



## **O EXPERIMENTO ALEATÓRIO COMO FERRAMENTA DE APRENDIZAGEM NO ESTUDO DE PROBABILIDADE. ELABORAÇÃO E ANÁLISE DE SEQUENCIA DIDÁTICA, BASEADA NA METODOLOGIA DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMA**

Thafarel Rodrigues da Costa<sup>1</sup>  
Universidade de Brasília  
thafarel.rodrigues@hotmail.com

Guy Grebot  
Universidade de Brasília  
guy@mat.unb.br

**Resumo:** O artigo apresenta resultados de uma pesquisa realizada em escolas públicas do Distrito Federal no âmbito do Programa Institucional de Iniciação a Docência – PIBID/CAPES do MAT/UnB. A problemática em questão é a elaboração de uma sequência didática baseada na resolução de problemas que tem como foco a importância da realização de experimentos aleatórios no estudo de probabilidade.

**Palavras-chave:** Probabilidade; Experimento aleatório; Resolução de Problemas.

### **1. Introdução**

O ensino de probabilidade na educação básica, em geral, é mecânico. Situações do tipo lançar uma moeda e determinar a chance de ocorrer uma das faces, são resolvidas com auxílio do pensamento intuitivo dos estudantes, o que é necessário mas não suficiente para mediar de forma eficiente o estudo de probabilidades. Além disso, os PCNs (BRASIL, MEC, 1998) de matemática destacam que:

Em contrapartida à simples reprodução de procedimentos e ao acúmulo de informações, educadores matemáticos apontam a resolução de problemas como ponto de partida da atividade matemática. Essa opção traz implícita a convicção de que o conhecimento matemático ganha

<sup>1</sup> Os autores Thafarel Rodrigues e Guy Grebot foram bolsistas do PIBID/CAPES, na qualidade de aluno de graduação e coordenador de área, respectivamente, durante a elaboração dessa pesquisa.



significado quando os alunos têm situações desafiadoras para resolver e trabalham para desenvolver estratégias de resolução. (BRASIL, 1998, p. 122 ).

Nessa perspectiva, desenvolvemos uma pesquisa que visava trabalhar com novas estratégias para o ensino de probabilidade. Esta investigação ocorreu em Junho de 2012, em escola pública parceira do PIBID/CAPES com alunos que realizaram as atividades em período contrário ao regular.

## 2. Objetivos

A pesquisa realizada teve como objetivo elaborar e testar atividades, dentro da metodologia de resolução de problema, que permitam levar o aluno a pensar de forma organizada e com autonomia, problematizar e tomar decisões por meio de interação com materiais didáticos concretos mediadores e trabalho colaborativo.

## 3. Discussão

A seguir será apresentado o jogo usado na elaboração da sequência didática para que o leitor se familiarize com suas regras. Em seguida, há um estudo do jogo onde são explicitados a fundamentação teórica para compreensão e justificativa do que foi elaborado.

### 3.1 O Jogo

Feche a Caixa é um jogo de estratégia e sorte que tem origem provável na França. Em sua forma original, o jogo consiste de um tabuleiro com peças numeradas de 1 a 9 e dois dados, semelhante à figura abaixo.



Figura 1-Jogo Feche a caixa.



O jogador rola os dados e observa a soma obtida para fechar as peças. Se a soma for 8, o jogador pode fechar as peças:

- 8
- $6 + 2$
- $5 + 2 + 1$

Esse processo é repetido até que seja impossível fechar peças, como no exemplo seguinte.

Resultado dos dados: 2 e 2.

*Tabela 1-Exemplo onde não é possível realizar jogadas.*

|  |   |   |  |   |   |  |   |  |
|--|---|---|--|---|---|--|---|--|
|  | 2 | 3 |  | 5 | 6 |  | 8 |  |
|--|---|---|--|---|---|--|---|--|

Ganha o jogo quem “fechar a caixa” (virar todas as peças) ou deixar a menor pontuação. No caso acima, o jogador deixou 24 pontos. **Quando a soma das peças for menor ou igual a 6, o jogador decide se joga com um ou dois dados.**

### 3.2 O experimento aleatório

De acordo com Iezzi (1977):

experimentos aleatórios são aqueles que, repetidos em idênticas condições, produzem resultados diferentes. (IEZZI, 1977, p. 69)

A regra destacada do jogo permite o seu estudo por meio da realização de um experimento aleatório, a partir do qual os alunos devem decidir se é melhor jogar com um ou dois dados para dois casos distintos: quando é realizada uma jogada e quando são realizadas duas jogadas.

Em ambos os casos há a seguinte disposição das casas, onde 6 é o valor necessário para fechar a caixa.

*Tabela 2- Disposição estudada.*

|   |   |   |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|--|--|--|--|--|--|
| 1 | 2 | 3 |  |  |  |  |  |  |
|---|---|---|--|--|--|--|--|--|



São realizados dois experimentos, o primeiro na atividade 5 onde ,inicialmente, cada aluno realiza 10 lançamentos de um dado e registra os resultados obtidos em tabela própria.

Vale lembrar que para esse experimento  $\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}$  e o **evento** de interesse é o **subconjunto**  $A=\{6\}$  de  $\Omega$ . Logo a **probabilidade** de fechamento da caixa é de 1/6.

No segundo momento os alunos realizam 10 lançamentos de **dois dados idênticos simultaneamente** e, novamente, o interesse é identificar a ocorrência da soma 6. Esse caso requer atenção, pois o leitor, numa análise superficial do problema, afirmaria que a probabilidade desse evento é de 5/36 pois, de acordo a tabela seguinte, a soma 6 pode ocorrer em 5 casos distintos.

*Tabela 3-Somas possíveis se houver distinção dos dados.*

|   | 1 | 2 | 3 | 4  | 5  | 6  |
|---|---|---|---|----|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  | 7  |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  | 8  |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  | 9  |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8  | 9  | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9  | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

Se houvesse distinção entre os dados, os resultados obtidos poderiam ser representados por um par ordenado  $(a,b)$  onde  $a$  e  $b$  são os valores obtidos nos dados. Pela regra, a soma  $a + b$  é o valor que deve ser considerado para fechar peças, logo, para esse caso, essa soma seria contada duas vezes o que causaria erro na análise da probabilidade.

Assim, a representação dos resultados obtidos deve ser por meio de um conjunto  $\{a,b\}$  pois, por exemplo, os conjuntos  $\{2,3\}$  e  $\{1,4\}$  fornecem a mesma soma mas são diferentes e isso mostra que dentre todas as possíveis combinações dos valores dos dados não há repetições.



*Tabela 4-Somas possíveis se não houver distinção dos dados.*

|   | 1 | 2 | 3 | 4 | 5  | 6  |
|---|---|---|---|---|----|----|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6  | 7  |
| 2 |   | 4 | 5 | 6 | 7  | 8  |
| 3 |   |   | 6 | 7 | 8  | 9  |
| 4 |   |   |   | 8 | 9  | 10 |
| 5 |   |   |   |   | 10 | 11 |
| 6 |   |   |   |   |    | 12 |

### 3. Metodologia

Na perspectiva da resolução de problemas, Allevato e Onuchic (2006) afirmam que:

Os alunos investigam quando buscam, utilizando os seus conhecimentos construídos, descobrir caminhos e decidir quais devem tomar para resolver o problema, trabalhando colaborativamente, relacionando ideias e discutindo o que deve ser feito para chegar à solução. (ALLEVATO e ONUCHIC, 2006, p.4)

O caderno foi desenvolvido seguindo essa perspectiva. A construção de materiais concretos e auxiliares foi essencial para fornecer suporte ao processo de descoberta dos estudantes. A elaboração da pesquisa seguiu frentes distintas porém indissociáveis:

- Pesquisa em nível de terceiro grau com orientação semanal de duas horas do professor orientador;
- Transposição didática das informações pesquisadas (elaboração de um Caderno de Atividades);
- Aplicação do Caderno de Atividades;
- Análise dos resultados obtidos.

A aplicação do caderno em sua versão completa ocorreu em uma turma regular do PIBID/MAT-UnB acompanhada desde Abril de 2012 no Centro Educacional 03 do Guará, com 10 alunos do 9º ano do ensino fundamental. Foram realizados três encontros semanais de cerca de 100 minutos em Junho de 2012 seguindo a metodologia do PIBID/MAT-UnB.

Houve ainda a aplicação de atividades adaptadas a alunos do 2º ao 5º ano do ensino



fundamental em uma vivência de matemática realizada pela SBEM-DF em Abril de 2012.

A avaliação dos resultados das atividades foi realizada com base nos relatórios feitos ao longo da execução do Caderno. Esses relatórios consistem de uma relação do desempenho e motivação dos alunos, das principais dificuldades encontradas na aplicação das atividades e estratégias que foram utilizadas para superá-las.

#### **4. Resultados**

Os resultados abrangem dois momentos: a elaboração da sequência didática dentro da metodologia de resolução de problema e a aplicação dos Cadernos.

##### **4.1 Elaboração da sequência didática**

Para tornar mais clara a estrutura dos Cadernos, colocamos aqui algumas características que buscamos obedecer na elaboração do mesmo:

- Os conhecimentos específicos não deveriam ser tratados como pré requisitos e deveriam ser trabalhados na ação mediadora do professor;
- Os momentos de instabilidade deveriam ser vistos com grande potencial para a construção de novos conhecimentos;
- Poderia haver necessidade da utilização de material concreto mediador;
- Deveria haver um espaço para a aplicação dos conceitos matemáticos apreendidos ao longo do desenvolvimento das atividades em outras situações, contextualizadas ou não.

Esta última característica se faz necessária para avaliar o rendimento dos alunos quanto aos conhecimentos matemáticos específicos.

##### **4.2. Aplicação do Caderno**

A sequência didática foi aplicada em dois momentos distintos para alunos de diferentes faixas etárias e níveis escolares, o que mostra que o caderno pode ser adaptado de acordo com o público alvo. A seguir há uma síntese dos acontecimentos relevantes que colaboraram para a conclusão do Caderno.



#### **4.2.1 Aplicação na Vivência SBEM-DF.**

Durante a elaboração da sequência didática, surgiu a oportunidade de aplicação das atividades desenvolvidas até então, no dia 28 de Abril de 2012 em vivência realizada pela SBEM-DF no Centro de Ensino Fundamental 01 da Estrutural com alunos do 2º ao 5º ano.

Nessa ocasião, o objetivo quanto à participação dos estudantes, foi o aprimoramento do cálculo mental além da habilidade de decomposição numérica, habilidades que podem ser desenvolvidas com auxílio das atividades do Caderno. Os alunos realizaram o caderno com auxílio de material didático concreto e seguindo orientações dos bolsistas presentes. O envolvimento dos participantes ficou e este fato foi crucial para atingir o objetivo proposto.

#### **4.2.2 Aplicação em escola parceira do PIBID/CAPES.**

O primeiro encontro ocorreu em 12 de Junho de 2012. As instruções do Caderno foram lidas em conjunto e eventuais dúvidas foram esclarecidas por meio de exemplos e com a participação de alunos que haviam compreendido a dúvida levantada. Esclarecidas as dúvidas, a primeira atividade proposta foi o “jogar” o jogo com intuito de firmar as regras. Os alunos em geral gostaram muito dessa atividade e a expectativa de lançar os dados e obter o resultado esperado contagiou a todos.

Na segunda atividade foi iniciado o estudo do jogo. Logo no primeiro item sobre o mínimo de jogadas respostas diferentes surgiram, uma pensando-se em resultados que maximizavam a soma das faces dos dados e outra obtida por tentativas e erros. Essa última não foi esperada, pois durante a confecção do Caderno foi considerada apenas a primeira. A segunda resposta, porém, é a que permite maior gama de possibilidades a serem trabalhadas e será aprofundada no aprimoramento do Caderno.

Uma das regras do jogo permite ao jogador a escolha de jogar com um ou dois dados no momento em que a soma das casas, ainda abertas, for menor ou igual a 6. Este encontro foi dedicado ao estudo dessa regra por meio de um **experimento aleatório** que consistiu, no primeiro momento, em 20 lançamentos de **um dado** por cada aluno. O



resultado obtido por eles foi registrado, individualmente, numa tabela de frequências previamente fornecida.

Após a coleta de dados, o resultado obtido por cada aluno foi socializado por meio de uma tabela desenhada no quadro da sala (ANEXO). Esse processo foi repetido para o caso onde foram lançados **dois dados idênticos simultaneamente**.

Os alunos discutiram o resultado encontrado e concluíram que é melhor jogar com um dado, pois de acordo com o experimento para o caso onde cada aluno realizou 20 lançamentos de um dado, que totalizaram 100 lançamentos, em 15 obteve-se o resultado 6, que é a soma necessária para fechar a caixa. Já no segundo caso, onde cada aluno realizou 20 lançamentos simultâneos de dois dados idênticos, a frequência da soma 6 foi 14, portanto menor que no caso anterior.

O experimento foi realizado com sucesso, pois a conclusão da turma é de fato o resultado esperado. Aqui há ainda margem para discussão no caso onde o experimento é falho, pois já que o número de lançamentos realizados é **limitado** e as probabilidades analisadas possuem valores muito próximos, a saber  $1/6$  e  $1/7$ , é possível que o resultado obtido não seja o esperado.

O último encontro foi dedicado a responder a seguinte questão: o resultado observado na atividade 5 seria o mesmo se forem realizadas duas jogadas de um e de dois dados?

Primeiramente foi pedido para os alunos redigirem um pequeno texto sobre suas expectativas em relação a este experimento. As respostas dadas foram diferentes e cada aluno expôs o seu argumento. Destacamos as seguintes respostas:

- “*Na minha opinião é melhor jogar com dois dados pois tem a probabilidade maior de conseguir fechar a caixa*”.
- “*Na minha opinião seria conveniente jogar com 1 dado pelo fato de que precisamos jogar 2 vezes o dado, mas com dois dados tem uma probabilidade muito pequena de conseguir fechar a caixa*”.



Na primeira resposta está claro o equívoco do aluno pois ele acreditava que ao lançar mais dados a probabilidade de sucesso aumentaria. Esse erro foi visto como oportunidade para o enriquecimento da aula. O segundo aluno já mostra maior domínio sobre o conteúdo estudado e maior capacidade de argumentação. Este aluno foi o primeiro a mencionar o termo “probabilidade” pois, até então, a mediação havia sido conduzida fazendo uso do termo “chance” com a preocupação de que não ocorressem equívocos na definição desse conceito.

Esse experimento foi conduzido de forma semelhante ao anterior. Os alunos realizaram 20 lançamentos para cada caso, totalizando 80 lançamentos. Os resultados foram registrados numa tabela de frequência e socializados posteriormente. Os alunos viram que para duas jogadas de um dado a soma 6 ocorreu 12 vezes, enquanto que para o lançamento de dois dados esta frequência se reduziu a 1.

De posse dessas informações, eles concluíram que é melhor jogar com apenas um dado, tanto para o caso onde é realizada uma jogada quanto para o caso onde são realizadas duas jogadas.

## 5. Conclusões

Ao longo da execução das atividades, foi possível perceber melhora da capacidade de argumentação dos alunos, o que se deu não somente em função da realização do Caderno mas, também em função de todo trabalho desenvolvido desde Abril de 2012 quando foram iniciados os encontros semanais com esses alunos.

Com os resultados obtidos é possível concluir que o estudo do jogo foi essencial para atingir o objetivo proposto e este fato reforça a necessidade do uso de situações motivadoras/desafiadoras no processo de ensino e aprendizagem.

Os experimentos aleatórios realizados ajudaram os alunos a compreender o que realmente significa uma probabilidade, pois a análise da frequência dá uma informação quantitativa da ocorrência de um evento que é próxima da probabilidade desse evento quando o experimento é realizado um grande número de vezes.



Do ponto de vista do PIBID/CAPES do MAT-UnB esta experiência resultou em aprendizagem de novas formas de ensino de probabilidade e vai além do modelo tradicional de ensino ao propor o uso de uma sequência didática baseada na metodologia de resolução de problemas.

## Referências

ALLEVATO, N. S. G.; ONUCHIC, L. R. Ensino-aprendizagem-avaliação de matemática através da resolução de problemas: uma nova possibilidade para o trabalho em sala de aula. *Actas da VII Reunião de Didática da Matemática do Cone Sul*. Águas de Lindóia-SP, 2006.

BRASIL. MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais: terceiro e quarto ciclo do ensino fundamental*. Brasília: MEC/SEF, 1998.

IEZZI, Gelson. Fundamentos de Matemática Elementar. São Paulo, Atual. 1977.



## Anexos

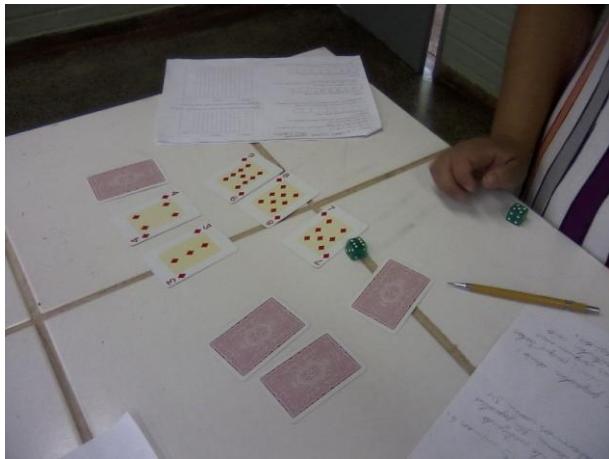
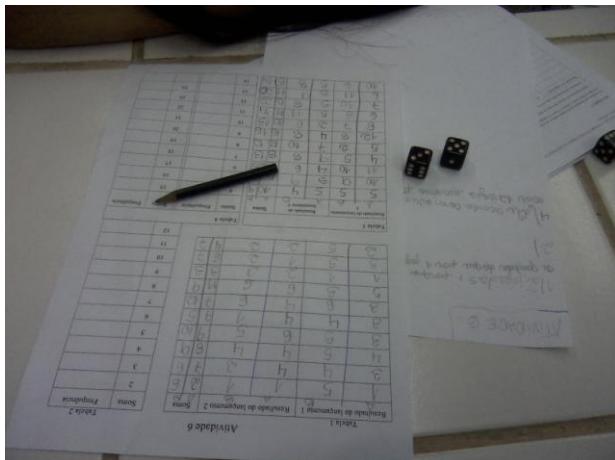


Figura 2- O jogo.



*Figura 3-Tabela de Frequência fornecida.*



Figura 4-Tabuleiro.



Figura 5-Tabelas para atividade 5.



| TABELA 4 |            |      |       |
|----------|------------|------|-------|
| SOMA     | FREQUÊNCIA | SOMA | FREQ. |
| 0        |            | 25   |       |
| 1        |            | 16   |       |
| 2        |            | 8    |       |
| 3        |            | 11   |       |
| 4        |            | 19   |       |
| 5        |            | 20   |       |
| 6        |            | 21   |       |
| 7        |            | 22   |       |
| 8        |            | 23   |       |
| 9        |            | 24   |       |

Figura 6-Tabela para atividade 6.



Figura 7-Alunos do projeto.