USO DA TEORIA DE GRAFOS E METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

Erika Pinheiro[1]
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
ualolerikarol@gmail.com

Guy Grebot[2]
Departamento de Matemática, Universidade de Brasília
guy@mat.unb.br

Resumo

Apresentamos uma sequência didática baseada na metodologia de resolução de problemas e elaborada no âmbito do Programa de Bolsas de Iniciação à Docência- PIBID/CAPES, do Departamento de Matemática da Universidade de Brasília. O objetivo central desta sequência didática é levar o aluno a sintetizar as informações fornecidas no enunciado de um problema proposto e a traduzir, de maneira clara e simplificada, os dados essenciais para a sua compreensão e resolução.

Palavras–chave: Sequência didática; teoria de grafos; metodologia de resolução de problemas

[1] Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID/CAPES.

[2] Bolsista do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência - PIBID/CAPES.

1-Introdução

No PIBID/MAT da Universidade de Brasília, adotamos a metodologia de resolução de problemas tanto na construção das sequências didáticas quanto no trabalho de acompanhamento dos alunos das escolas participantes do programa. A metodologia de resolução de problemas se apoia na participação ativa do aluno na construção do seu próprio conhecimento.

As sequências didáticas, que chamamos de cadernos, são planejadas de forma a conduzir o aluno no caminho da construção dos conceitos desejados, estimulando o seu raciocínio e sua criatividade. Seguimos assim, a orientação dos Parâmetros Curriculares Nacionais do ensino básico (PCNs) que estabelecem que o ensino de matemática deve servir para desenvolver, no aluno, capacidades tais como: observação, estabelecimento de relações, comunicação (diferentes linguagens), argumentação e validação de processos e o estímulo às formas de raciocínio como intuição, indução, dedução, analogia, estimativa (BRASIL: 1998, p. 56).

As sequências didáticas elaboradas no âmbito do programa PIBID/MAT da Universidade de Brasília, se apoiam também no caráter indissociável do par formado por conhecimento técnico e desenvolvimento do aluno e, dessa forma, seguem um embasamento teórico-metodológico tanto do ponto de vista matemático quanto do ponto de vista didático.

Neste artigo, apresentamos uma sequência didática baseada na referida metodología, na qual as atividades auxiliam no desenvolvimento dos conceitos básicos da teoria de grafos e na elaboração de uma estratégia de resolução do problema motivador dado.

Dividimos este trabalho em quatro seções, sendo a segunda dedicada à metodologia de resolução de problemas. A terceira seção descreve as várias fases do processo de elaboração da sequência didática (caderno). O enunciado e a resolução do problema motivador são apresentados nesta seção. Por fim, apresentamos nossas conclusões. A sequência didática está apresentada na íntegra no anexo.

2- Metodologia

O objetivo principal da metodologia de resolução de problemas é colocar o aluno como protagonista do seu próprio desenvolvimento através de uma atuação ativa na construção de conceitos e técnicas que levam à resolução de problemas dados (ALLEVATO; ONUCHIC, 2006). Ela possibilita o desenvolvimento das habilidades de mobilização de conhecimentos e de gerenciamento de informações, já que a abordagem de conceitos matemáticos é feita mediante a exploração de problemas.

O problema motivador deve ser um problema que instigue o aluno e que, simultaneamente, permita desenvolver os conceitos matemáticos desejados através de um encadeamento de raciocínios e resultados. Assim, a aplicação dessa metodologia se faz em duas fases, a primeira sendo a apresentação e a compreensão de um problema a ser resolvido e a segunda sendo a sua resolução.

Na primeira fase, o aluno deve interpretar o problema proposto, escolhendo técnicas e conceitos já conhecidos que poderiam auxilia-lo na resolução. Na segunda fase, ele deve testar as técnicas escolhidas, fazer conjecturas e, possivelmente, entrar em contato com novos conceitos para desenvolver novas técnicas de resolução apropriadas ao problema.

3- A sequência didática

A sequência didática (caderno) apresentada aqui, foi construída com base num estudo preliminar sobre os conceitos matemáticos envolvidos e tendo em vista a metodologia de resolução de problemas.

O seu objetivo central é levar o aluno a sintetizar as informações fornecidas no enunciado de um problema proposto e a traduzir, de maneira clara e simplificada, os dados essenciais para a sua compreensão e resolução.

O problema motivador escolhido, que foi retirado de BRIA, se adequou perfeitamente ao nosso objetivo, pois sua resolução requer o uso da teoria de grafos que, por sua vez, implica na simplificação do problema.

O estudo dos conceitos básicos da teoria de grafos foi baseado no livro ***Introduction to graph theory*** (WILSON, 1972) e teve o objetivo de apontar os conceitos essenciais à compreensão desta teoria e à resolução de problemas semelhantes ao problema dado.

Essa seleção definiu o próximo passo na elaboração do caderno, a saber: fazer o aluno entrar em contato (explicita ou implicitamente) com os conceitos de grafo, grau de um vértice, grafo conexo, grafos euleriano e semi-euleriano para poder usar uma propriedade desse tipo de grafos na resolução do problema.

Com o problema principal dado e os conceitos essenciais já selecionados, iniciamos a organização do caderno. Foram desenvolvidas atividades que visam, primeiramente, fazer o aluno sentir a necessidade de desenvolver uma técnica de resolução. Em seguida, várias perguntas são sugeridas com o intuito de fazer o aluno retirar os dados essenciais do problema e simplificá-lo. Finalmente, o aluno é levado a resolver o problema através da construção dos conceitos de grafo euleriano e semi-euleriano. A redação clara das respostas é essencial ao desenvolvimento do caderno pois permite que o aluno organize o seu raciocínio passo a passo.

Essas atividades seguem o esquema proposto por Polya (Polya, 1973) que se baseia, entre outras, nas seguintes perguntas: O que não é conhecido no problema? Quais são os dados relevantes? Quais são as exigências? Quais conceitos conhecidos podem ajudar na resolução? Quais estratégias de resolução podem ajudar? O que posso inferir dessa informação? Como traduzir esse resultado para o contexto do problema?

3.1- Resolução do problema motivador

Para esclarecer a relação entre os conteúdos essenciais selecionados e as atividades propostas, apresentamos e resolvemos, a seguir, o problema motivador.

O problema motivador do caderno envolve uma tarefa dada a um funcionário de uma colônia de férias, que consiste em envernizar as maçanetas de todas as portas seguindo as exigências: envernizar a maçaneta do seu lado; passar para o outro lado, fechar a porta e envernizar a outra maçaneta dessa porta; não abri-la novamente naquele dia; não pular qualquer janela; não passar por porta nenhuma sem que antes envernize uma de suas maçanetas e, imediatamente após, conforme o procedimento descrito, envernize a outra; ao terminar a tarefa o funcionário ainda deve comprar um material de limpeza na cidadezinha.

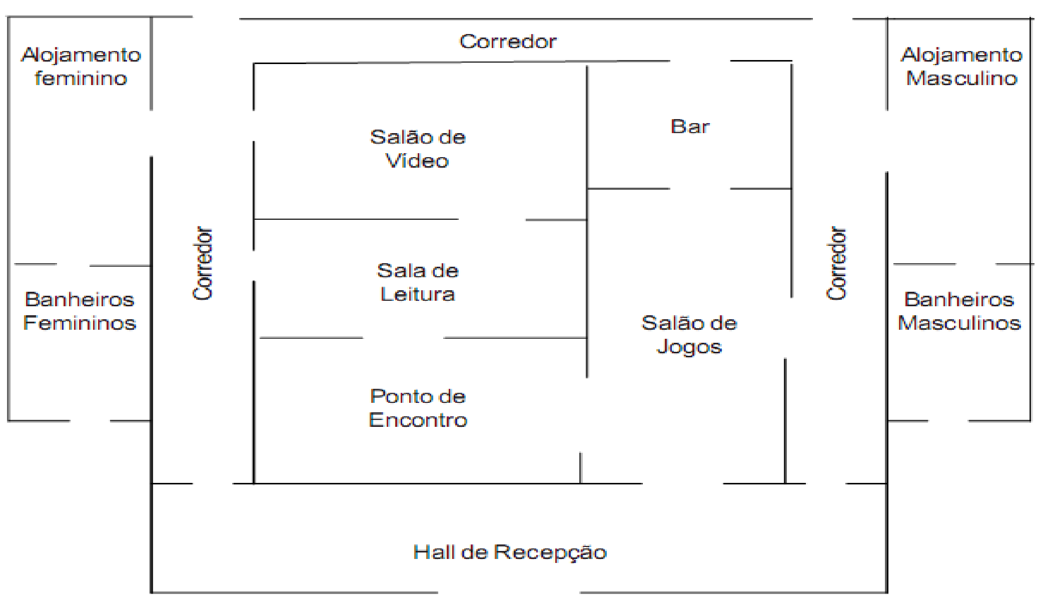


Figura 1: Planta da Colônia de Férias (BRIA)

Para resolver este problema precisamos, primeiramente, analisar a planta da colônia de férias. Não é uma planta muito simples, pois possui muitos cômodos e alguns ainda com muitas portas. Para simplificá-lo, podemos representá-lo graficamente com pontos e traços, que representam os cômodos (inclusive o exterior da casa) e as portas, respectivamente (Figura 2).

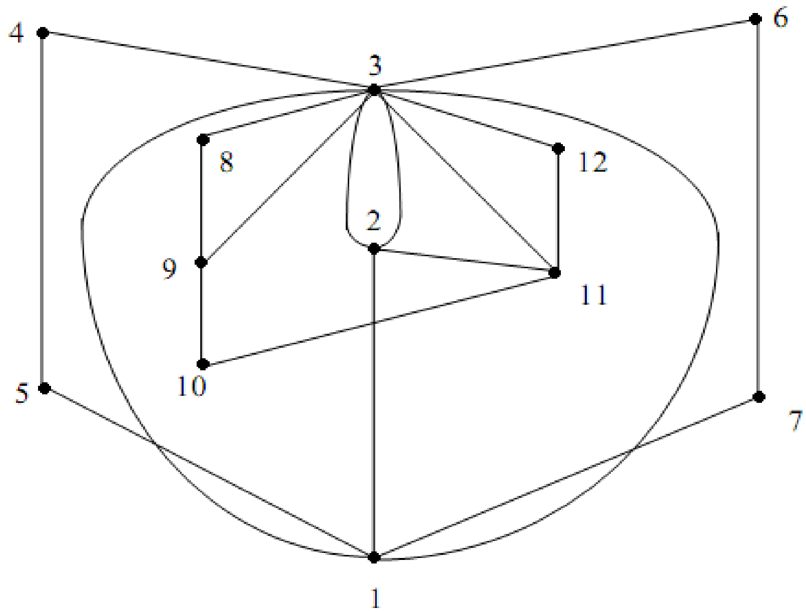


Figura 2: Grafo obtido (adaptado de BRIA)

Legenda:

1 - Exterior	7 - Banheiros Masculinos
2 - Hall de Recepção	8 - Salão de Vídeo
3 - Corredor	9 - Sala de Leitura
4 - Alojamento Feminino	10 - Ponto de Encontro
5 - Banheiros Femininos	11 - Salão de Jogos
6 - Alojamento Masculino	12 - Bar

O grafo assim obtido é um grafo semi-euleriano pois todos os seus vértices têm grau par, exceto dois. Desta forma, para conseguirmos percorrer todo o grafo passando uma

única vez por cada aresta (porta), devemos começar por um vértice (cômodo) de grau ímpar e terminar no outro vértice de grau ímpar. Como os dois vértices de grau ímpar representam a sala de leitura e o exterior da casa, o funcionário deve começar do vértice que representa a sala de leitura, para terminar do lado de fora e cumprir a última exigência. Isso decorre do corolário que afirma que um grafo conexo é semi-Euleriano se, e somente se, não tem mais que dois vértices de grau ímpar (WILSON, 1972, p. 34).

4- Conclusão

A grande vantagem da metodologia de resolução de problemas é que os possíveis pré-requisitos, necessários ao estudo de determinado conceito, deixam de ser um empecilho na realização de uma tarefa e passam a ser objetos de descoberta aliados na resolução de um problema.

No caso da sequência didática apresentada neste trabalho, o aluno de ensino básico é naturalmente levado aos conceitos da teoria de grafos, apesar de não serem conceitos abordados no nível básico.

Esta sequência didática também reforça o desenvolvimento de habilidades que permitem a aquisição das capacidades de síntese e de comunicação, tão importantes para o desenvolvimento de raciocínios abstratos e que, infelizmente, são geralmente ignoradas nas aulas de matemática.

5- Referências

ALLEVATO, N. S. G. e ONUCHIC, L. R**.** ***Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas:*** uma nova possibilidade para o trabalho em sala de aula. Actas da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul. Águas de Lindóia-SP, 2006.

BRASIL, Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BRIA, Jorge. ***Grafos, por que não?*** Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume1/grafos_por_que_no.pdf >. Acesso em: 15 jan. 2012.

POLYA, G**.** ***How to solve it.*** A new aspect of mathematical method. Nova Jersey – Estados Unidos da América. Princeton University Press, 1973.

WILSON, Robin J. ***Introduction to graph theory***. Glasgow- Escócia. Bell & Bain Ltd., 1972.

6- Anexo: O caderno: Matemática e grafos

Injustiça ou não?

"A colônia de férias de Grafohill estava sendo preparada para, mais uma vez, receber jovens para a temporada de verão. Seu gerente grego, Prepotencius, mandou seu mais novo empregado, o humilde japonês Tamao, envernizar as maçanetas de madeira dos dois lados de cada uma das 20 portas (veja planta na figura 2), dando-lhe as devidas orientações. Para cada porta, inclusive para as 5 portas de entrada, deveria adotar o seguinte procedimento: envernizar a maçaneta do seu lado, passar para o outro lado, fechar a porta e envernizar a outra maçaneta dessa mesma porta, não podendo mais abri- la naquele dia. Afinal, o verniz demoraria 24 horas para secar completamente. No dia seguinte, portanto, todas as maçanetas estariam envernizadas e secas. Fez mais exigências: uma vez envernizadas as maçanetas da porta, à escolha de Tamao, não poderia pular qualquer janela em momento algum nem passar por porta nenhuma sem que antes envernizasse uma de suas maçanetas e, imediatamente após, sempre conforme o procedimento descrito, a outra. Tudo por "motivos técnicos", mas, na verdade, muito mais pela personalidade intransigente de Prepotencius, temido por seu jeito exigente, autoritário e intolerante. Ao final de todo esse serviço naquele dia, todas as portas estariam fechadas, as maçanetas envernizadas e, aí então, imediatamente, o empregado ainda deveria ir ao centro da cidadezinha local comprar material de limpeza antes do anoitecer e recolher-se à sua casa, trazendo-o à colônia só no dia seguinte. Tamao nem questionou. Algumas horas depois, muito confuso, o empregado procurou o gerente comunicando-lhe que não estava conseguindo concluir o serviço seguindo à risca as ordens que recebera, não tendo, portanto, envernizado todas as maçanetas. Sem pensar duas vezes, alegando que "jamais admitiria tamanha incompetência ou má vontade", Prepotencius demitiu Tamao.

Até hoje corre pelas redondezas que o gerente foi extremamente injusto com o empregado, pois seria impossível executar o serviço cumprindo-se rigorosamente todas as exigencias. (adaptado de BRIA).

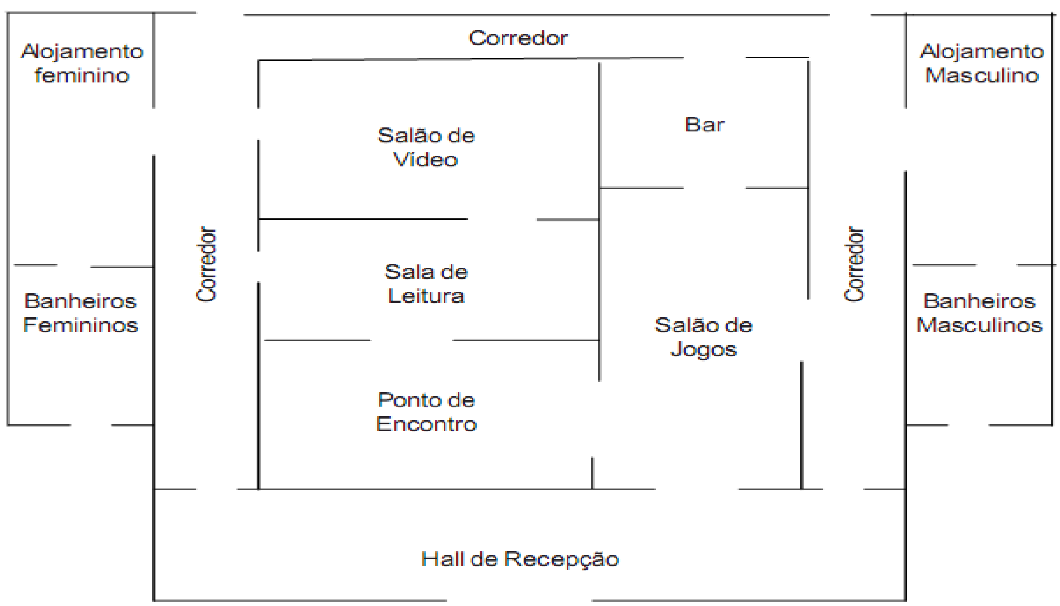


Figura 3: Planta da colônia de férias (BRIA)

Atividade 1

Tente resolver o problema que custou o emprego de Tamao, seguindo à risca todas as exigências de Prepotencius.

Atividade 2

1- As formas dos cômodos interferem na resolução do problema?

2- Qual é o dado relevante em cada cômodo para a resolução do problema?

Atividade 3

1- Monte uma tabela atribuindo a cada cômodo um número e indicando quantas portas tem cada cômodo.

2- Tente montar um diagrama usando pontos para representar cada cômodo enumerado, sabendo que o exterior da casa também é considerado como sendo um cômodo. Use linhas (segmentos) para representar as portas que ligam os cômodos entre si.

Atividade 4

1- Dado um cômodo com uma quantidade par de portas, quantas vezes devemos passar por ele, de forma a envernizar todas as maçanetas (interiores e exteriores) das portas do cômodo?

2- Dado um cômodo com uma quantidade ímpar de portas, quantas vezes devemos passar por ele, de forma a envernizar todas as maçanetas (interiores e exteriores) das portas do cômodo?

Atividade 5

1- De acordo com as observações da atividade anterior, com qual cômodo você iniciaria o serviço e em qual terminaria o serviço?

2- Sabendo disso, tente encontrar um caminho que resolveria o problema de Tamao.

3- Quantos caminhos existem? Qual é a semelhança entre eles?

4- Então, foi ou não injustiça o que fizeram com Tamao?

Atividade 6:

O diagrama feito na **Atividade 3** é chamado de grafo.

Chamamos os pontos dos grafos de vértice e os segmentos de aresta. Além disso, o grau de um vértice é a quantidade de arestas que incide nele.

Com base nas observações feitas anteriormente e na resolução do problema, é possível responder às perguntas abaixo?

1- Qual é a condição a ser imposta sobre o grau de cada vértice de um grafo, para que assim possamos percorrer cada uma de suas arestas uma única vez e terminar no mesmo vértice de partida?

2- Qual é a condição a ser imposta sobre o grau de cada vértice de um grafo, para que assim possamos percorrer cada uma de suas arestas uma única vez e terminar num vértice distinto do vértice de partida?

Aplicação – Dominós

Definimos uma partida de dominó como perfeita, se conseguimos formar uma partida que use todas as pedras e conseguimos completar um circuito, isto é, passar por todas as pedras e voltar na mesma cifra com que iniciamos.

Definimos uma partida de dominó como semi-perfeita, se conseguimos formar uma partida que use todas as pedras e conseguimos passar por todas as pedras, entretanto não voltamos na cifra inicial.

Atividade

1- Considere as seguintes pedras: 0-1, 0-2, 0-3, 1-4, 1-6, 1-3, 2-4, 2-6. Com esse conjunto de pedras é possível formar que tipo de partida? Por que?

2- Para fazer um esquema da partida, como fizemos no item 2 da atividade 3, o que deveriam representar os pontos e as linhas?

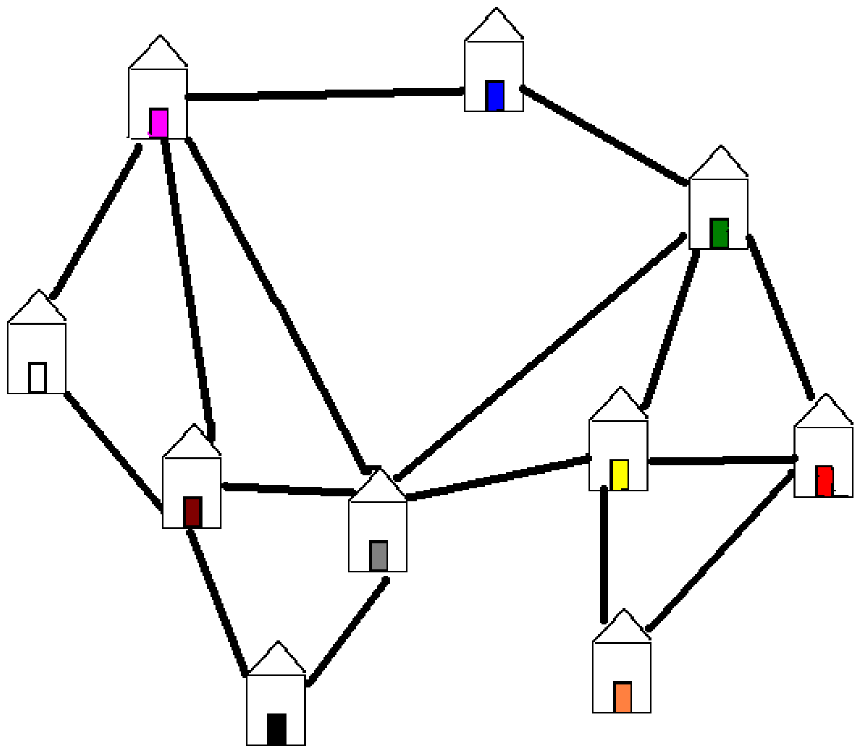
3- Considere esse outro conjunto de pedras: 0-5, 0-2, 0-3, 0-4, 1-2, 1-4, 4-3, 4-5. Monte um esquema com pontos e linhas para identificar o tipo de partida que seria formada.

4- Vamos acrescentar as pedras 0-0, 1-1, 2-2, 3-3, 4-4 aos conjuntos de pedras dos itens 1 e 3. Faça os esquemas (os grafos) para cada caso e, com base neles, explique o que ocorre nas partidas.

5- O que podemos concluir a respeito da condição para se ter uma partida perfeita e uma semi-perfeita?

Desafio

Você é um carteiro e recebe uma missão do seu chefe que é a de distribuir as cartas nas casas da figura abaixo de modo a passar apenas uma única vez por cada uma das ruas que as ligam.



Atividade

1. Seria possível realizar essa tarefa? Como a realizaria?
2. Quantos caminhos diferentes você poderia fazer?
3. O que cada um desses caminhos têm em comum?