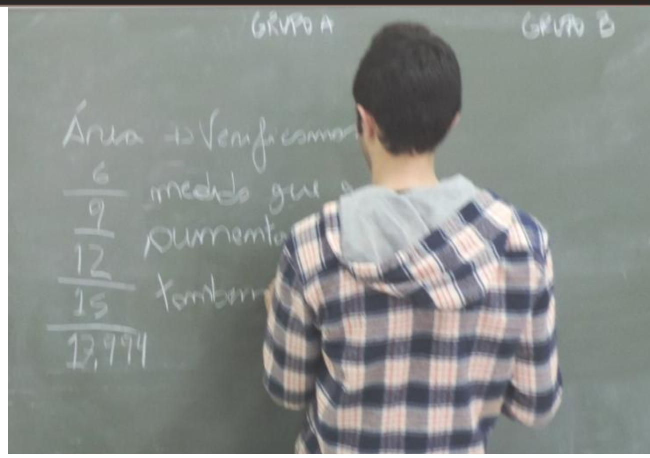


Figura 4 – Aluno de um dos grupos durante a plenária.

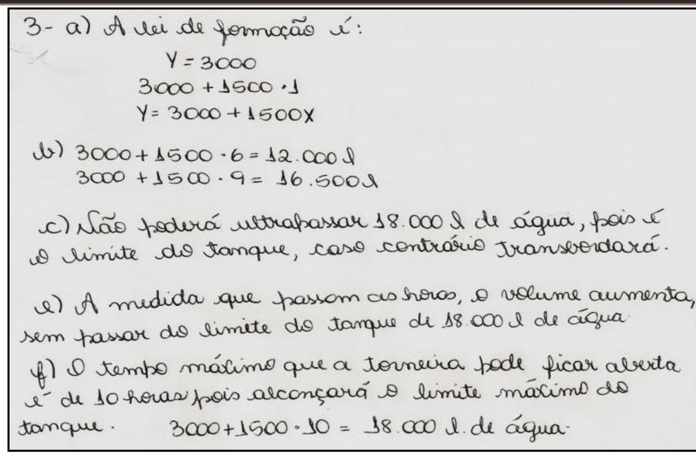
Na terceira atividade, o enfoque estava relacionado com o estudo das funções, tratava-se de um problema envolvendo o tempo necessário para que uma torneira, que fornecia água a uma razão de 1500 por hora, levaria para encher um tanque com capacidade de 18000 litros, sendo que o tanque já possuía 3000 litros.

A partir dela, era questionada a lei de formação, a quantidade de água no tanque após 6 horas e 9 horas, bem como, pedia o preenchimento de uma tabela, apresentada na Tabela 1 e o tempo máximo que a torneira poderia ficar aberta.

Tempo da torneira aberta (em horas)	Quantidade de água (em litros)
8	
8,5	
9	
9,5	
9,8	
9,9	

Tabela 1 – Parte da terceira atividade.

Os grupos ao receberem esse problema, não tiveram dificuldades para resolver as questões. Afirmaram que a tabela auxiliou na compreensão da atividade.



3- a) A lei de formação é:
Y = 3000
3000 + 1500 · 1
Y = 3000 + 1500x

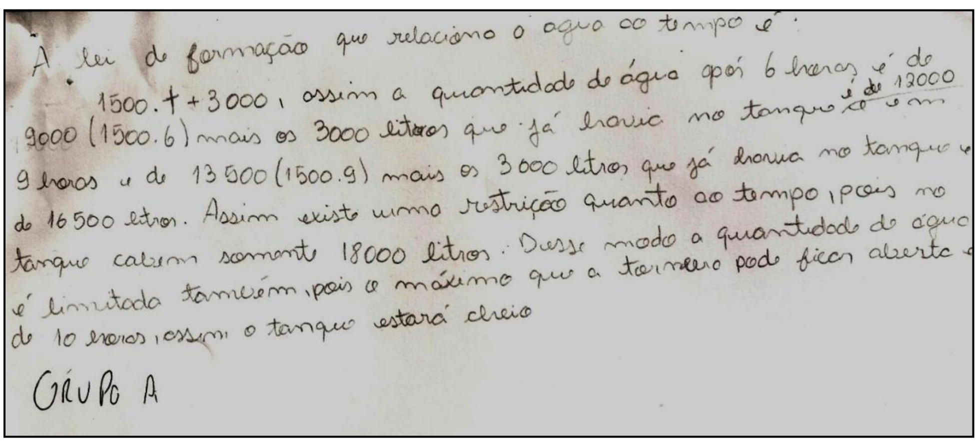
b) 3000 + 1500 · 6 = 12.000 l
3000 + 1500 · 9 = 16.500 l

c) Não poderá ultrapassar 18.000 l de água, pois é o limite do tanque, caso contrário transbordará.

e) A medida que passam as horas, o volume aumenta, sem passar do limite do tanque de 18.000 l de água

f) O tempo máximo que a torneira pode ficar aberta é de 10 horas pois alcançará o limite máximo do tanque. 3000+1500·10 = 18.000 l. de água

Figura 5 - Solução apresentada pelo grupo B.

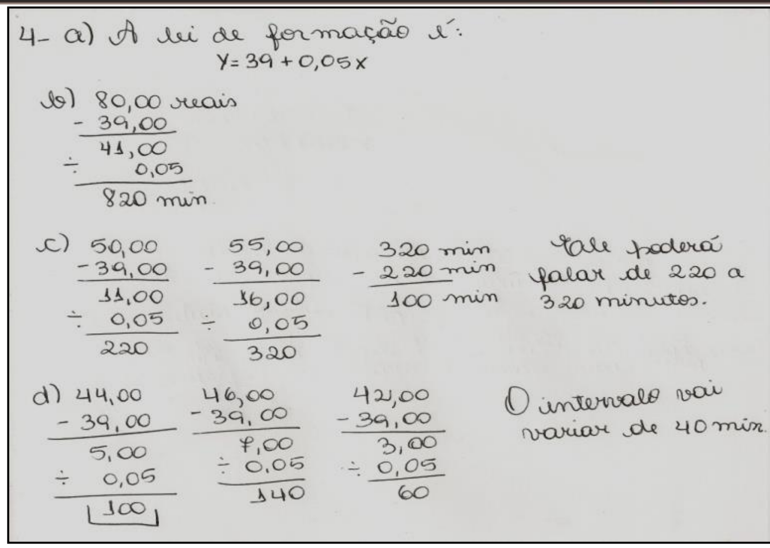


A lei de formação que relaciona a água ao tempo é:
1500.t + 3000, assim a quantidade de água após 6 horas é de 9000 (1500.6) mais os 3000 litros que já havia no tanque é de 12000 e em 9 horas é de 13500 (1500.9) mais os 3000 litros que já havia no tanque é de 16500 litros. Assim existe uma restrição quanto ao tempo, pois no tanque cabem somente 18000 litros. Desse modo a quantidade de água é limitada também, pois o máximo que a torneira pode ficar aberta é de 10 horas, assim o tanque estará cheio

GRUPO A

Figura 6 - Solução apresentada pelo grupo A.

Os últimos problemas tinham o objetivo de construir a definição de épsilon e delta. A quarta atividade abordava a variação de valores referentes a uma assinatura de uma linha telefônica na qual o valor fixo era de R$ 39,00 (trinta e nove reais), mais o valor de R$ 0,05 (cinco centavos) por minuto utilizado. Foram feitos questionamentos sobre a lei de formação e a quantidade de minutos utilizados, da mesma forma que a variação entre os valores e a variação dos minutos utilizados. Nesta atividade os alunos observaram que conforme o valor variava em torno de R$ 2,00 no eixo das ordenadas, o intervalo dos minutos variava em 40 minutos no eixo das abscissas, tem-se aqui o conceito intuitivo de limite explorado pelos alunos.



4- a) A lei de formação é:
$y = 39 + 0{,}05x$

b) 80,00 reais
− 39,00
41,00
÷ 0,05
820 min

c) 50,00 − 39,00 = 11,00 ÷ 0,05 = 220
55,00 − 39,00 = 16,00 ÷ 0,05 = 320
320 min − 220 min = 100 min
Tale poderá falar de 220 a 320 minutos.

d) 44,00 − 39,00 = 5,00 ÷ 0,05 = 100
46,00 − 39,00 = 7,00 ÷ 0,05 = 140
42,00 − 39,00 = 3,00 ÷ 0,05 = 60
O intervalo vai variar de 40 min.

Figura 7 - Solução apresentada pelo grupo B.

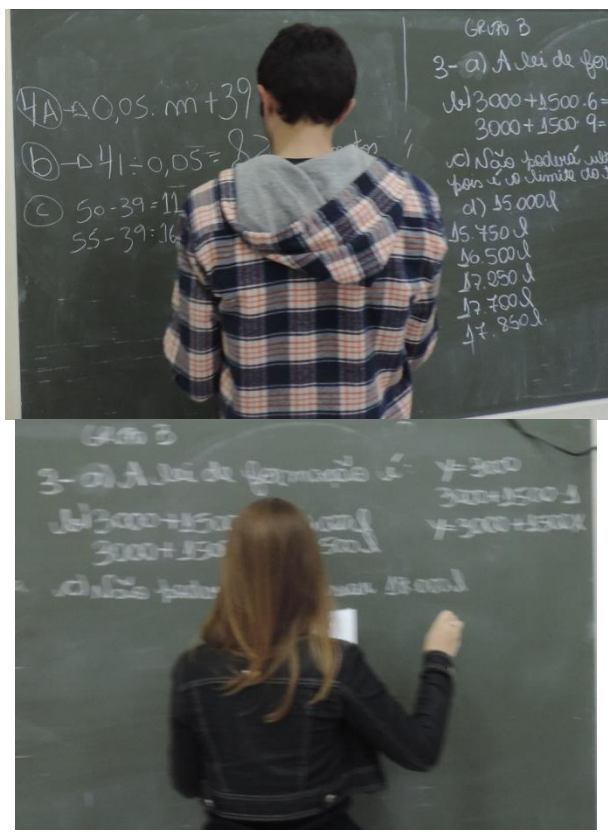


Figura 8 - Grupos durante a plenária.

No último problema a abordagem envolvia também o estudo de funções, relacionando um provedor de internet cuja taxa era de R$ 25,00 (vinte e cinco reais) mais R$ 0,02 (dois centavos) por minuto utilizado. Essa atividade foi explorada também graficamente. Ambos o grupos apresentaram dificuldades na compreensão do enunciado, nesse caso o professor teve que intervir e realizar questionamentos, tais como: qual era a variação no eixo x e no eixo y? Qual a relação com o número de minutos e o valor pago? Desta maneira conseguiram desenvolver a atividade.

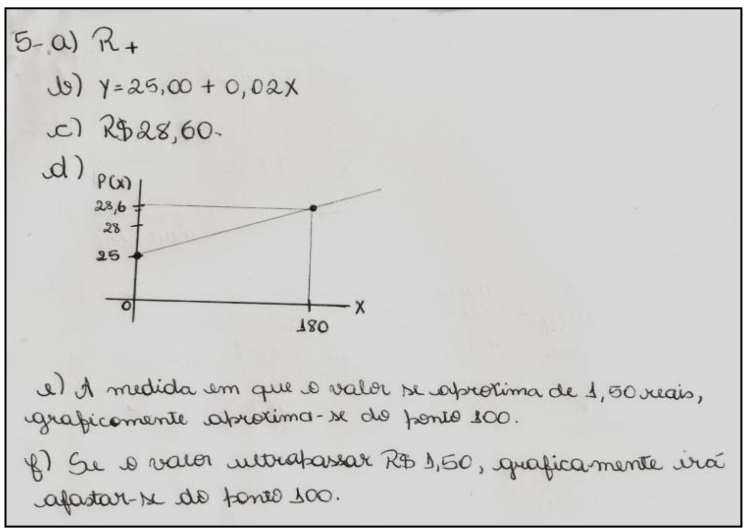


Figura 8 - Solução apresentada pelo grupo B igual ao do grupo A.

Resultados da experiência

Com o trabalho desenvolvido se observou que é possível construir o conceito de limite de funções reais para alunos do Ensino Médio, pois os estudantes conseguiram desenvolver todas as atividades em sua plenitude. Elas foram formuladas de acordo com a idade intelectual dos estudantes, para que não se constituísse um obstáculo quanto à apropriação do conceito intuitivo de limites.

No trabalho desenvolvido, a Metodologia da Resolução de Problemas favoreceu os alunos na construção de um novo conhecimento, relacionados à noção intuitiva de limite, infinito, épsilon e delta, pois os alunos conseguiram estabelecer as relações de forma clara.

Isso demonstra que os alunos foram sujeitos ativos no processo da construção do seu próprio conhecimento, bem como conseguiram trabalhar de forma colaborativa.

Pode-se concluir a partir dos resultados obtidos, que a Metodologia de Resolução de Problema aliada à teoria de aprendizagem de Tall e Vinner (1981), contribuiu para a aprendizagem dos alunos, bem como para a construção de um novo conceito, pois todos tiveram resultados satisfatórios no desenvolvimento das atividades.

Referências

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. *Orientações Curriculares para o Ensino Médio*, v. 2. Brasília, 2006. Disponível em: <http//portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/book_volume2_internet.pdf>. Acesso em: 24 mai. 2014.

BRASIL. Ministério da Educação. Guia de livros didáticos: PNLD 2012, Brasília, 2011.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-Aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO, M. A. V.(Org.). *Pesquisa em Educação Matemática:* concepções e perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999. p.199-218.

TALL, D. O; VINNER, S. "Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity." *Educational studies in mathematics*. v.12, p. 151-169, 1981.