



UMA ALTERNATIVA PARA O ENSINO DA LEI DOS SENOS E LEI DOS COSSENO

Claiton Rogério Seger

Instituto Federal de e Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – câmpus Santa Rosa
- RS
segerrcrs@gmail.com

João Sidinei Marostega

Instituto Federal de e Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – câmpus Santa Rosa
- RS
jsmarostega@yahoo.com.br

Ronei Osvaldo Ziech

Instituto Federal de e Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – câmpus Santa Rosa
- RS
roneiziech@gmail.com

Claudia Maria Costa Nunes

Instituto Federal de e Educação, Ciência e Tecnologia Farroupilha – câmpus Santa Rosa
- RS
claudia.nunes@iffarroupilha.edu.br

Resumo

O presente trabalho tem o objetivo investigar uma prática realizada com alunos do ensino médio de uma escola pública do município de Tucunduva, para elucidar e compreender os aspectos que envolvem os diferentes saberes docentes que contribuem para a construção significativa de conhecimentos. Trabalho este realizado por acadêmicos do curso de Licenciatura em Matemática do IFFarroupilha - Câmpus Santa Rosa. Nesta proposta, foram desenvolvidos modelos matemáticos relacionados à definição de Senos e Cossenos, propondo a construção de uma ponte com auxílio de uma maquete para elucidar a situação problema. Nesta perspectiva, destaca-se a modelagem matemática como uma alternativa interdisciplinar, utilizando os resultados e os instrumentos de outras áreas como ponto de partida para seu desenvolvimento. Buscamos fazer desta atividade algo que despertasse o desejo pela descoberta, por isso foi utilizado softwares como *Geogebra* e *Scilab* além de uma maquete que representava nossa situação problema, possibilitando a manipulação e investigação do problema. Percebemos ao final do projeto maior entendimento por parte dos alunos, não somente na relação existente entre as proporcionalidades do seno e cosseno, mas também a aplicação desses conceitos na resolução de problemas práticos. Ficou evidente a contribuição do uso do software na elucidação desses conceitos e no seu papel como



suporte de ensino, vale ressaltar que esse projeto contemplou a interdisciplinaridade quando debateu os impactos ambientais que uma construção pode ocasionar e as maneira que essas consequências podem ser evitadas.

Palavras-chave: Modelagem Matemática, conhecimento, ensino-aprendizagem.

1. Introdução

O cenário educacional atual apresenta dificuldades relacionadas ao ensino e aprendizagem de diversas áreas, principalmente no campo das Ciências Exatas. Portanto, este trabalho traz o relato de uma prática de ensino envolvendo Lei dos Senos e Cossenos, utilizando softwares e metodologias alternativas, como a Modelagem Matemática, para potencializar no aluno a capacidade de independência intelectual.

A Modelagem Matemática tem o objetivo de estimular os alunos a buscar estratégias próprias de respostas através do uso da criatividade. Com isso, relaciona os conhecimentos matemáticos a situações práticas, interligando matemática e realidade.

Para obtenção de maior êxito na compreensão da Lei dos Senos e Lei dos Cossenos, foi realizado um desafio aos estudantes, o qual consiste na elaboração de modelos matemáticos para o cálculo da distância entre as margens de um rio, para a construção de uma ponte.

Seguindo esta ideia, os estudantes utilizaram os softwares *Geogebra* e o *Scilab*, para auxiliar os cálculos e possibilitar interações entre o objeto de estudo e o conhecimento.

De acordo com esta perspectiva, os alunos foram instigados a realizar manipulações e experimentações para compreender o problema e formular respostas autênticas que demonstrassem o entendimento sobre os conceitos matemáticos trabalhados, Lei dos Senos e dos Cossenos. Assim, desenvolvendo o potencial intelectual, através da exploração de ferramentas computacionais para a construção do aprendizado.

2. Referencial Teórico

Sob a perspectiva de mudanças no paradigma da Educação, as metodologias para o ensino de matemática visam proporcionar maior autonomia dos alunos na



aprendizagem. Para tanto, a modelagem Matemática busca a interação entre professor, aluno e o objeto de estudo, interligando a realidade ao conhecimento matemático.

A partir disso, Biembengut e Hein (2010), defendem que a Modelagem é a integração entre dois conjuntos distintos: matemática e realidade. Nesta experiência, esta metodologia foi dividida em três etapas para a construção do aprendizado: Interação, Matematização e Modelo Matemático. Segundo os autores, essa interação permite representar uma situação “real” com o “ferramental”. (p.13). A Matematização é a etapa que deve ser feita a modificação da linguagem do problema para a linguagem matemática, e o Modelo Matemático é a proximidade da resolução com a situação problema proposta.

Neste contexto, esta experiência visa oportunizar aos alunos o uso de métodos distintos para a resolução de uma situação problema. Partindo disto, desenvolveu-se práticas pedagógicas que possibilitem situações próprias de aprendizagem, através do uso da criatividade, conciliando o saber matemático com situações reais.

Neste viés, verificou-se a necessidade de oportunizar aos alunos ferramentas para a construção de conjecturas necessárias para a definição do modelo, que possibilite a resolução do problema proposto. Através do uso do software matemático *Geogebra*, os alunos fizeram construções e manipulações geométricas evidenciando os conceitos abstratos, assim potencializando os processos de ensino e de aprendizagem.

Segundo Bernard, Ortega Junior e Tavares (2000) uma das grandes vantagens da utilização de softwares na educação matemática é a possibilidade de construir e representar dinamicamente a situação do objeto de estudo, isto é, poder movimentar de várias formas as construções geométricas mantendo-se invariantes suas propriedades. Para estes autores, as atividades de matemática utilizando ambientes informatizados têm servido de elemento motivacional aos alunos e contribuído para ampliar o desenvolvimento do raciocínio lógico no ensino dessa disciplina.

A utilização das tecnologias traz ao ambiente escolar uma versatilidade que possibilita ao processo de ensino e aprendizagem diferentes aplicações. Com isso, exigindo do professor a necessidade de uma formação contínua para acompanhar está mudança do ambiente escolar.



A oferta de recursos tecnológicos possibilita aos alunos e professores a oportunidade de fazer com que o computador esteja presente no cotidiano escolar e que seja uma fonte de informação, que se bem utilizada e com apoio de um profissional, pode gerar conhecimento.

3. A Prática

A prática foi planejada para despertar nos alunos o interesse pelo saber. No primeiro momento, os alunos foram desafiados a encontrar uma solução para resolver o seguinte problema (Figura 1):

Um engenheiro teve a incumbência de construir uma ponte sobre um rio, para isso ele marcou um ponto na margem oposta do rio, o qual chamou de B, da mesma forma marcou outro ponto na margem do rio, o qual denominou ponto A, a partir do qual o engenheiro andou 100 m ate o ponto que denominou C, observou-se que o ângulo \hat{ABC} formado era de 120° , sendo que a partir desses dados ele precisava encontrar a distância entre o ponto A e o ponto B na margem oposta do Rio.

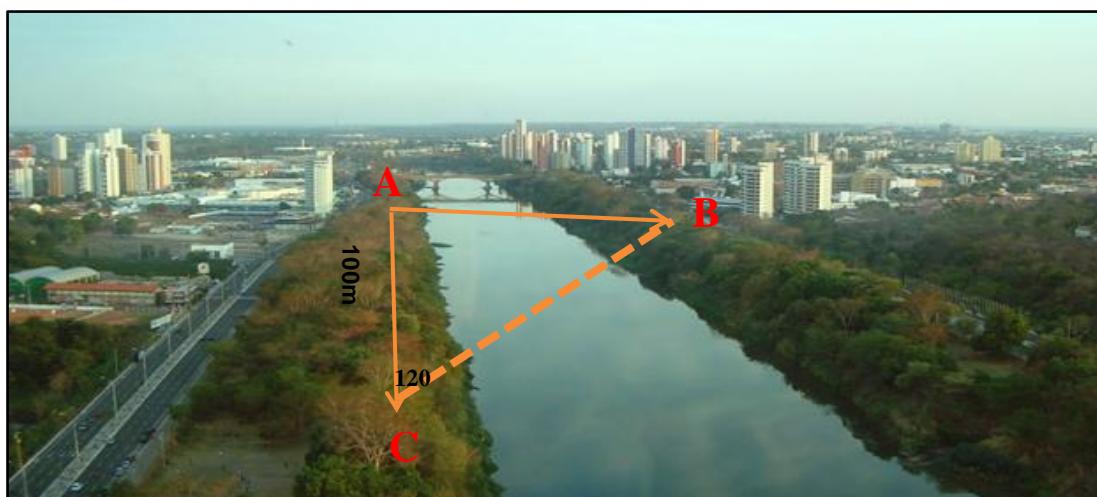


Figura 1 – Situação Problema.

Uma maquete foi utilizada para elucidar a situação problema e possibilitar aos alunos a manipulação e abstração dos dados necessários para a resolução do problema (Figura 2).

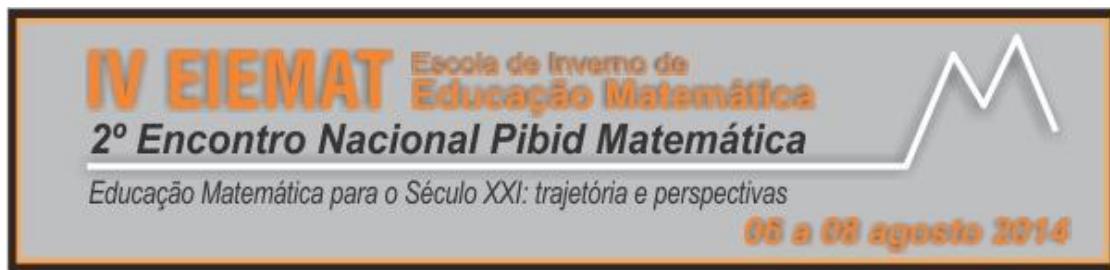


Figura 2. Maquete. Fonte: Arquivos Próprios.

Para os alunos reconhecer o material foi proporcionado um momento de socialização, onde eles deveriam debater maneiras de solucionar o problema. Durante essa dinâmica observou-se nos alunos uma leitura imprecisa do problema fato esse que não possibilitou a eles encontrarem a solução.

O segundo momento da atividade teve como objetivo avaliar o conhecimento prévio dos alunos em relação às leis do seno e cosseno, sua formação e aplicação em situações reais. Para tanto, foram distribuídos questionários para verificar o grau de conhecimento dos alunos, e a capacidade para resolução de problemas envolvendo as definições de seno e cossenos.



Figura 3 – Alunos envolvidos. Fonte: Arquivos Próprios.



Esse questionário mostrou-se bastante produtivo, pois através dele verificou-se que os alunos tinham um domínio significativo dos componentes do triângulo e a relação existente entre os lados e os ângulos do triângulo, conforme se observa nas figuras abaixo, extraídas do questionário preenchido pelos alunos:

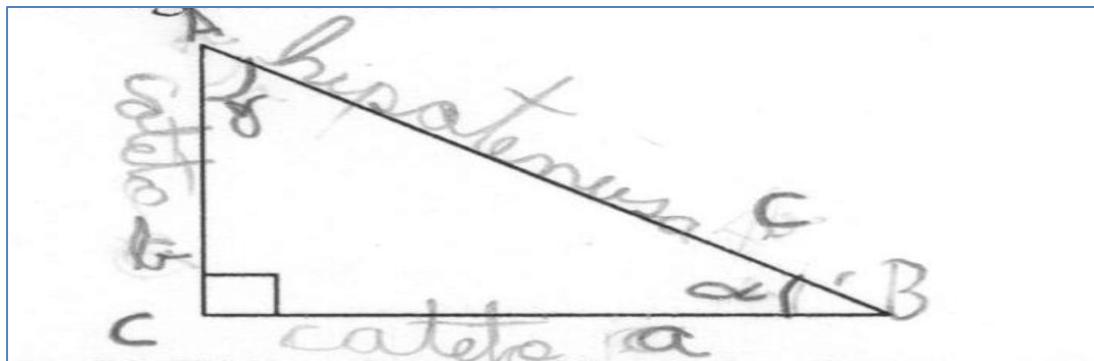


Figura 4 – Registro do Aluno A. Fonte: Arquivos Próprios.

Através da aplicação de um questionário, pode-se observar que os alunos tinham facilidade em relacionar os ângulos do triângulo retângulo, e as relações trigonométricas, conforme identificado na figura 5 e 6

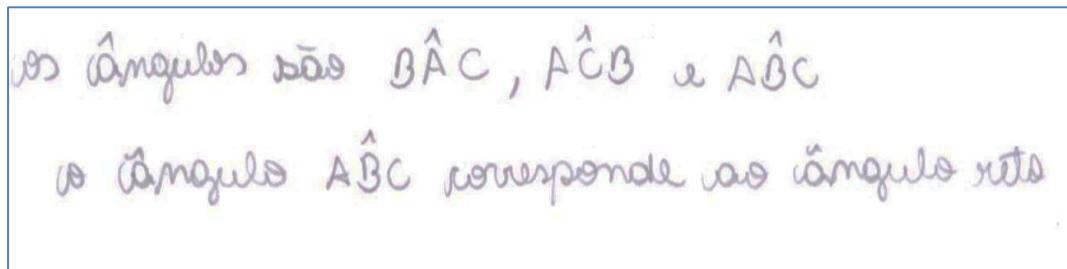


Figura 5. Registro do Aluno B. Fonte: Arquivos Próprios.

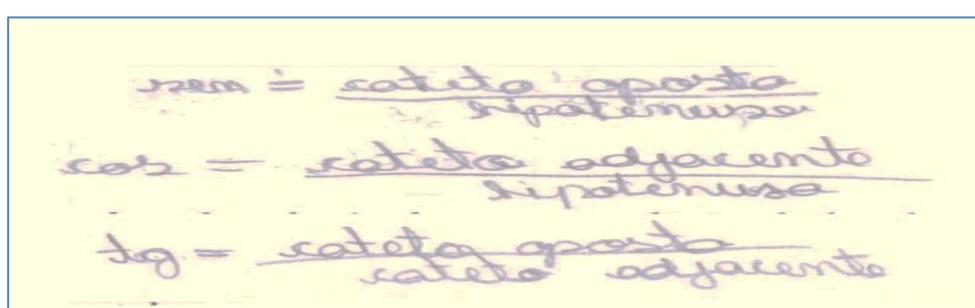


Figura 6 – Registro do aluno B. Fonte: Arquivos Próprios.



Ressalta-se ainda, as respostas corretas dos alunos referente as questões que envolviam as relações existente entre as medidas dos ângulos internos do triângulo.

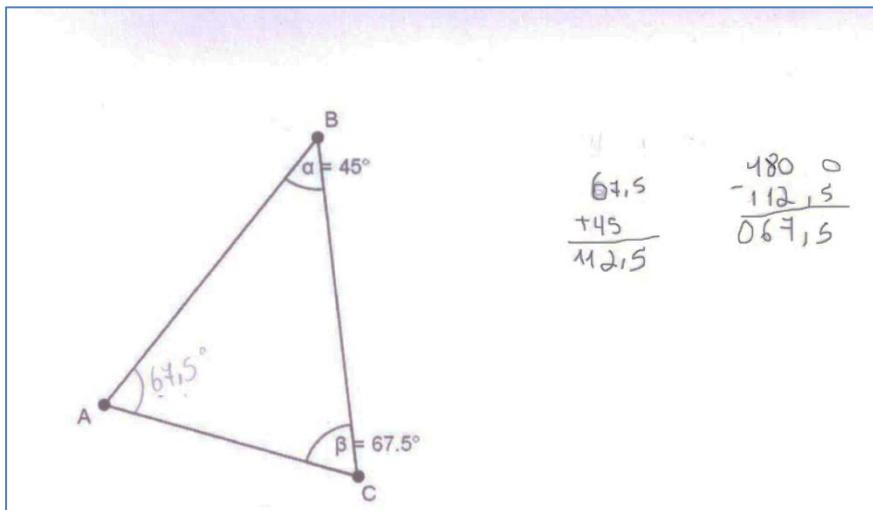


Figura 7 – Registro do aluno C. Fonte: Arquivos Próprios.

Ao final desta etapa, retomaram-se alguns conceitos básicos de geometria estudados em anos anteriores e ainda, vale salientar a importância do trabalho em grupo para o crescimento coletivo em busca de um objetivo comum. Assim, conhecimentos vão sendo reestruturados ou até mesmo resignificados com esta relação de troca, como afirma Vygotsky: que “[...] o verdadeiro curso do desenvolvimento do pensamento não vai do individual para o socializado, mas do social para o individual”. (1987, p.18). Confirmado assim que a aprendizagem é construída a partir de relações sociais.

Como alternativa de abstração dos conceitos trigonométricos, realizou-se no software Geogebra a construção de um triângulo retângulo, onde as relações de proporcionalidade pudessem ser visualizadas.

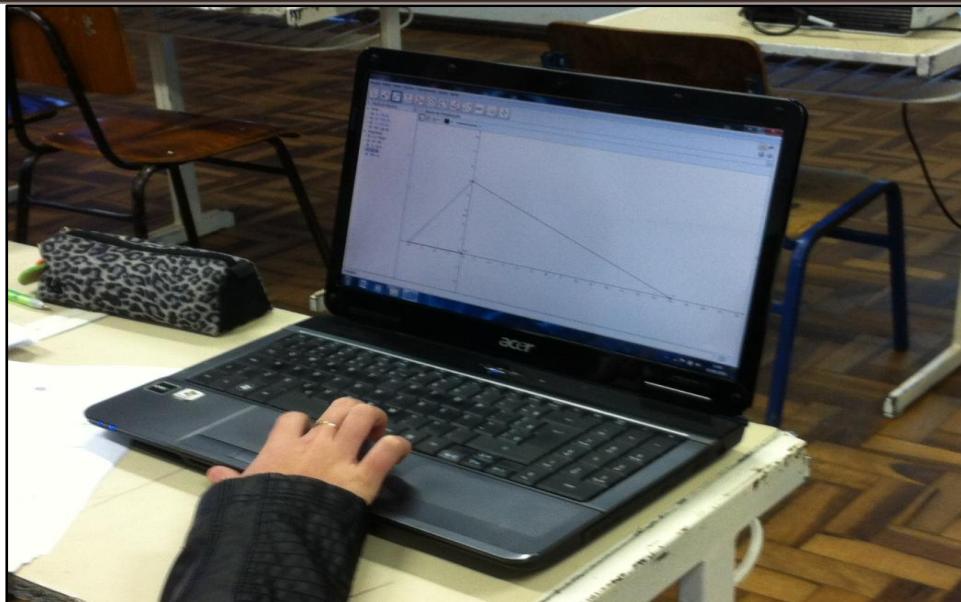


Figura 8 - Aluno utilizando o *Geogebra*. Fonte: Arquivos Próprios.

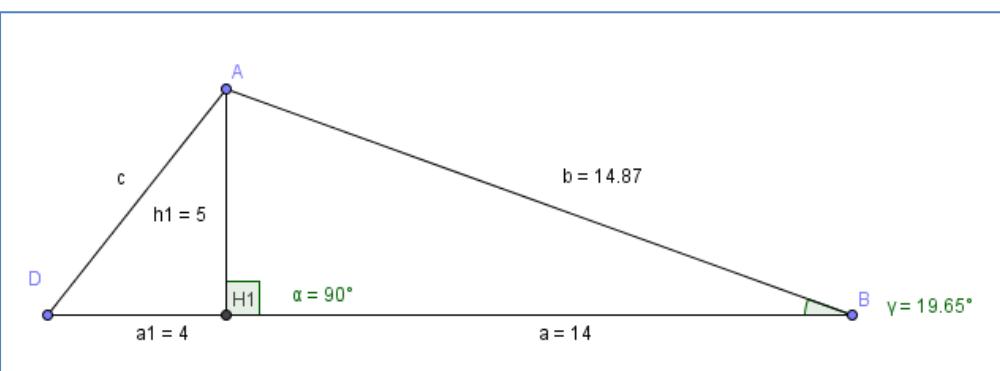


Figura 9 - Representações triangular Aluno A. Fonte: Arquivos Próprios.

Após a construção da representação do triângulo os alunos anotaram as medidas dos segmentos e ângulos conforme solicitado.



Anote os valores de:

$$c: 14,87$$

$$h_1: 5$$

$$\delta: 19,65^\circ$$

Anote os valores de:

$$c: 14.87$$

$$h_1: 5$$

$$\delta: 10.35^\circ$$

Figura 10 – Anotações do aluno B. Fonte: Arquivos Próprios.

Durante essa etapa, os alunos manipularam o triângulo construído, observando as relações e verificando conjecturas, através de movimentados de um ponto do vértice para analisar a relação existente com os lados do triângulo.

Diante dessas percepções, buscou-se identificar a relação existente entre a medida do ângulo e sua projeção sobre os segmentos correspondentes ao ângulo escolhido.

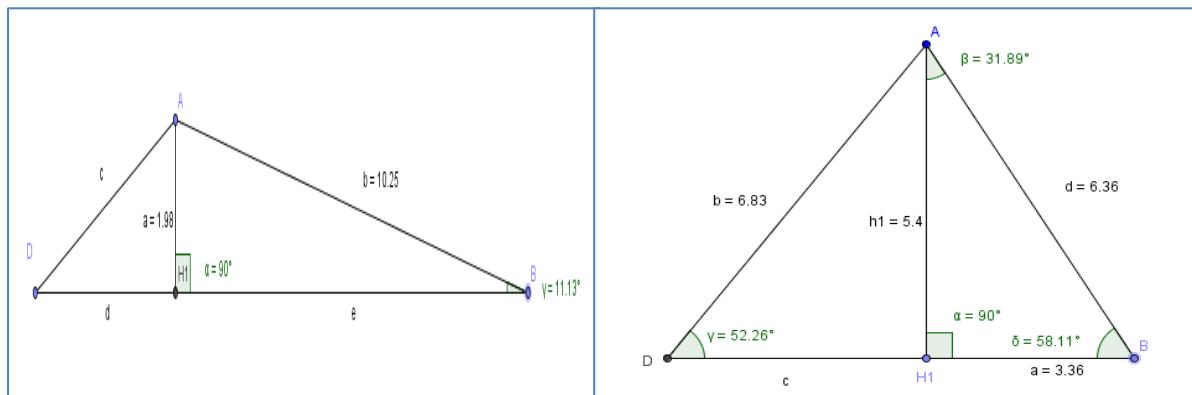


Figura 11. Manipulação realizada pelos alunos. Fonte: Arquivos Próprios.



Durante as experimentações, os alunos registraram as variações percebidas com o intuito de identificar as noções de proporcionalidade existente na construção do triângulo.

$$\begin{aligned} c &: 48,2 \\ h_1 &: 5 \\ a &: 14,5 \\ \delta &: 45,95^\circ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c &: 23,03 \\ h_1 &: 5 \\ a &: 22,46 \\ \delta &: 32,5^\circ \end{aligned}$$

Figura 12 - Registros após manipulações no Geogebra. Fonte: Arquivos Próprios.

Neste sentido, observou-se que embora houvesse diferenças nas medidas dos segmentos, a proporcionalidade existente entre os ângulos e os segmentos relacionados a esse ângulo se mantinha constante em todos os modelos construídos.

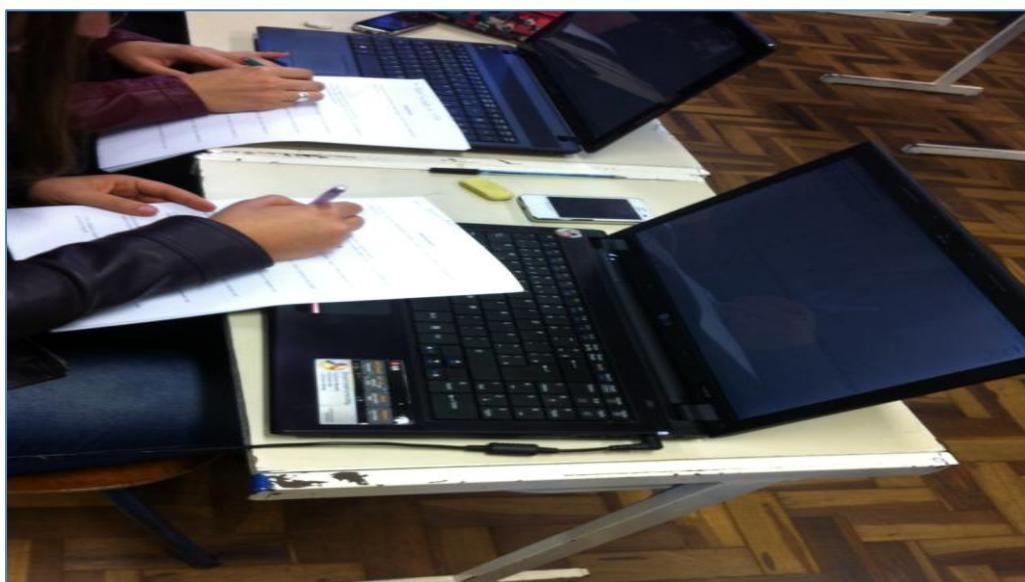


Figura 13 - Anotações individuais. Fonte: Arquivos Próprios.



Após as manipulações, os alunos responderam perguntas: “Qual a relação existente entre a variação do ângulo γ e o valor do segmento $h1$? ”.

Figura 14 - Registro Aluno C. Fonte: Arquivos Próprios.

Vale destacar que alguns conseguiram organizar suas deduções de forma a chegar no resultado esperado, encontrando a relação do ângulo com seus segmentos, ao mesmo tempo em que alguns não conseguiram identificar de forma direta.

Esperava-se que os alunos percebessem a definição de seno: $\text{seno } \alpha = \frac{\text{Cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$

Dessa forma a variação do ângulo γ vai refletir na medida do segmento $h1$. Embora isso não seja evidenciado imediatamente ao movimentar o ponto B, já que ao movimentá-lo o valor dos segmentos também sofre modificação mantendo uma proporcionalidade, justificando a sua projeção sobre o cateto oposto, neste caso o $h1$ é nula.

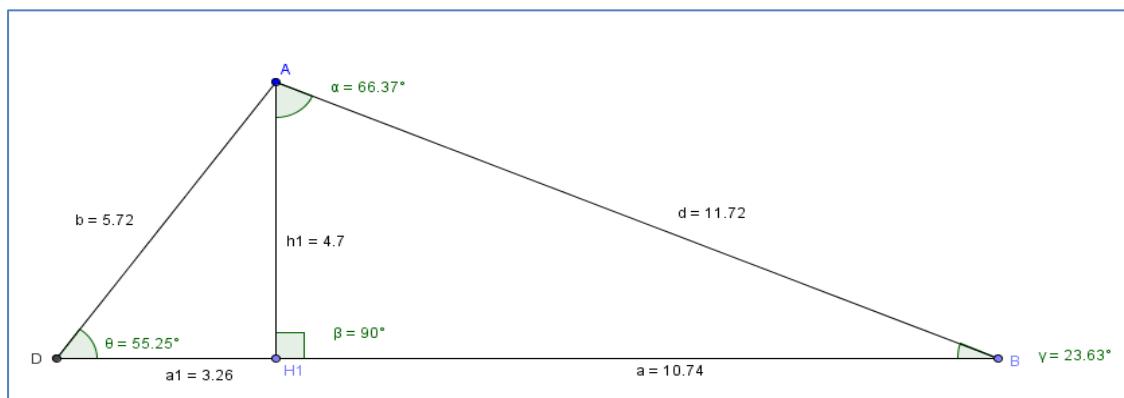


Figura 15 – Triângulo construído no Geogebra. Fonte: Arquivos Próprios.

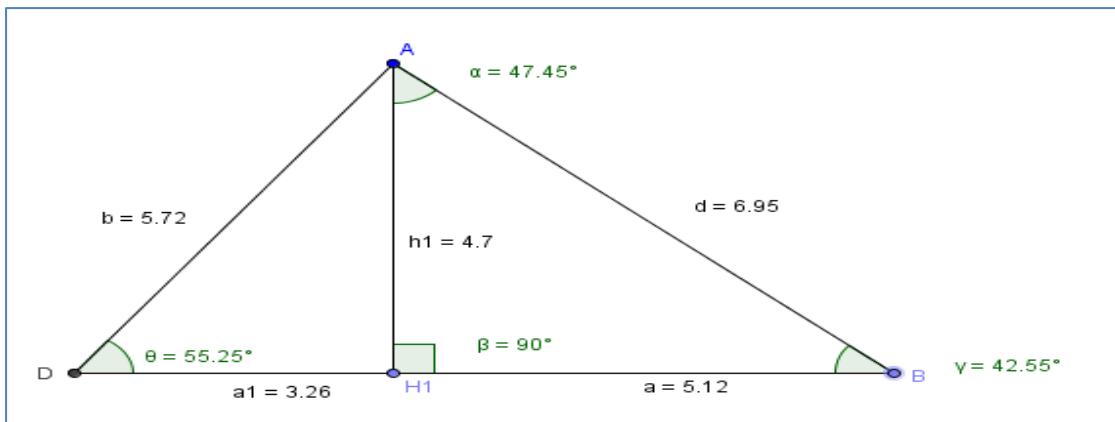


Figura 16 - Variação do triângulo. Fonte: Arquivos Próprios.

Esta tarefa teve como objetivo que ele conseguisse abstrair o conceito prático de proporcionalidade e não apenas decorar a regra prática de dedução.

Em seguida questionou-se como poderíamos encontrar a medida do segmento faltante (figura 17) utilizando seus conhecimentos prévios, todos conseguiram encontrar o resultado que representava o valor de “X”.

A figura abaixo demonstra a resolução feita pelos alunos do mesmo problema utilizando o software *Geogebra*.

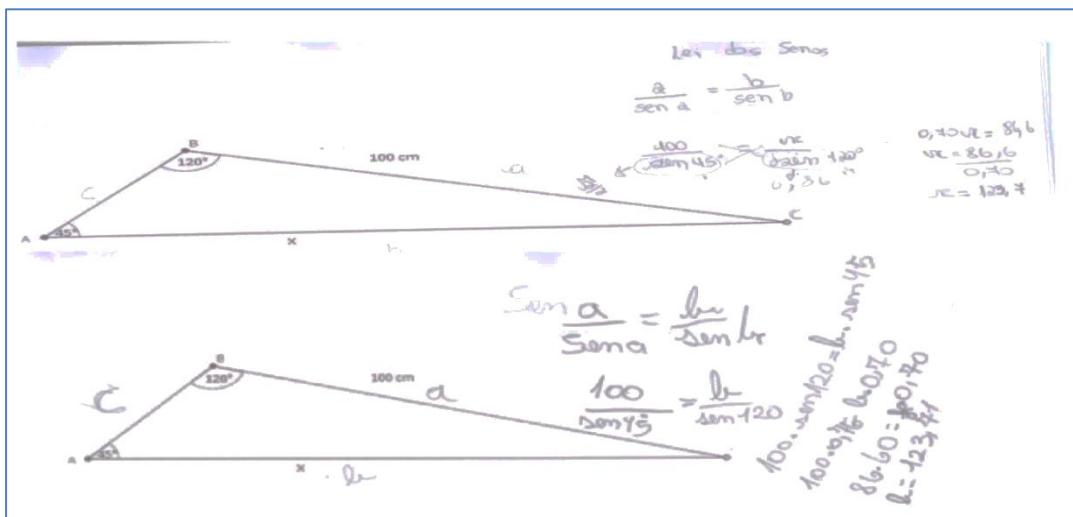


Figura 17 – Registro do aluno D. Fonte: Arquivos Próprios.

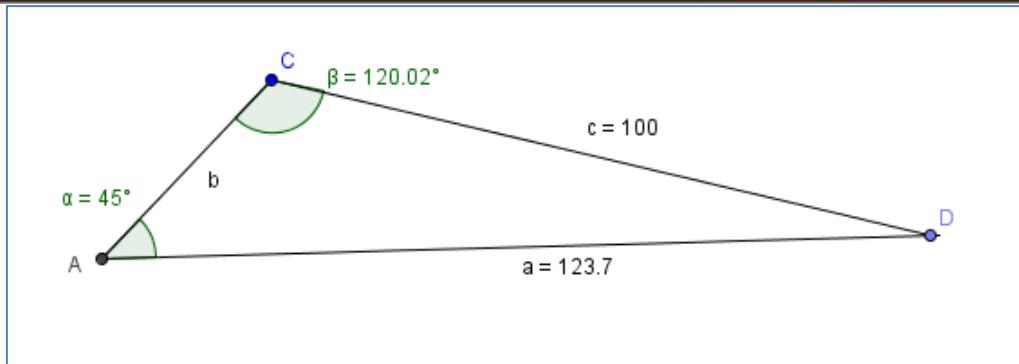


Figura 18. Registro do aluno A. Fonte: Arquivos Próprios.

Nesta atividade os alunos deveriam analisar a representação do triângulo formado e registrar os seus respectivos valores dos segmentos e ângulos, após solicitou-se que manipulassem o triângulo e analissassem o comportamento dos segmentos e dos ângulos respectivos.

Foi proposto aos alunos que construissem um triângulo obtusângulo para a demonstração da Lei dos Senos, conforme a folha de exercícios

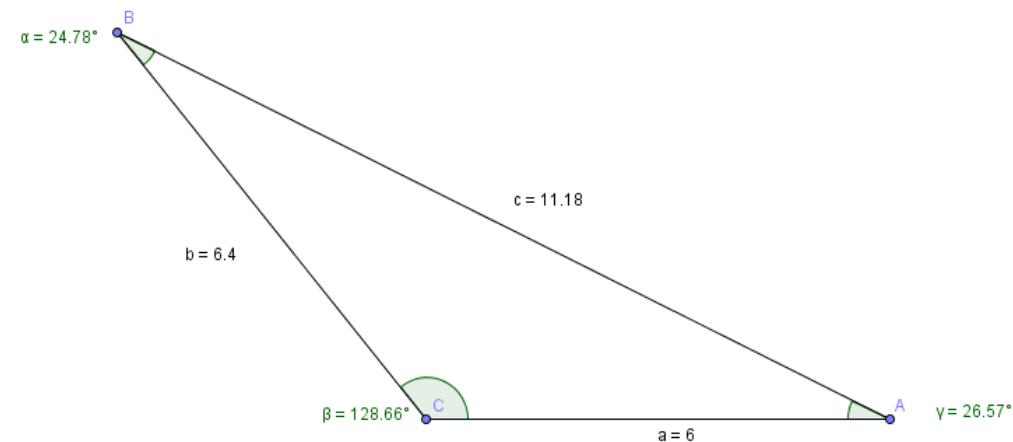


Figura 19 – Demonstração da Lei dos cossenos. Fonte: Arquivos Próprios.

Qual a relação existente entre a variação de β e o segmento a?

O aumenta de valor.

Os dois aumentam.

Figura 20 - Registros Lei dos Cossenos. Fonte: Arquivos Próprios.



Após analisar a figura anterior, os alunos que responderam ao questionário proposto, utilizando-se dos conceitos apresentados, o qual foi objeto do trabalho de pesquisa.

Neste momento ficou evidente que a atividade como um todo serviu para aprimorar alguns conhecimentos ao mesmo tempo em que ampliou o entendimento dos alunos nas relações de proporcionalidade do seno e cosseno.

Como dito pelo aluno na resolução do problema: “É só uma relação de seno e cosseno”, evidenciando claramente o entendimento dos alunos sobre o assunto trabalhado.

Com o objetivo de agregar ainda mais conhecimento tecnológico, aplicou-se um trabalho com o software *Scilab* para verificar a resolução dos cálculos matemáticos desenvolvidos durante a prática.. Este software possui centenas de funções matemáticas e é muito utilizado dentro do ambiente acadêmico.

Os resultados computacionais encontrados eram comparados com os desenvolvidos em momento anterior, sem a utilização de ferramentas informatizadas.

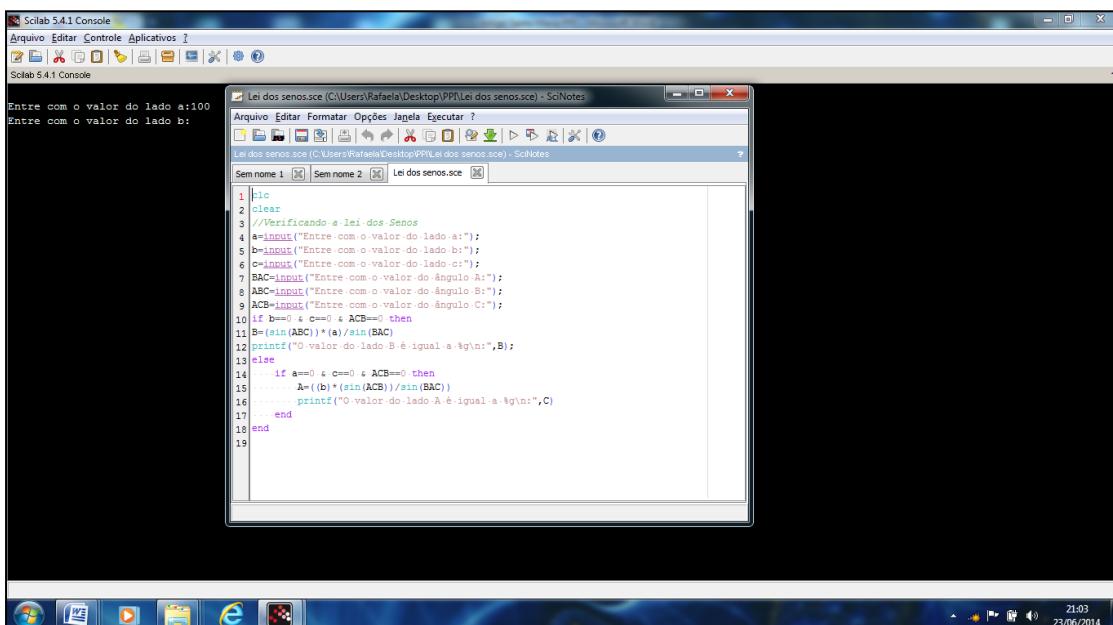


Figura 21 – Utilização do software *Scilab*. Fonte: Arquivos Próprios.



Percebe-se que a utilização de ambientes informatizados desperta maior interesse nos alunos e proporciona maior interação com os objetos de estudo, facilitando assim o trabalho didático.

Para finalizar a prática foi distribuído um fragmento do texto intitulado “*O equilíbrio entre o desenvolvimento e o meio ambiente*”, a fim de refletir sobre as grandes construções civis, a sustentabilidade e os impactos ambientais. Assim, agregando valores sociais para a formação de cidadãos conscientes com a preservação ao meio ambiente.

4. Considerações Finais

A utilização de metodologias, como a Modelagem Matemática, possibilita que os alunos atuem como autores do processo de aprendizagem, incentivando a criatividade como parte da construção do conhecimento, proporcionando ao indivíduo experimentações para um diálogo interativo com mundo em que vive.

Identificando dificuldades nos alunos, em não somente solucionar o problema inicial, mas em entender o problema, optou-se pela utilização das tecnologias de informação, como os softwares *Geogebra* e *Scilab*, que trouxeram grandes contribuições como ferramentas de experiência, com o objetivo de estimular o raciocínio e oferecer ferramentas de construção, através dessas manipulações, foi possível aos alunos potencializarem seu processo de aprendizagem.

A metodologia proposta para a prática contribuiu na construção de seres autônomos, capazes de pensar, construir e reconstruir diferentes tipos de conhecimentos, auxiliando no processo de ensino-aprendizagem.

Salienta-se ainda que os softwares auxiliaram os alunos na busca pela resolução de uma forma mais descontraída e criaram em sala de aula uma atmosfera de investigação e informalidade no processo construtivo.

Por fim, a experiência realizada comprovou a importância de práticas pedagógicas que focam o desenvolvimento cognitivo do aluno, este dotado de inteligências e habilidades que precisam ser consideradas durante o processo de ensino e aprendizagem.



5. Referências bibliográficas

BERNARD, J.; TAVARES, R. A. E.; ORTEGA JUNIOR, R. R.. *O ensino de ciências exatas utilizando representações dinâmicas*. In: WORKSHOP DE INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO. Anais Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2000. p. 77-83.

BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N.. *Modelagem Matemática no Ensino*. 5. ed. São Paulo: Contexto, 2010.

INFORMÁTICA NA EDUCAÇÃO DA UNIVERSIDADE DE PASSO FUNDO. Anais Passo Fundo: Universidade de Passo Fundo, 2000. p. 77-83.

VYGOTSKY,L.S. *A formação social da mente*. São Paulo:Martins Fontes, 1984.