COGNITIO-ESTUDOS

Revista Eletrônica de Filosofia
Philosophy Eletronic Journal
ISSN 1809-8428

São Paulo: Centro de Estudos de Pragmatismo
Programa de Estudos Pós-Graduados em Filosofia
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Disponível em http://www.pucsp.br/pragmatismo

Vol. 11, nº. 1, janeiro-junho, 2014, p. 98-108

REINO DA NATUREZA, REINO DOS FINS, E PROTO-REINO: UM ESTUDO DE TRADUÇÕES CONSERVATIVAS

Frank Thomas Sautter
Universidade Federal de Santa Maria
Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
ftsautter@ufsm.br

Hércules de Araújo Feitosa
Universidade Estadual Paulista (UNESP), Campus de Bauru
haf@fc.unesp.br

Resumo: Fornecemos traduções conservativas da lógica proposicional modal KT (a mais simples lógica normal alética) na lógica proposicional modal KD (a mais simples lógica normal deôntica), e desta na lógica proposicional modal K (a mais simples lógica normal simpliciter). Seguindo uma ideia discutida por Jaakko Hintikka, essas traduções conservativas estão baseadas na terceira formulação kantiana do imperativo categórico, a formulação do Reino dos Fins.

Palavras-chave: Lógica Alética. Lógica Deôntica. Tradução Conservativa. Kant.

KINGDOM OF NATURE, KINGDOM OF ENDS, AND PROTO-KINGDOM: A STUDY OF CONSERVATIVE TRANSLATIONS

Abstract: We provide conservative translations from propositional modal logic KT (the simplest normal alethic logic) into propositional modal logic KD (the simplest normal deontic logic), and from this into the propositional modal logic K (the simplest normal logic simpliciter). Following an idea discussed by Jaakko Hintikka, these conservative translations are based on the third formulation of Kantian categorical imperative, the formulation of the Kingdom of Ends.

Keywords: Alethic Logic. Deontic Logic. Conservative Translation. Kant.

* * *

Introdução

Inferências práticas[1] são ubíquas em nosso cotidiano; elas são muito mais abundantes do que inferências teóricas, inferências nas quais ocorrem tão somente

[1] Uma inferência prática é aquela que requer um uso essencial de proposições prescritivas. Há um consenso na literatura que, se a conclusão de uma inferência é uma proposição prescritiva, ao menos uma premissa também é uma proposição prescritiva. Rigorosamente, inferências práticas costumam apresentar-se como inferências mistas, ou seja, contêm tanto proposições prescritivas como proposições descritivas; um exemplo típico é o silogismo jurídico, no qual a premissa maior é uma norma jurídica geral, portanto, uma proposição prescritiva, e a premissa menor é um caso jurídico

proposições descritivas. Entretanto, a legitimidade das inferências práticas é um problema, porque as noções e operações lógicas costumam ser caracterizadas exclusivamente em termos de proposições descritivas.

A solução usual para o problema da legitimidade das inferências práticas consiste na "redução" dessas às inferências teóricas, ou seja, movemo-nos para um terreno mais familiar, realizamos a avaliação lógica, e retornamos ao domínio do prático. Entretanto, entre os proponentes de procedimentos sistemáticos para o tratamento de inferências práticas, não há um consenso, às vezes sequer uma discussão, sobre o que é uma "redução", uma "tradução", etc., das inferências práticas em inferências teóricas.

Lógicos brasileiros desenvolveram uma noção precisa do que é, em geral, uma tradução entre lógicas, e, em particular, do que é uma tradução conservativa entre lógicas (FEITOSA; LOFFREDO D'OTTAVIANO, 2011). A justificação para a noção de tradução proposta é simples e direta: se o tratamento da "redução" é lógico, ele deve necessariamente envolver as deduções realizadas em ambas as lógicas. Uma tradução entre lógicas é, portanto, grosso modo, aquela que preserva deduções.

A contribuição desse trabalho é modesta diante das questões suscitadas pelo problema mais geral da legitimidade de inferências práticas. Porém, ela é um avanço na discussão, seja sob uma perspectiva técnica, seja sob uma perspectiva filosófica. Do ponto de vista técnico, fornecemos traduções conservativas da lógica proposicional modal KT (a mais simples lógica normal[2] alética[3]) na lógica proposicional modal KD (a mais simples lógica normal deôntica[4]), e dessa na lógica proposicional modal K (a mais simples lógica normal simpliciter[5]). Do ponto de vista filosófico, mostramos os vínculos das traduções conservativas aqui fornecidas com a terceira formulação kantiana do imperativo categórico, a Formulação do Reino dos Fins, apresentada na "Fundamentação da Metafísica dos Costumes" (KANT, 2007). Sob essa perspectiva, o universo alético constitui um verdadeiro "Reino da Natureza", o universo deôntico, um verdadeiro "Reino dos Fins", e o universo de K, um "Proto-reino".

O plano do trabalho consiste em apresentar, na próxima seção, as noções de tradução e de tradução conservativa; na seção seguinte, as traduções de KT em KD e dessa em K, demonstrá-las e comentá-las; e nas considerações finais discutir brevemente as traduções em sentido inverso, ou seja, de K em KD e dessa em KT.

particular, portanto, uma proposição descritiva. O qualificativo "essencial" é imprescindível, porque há vários exemplos, na literatura, de inferências práticas apenas na aparência. Essas e outras questões são examinadas em detalhe por Sautter (2006).

[2] As lógicas modais normais admitem uma semântica simples em termos de mundos possíveis, daí sua importância para a presente discussão. É um consenso, por exemplo, que o tratamento aristotélico das modalidades, nos Primeiros Analíticos, resulta em uma lógica modal normal.

[3] O alético opera, aqui, como o representante do âmbito do teórico.

[4] O deôntico opera, aqui, como o representante do âmbito do prático.

[5] KD é uma sublógica de KT, no sentido de que toda dedução em KD também é uma dedução em KT, mas não o inverso, e K é uma sublógica tanto de KT como de KD. Avançaremos, mais adiante, a tese de que K não é, pela ocorrência da anomalia da vacuidade (situação gerada por uma relação de acessibilidade entre mundos possíveis tal que existe um mundo possível a partir do qual nenhum mundo possível é acessível, nem mesmo ele próprio), propriamente uma lógica, mas uma protológica. Disso resulta que KD é, rigorosamente, a lógica modal normal mais simples.

1 O conceito de tradução conservativa

Para uma linguagem formal L, seja For(L) o conjunto das fórmulas definidas sobre L e $\vdash$ uma relação de consequência sobre For(L).

Entendemos como lógica definida sobre L a um par $\mathcal{L}$ = (For(L), $\vdash$), em que L é uma linguagem formal e $\vdash$ uma relação de consequência sobre For(L).

Uma tradução da lógica $\mathcal{L}_1$ na lógica $\mathcal{L}_2$ é uma função τ: For(L_1) $\rightarrow$ For(L_2), a qual será denotada por τ: $\mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, de modo que para todo subconjunto de fórmulas $\Gamma\cup\{\varphi\} \subseteq$ For(L_1), tem-se:

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}1} \varphi \Rightarrow \tau(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}2} \tau(\varphi)$

Com isto, cada tradução leva teoremas de $\mathcal{L}_1$ em teoremas de $\mathcal{L}_2$:

$\vdash_{\mathcal{L}1} \varphi \Rightarrow \vdash_{\mathcal{L}2} \tau(\varphi)$

Uma tradução conservativa τ de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$ é tal que, para todo conjunto $\Gamma\cup\{\varphi\}$ $\subseteq$ For(L_1):

$\Gamma \vdash_{\mathcal{L}1} \varphi \Leftrightarrow \tau(\Gamma) \vdash_{\mathcal{L}2} \tau(\varphi)$[6]

2 Traduções conservativas entre KT, KD, e K

K, KT e KD são extensões do Cálculo Proposicional Clássico (CPC) pelo acréscimo, na linguagem, dos operadores modais, com as respectivas fórmulas e axiomas.

Aqui, fórmulas genéricas serão denotadas por φ, ψ, σ.

Assim, indicamos a linguagem de K (e de KT) por L($\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\rightarrow$, $\Box$)[7] e definimos:

$\Diamond\varphi =_{Df.} \neg\Box\neg\varphi$[8]

O axioma modal de K é:

K: $\Box(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\Box\varphi \rightarrow \Box\psi)$[9]

Os axiomas modais de KT são:

[6] Encontrar uma tradução de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$ é relativamente simples; por exemplo, quando $\mathcal{L}_1$ é uma sublógica de $\mathcal{L}_2$, a função identidade é uma tradução de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$. O problema difícil e interessante é encontrar uma tradução conservativa de $\mathcal{L}_1$ em $\mathcal{L}_2$.

[7] O símbolo $\Box$ denota a modalidade de necessidade: uma protonecessidade no caso de K, e uma necessidade alética no caso de KT.

[8] O símbolo $\Diamond$ denota a modalidade dual de $\Box$, a saber, a modalidade de possibilidade positiva: uma protopossibilidade no caso de K, e uma possibilidade alética no caso de KT.

[9] A semântica de Kripke para K não faz nenhuma exigência sobre as características da relação de acessibilidade entre os mundos possíveis. Nesse sentido, K é básica para todas as demais lógicas modais normais.

K: $\Box(\varphi \to \psi) \to (\Box\varphi \to \Box\psi)$

T: $\Box\varphi \to \varphi$[10]

Para as duas lógicas, K e KT, as regras de dedução são:

Modus Ponens (MP) ou Regra de Separação: $\{\varphi, \varphi \to \psi\} / \psi$

Regra da Necessitação (RN): $\vdash \varphi / \vdash \Box\varphi$

A linguagem de KD é dada por $L(\neg, \wedge, \vee, \to, O)$[11] e definimos:

$P\varphi =_{Df.} \neg O\neg\varphi$[12]

Os axiomas modais de KD são:

K: $O(\varphi \to \psi) \to (O\varphi \to O\psi)$

D: $O\varphi \to P\varphi$[13]

Para a lógica KD, as regras de dedução são:

Modus Ponens (MP) ou Regra de Separação: $\{\varphi, \varphi \to \psi\} / \psi$

Regra da Necessitação (RN): $\vdash \varphi / \vdash O\varphi$

Valemo-nos, mais adiante, do seguinte resultado para as três lógicas (Chellas, 1980, p. 47):

Teorema 1: $\Gamma \vdash \varphi \Leftrightarrow$ existem $\psi_1, \dots, \psi_n \in \Gamma$ de maneira que $\vdash \psi_1 \wedge \dots \wedge \psi_n \to \varphi$.[14]

Consideremos a função τ_1: KT $\to$ KD:

$\tau_1(p) = p$, quando p é atômica

$\tau_1(\neg\varphi) = \neg\tau_1(\varphi)$

$\tau_1(\varphi\#\psi) = \tau_1(\varphi) \# \tau_1(\psi)$, para $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$

$\tau_1(\Box\varphi) = O\tau_1(\varphi) \wedge \tau_1(\varphi)$

---

[10] A semântica de Kripke para KT exige que a relação de acessibilidade entre os mundos possíveis seja reflexiva, quer dizer, todo mundo possível é acessível a si mesmo. Uma relação de acessibilidade reflexiva é uma relação de acessibilidade qualquer, mas, em geral, não o inverso; esse é o modo semântico de estabelecer que K é uma sublógica de KT.

[11] O símbolo O denota a modalidade de necessidade deôntica, ou seja, a modalidade de obrigação.

[12] O símbolo P denota a modalidade de possibilidade deôntica, ou seja, a modalidade de permissão positiva.

[13] A semântica de Kripke para KD exige que a relação de acessibilidade entre os mundos possíveis seja serial, quer dizer, para todo mundo possível há um mundo possível acessível a partir dele, seja ele próprio, seja outro. Uma relação de acessibilidade serial é uma relação de acessibilidade qualquer, mas, em geral, não o inverso; isso mostra que K é uma sublógica de KD. Uma relação de acessibilidade reflexiva é uma relação de acessibilidade serial, mas, em geral, não ocorre o inverso; isso mostra que KD é uma sublógica de KT.

[14] Esse resultado combina o Teorema da Compacidade e o Teorema da Dedução. Ele é um modo cômodo de lidar com teoremas em lugar de derivações a partir de proposições dadas.

A tradução do necessário (alético) no cumprimento de uma dada obrigação[15] tem, como já havia estabelecido Hintikka (1969), o seu rationale na terceira formulação kantiana do imperativo categórico, a Formulação do Reino dos Fins. Essa tradução pode ser retirada, quase literalmente, da seguinte passagem da "Fundamentação da Metafísica dos Costumes": "Um tal reino dos fins realizar-se-ia verdadeiramente por máximas, cuja regra o imperativo categórico prescreve a todos os seres racionais, se elas fossem universalmente seguidas." (KANT, 2007, p. 82). O que Kant entende por reino é "a ligação sistemática de vários seres racionais por meio de leis comuns" (KANT, 2007, p. 75). As leis, aqui, são as proposições afetadas por necessidade, seja necessidade alética, seja necessidade deôntica; o "reino alético" é a totalidade das proposições afetadas por necessidade alética, o "reino deôntico", a totalidade das proposições afetadas por necessidade deôntica. Noutra passagem, Kant nomeia esses dois reinos: "[...] todas as máximas por legislação própria, devem concordar com a ideia de um reino possível dos fins como um reino da natureza." (KANT, 2007, p. 79-80). Em nota de rodapé à passagem supracitada Kant explica melhor essas relações entre o Reino dos Fins, o "reino deôntico", e o Reino da Natureza, o "reino alético":

> A teleologia considera a natureza como um reino dos fins; a moral considera um possível reino dos fins como um reino da natureza. Acolá o reino dos fins é uma ideia teórica, para explicar o que existe. Aqui é uma ideia prática, para realizar o que não existe, mas que pode tornar-se real pelas nossas ações ou omissões, e isso exatamente em conformidade com esta ideia (KANT, 2007, p. 80).

Voltemo-nos, agora, para a demonstração de que τ_1 é uma tradução conservativa de KT em KD.

A proposição seguinte se aplica a todas as funções tratadas neste trabalho, e não apenas a τ_1 e não apenas a K, mas também a KD e KT:

Proposição 2: Se o operador principal de φ não é modal, então $\vdash_K \varphi \leftrightarrow \tau_1(\varphi)$.

Demonstração: Por indução matemática sobre a complexidade de φ.

- Se φ é p, uma fórmula atômica, então $\tau_1(p) = p$ e, portanto, $\vdash_K \varphi \leftrightarrow \tau_1(\varphi)$.
- Se φ é do tipo $\neg\psi$, então $\tau_1(\varphi) = \tau_1(\neg\psi) = \neg\tau_1(\psi)$ e, por hipótese de indução, temos $\vdash_K \psi \leftrightarrow \tau_1(\psi)$. Daí, $\vdash_K \neg\psi \leftrightarrow \neg\tau_1(\psi)$ e, então, $\vdash_K \varphi \leftrightarrow \tau_1(\varphi)$.
- Se φ é do tipo $\psi \vee \sigma$, então $\tau_1(\varphi)= \tau_1(\psi) \vee \tau_1(\sigma)$ e, por hipótese de indução, $\vdash_K \psi \leftrightarrow \tau_1(\psi)$ e $\vdash_K \sigma \leftrightarrow \tau_1(\sigma)$. Daí, $\vdash_K \psi \vee \sigma \leftrightarrow \tau_1(\psi) \vee \tau_1(\sigma)$ e, assim, $\vdash_K \varphi \leftrightarrow \tau_1(\varphi)$. ■

[15] Observe-se que a proposição que é obrigatória e é cumprida trata-se da tradução da proposição afetada pela necessidade alética.

Lema 3: $\vdash_{KD} [O(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [(O\varphi \wedge \varphi) \rightarrow (O\psi \wedge \psi)]$.

Demonstração:

1. $O(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (O\varphi \rightarrow O\psi)$	Axioma K
2. $(O(\varphi \rightarrow \psi) \wedge O\varphi) \rightarrow O\psi)$	Lei de Importação em 1
3. $((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi) \rightarrow \psi$	Tautologia
4. $[(O(\varphi \rightarrow \psi) \wedge O\varphi) \wedge ((\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi)] \rightarrow (O\psi \wedge \psi)$	Teorema Esplêndido, de Leibniz, em 2 e 3
5. $[(O(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \varphi \rightarrow \psi) \wedge (O\varphi \wedge \varphi)] \rightarrow (O\psi \wedge \psi)$	Leis de Associatividade e Comutatividade em 4
6. $[O(\varphi \rightarrow \psi) \wedge (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [(O\varphi \wedge \varphi) \rightarrow (O\psi \wedge \psi)]$	Lei de Exportação em 5. ■

Proposição 4: Se $\Gamma \vdash_{KT} \varphi$, então $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

Demonstração: Por indução sobre o comprimento da dedução de φ a partir de Γ em KT.

Base indutiva:

□ Se $\varphi \in \Gamma$, então naturalmente $\tau_1(\varphi) \in \tau_1(\Gamma)$ e, portanto, $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

□ Se φ é uma tautologia (válida no CPC), então $\tau_1(\varphi)$ também é uma tautologia e, desta maneira, $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

□ Se φ é da forma K: $\Box(\psi \rightarrow \sigma) \rightarrow (\Box\psi \rightarrow \Box\sigma)$, pela definição de τ_1, $\tau_1(\varphi)$ é da forma $[O(\tau_1(\psi) \rightarrow \tau_1(\sigma)) \wedge (\tau_1(\psi) \rightarrow \tau_1(\sigma))] \rightarrow [(O\tau_1(\psi) \wedge \tau_1(\psi)) \rightarrow (O\tau_1(\sigma) \wedge \tau_1(\sigma))]$, e, deste modo, pelo Lema 3, é KD-válida. Portanto, $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

□ Se φ é da forma T: $\Box\psi \rightarrow \psi$, pela definição de τ_1, temos que $\tau_1(\varphi)$ é da forma $[O\tau_1(\psi) \wedge \tau_1(\psi)] \rightarrow \tau_1(\psi)$, que é uma tautologia e, portanto, $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

Passo indutivo: a fórmula φ é obtida de Γ mediante uma das regras de dedução de KT:

□ Regra de separação ou Modus Ponens:

Para alguma fórmula ψ temos (i) $\Gamma \vdash_{KT} \psi \rightarrow \varphi$ e (ii) $\Gamma \vdash_{KT} \psi$ e, daí, $\Gamma \vdash_{KT} \varphi$. Pela hipótese de indução aplicada em (i) e (ii) temos (i') $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\psi \rightarrow \varphi)$ e (ii') $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\psi)$. Da definição de τ_1, segue de (i') que $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\psi) \rightarrow \tau_1(\varphi)$ e, pela MP de KD, temos $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

□ Regra da necessitação:

Se φ é da forma $\Box\psi$, obtemos $\vdash_{KT} \Box\psi$ de $\vdash_{KT} \psi$. Aplicando a hipótese indutiva a $\vdash_{KT} \psi$, obtemos $\vdash_{KD} \tau_1(\psi)$ e, pela regra de necessitação de KD, temos $\vdash_{KD} O\tau_1(\psi)$. Logo temos $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} O\tau_1(\psi) \wedge \tau_1(\psi)$, ou seja, $\tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$. ■

A Proposição 4 nos garante que τ_1 é uma tradução de KT em KD. Para a demonstração da recíproca desta proposição, ou seja, que τ_1 é uma tradução conservativa, usaremos o fato que toda fórmula cuja tradução é dedutível em KD pode ser dedutível em KT.

Proposição 5: Se $\vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$, então $\vdash_{KT} \varphi$.

Demonstração: Por indução sobre a complexidade de φ.

Se o operador principal de φ não é modal, o resultado segue da Proposição 2.

Agora, se φ é $\Box\psi$, então $\tau_1(\Box\psi) = O\tau_1(\psi) \wedge \tau_1(\psi)$. Se $\nvdash_{KT} \varphi$, então $\nvdash_{KT} \psi$, pois do contrário, pela RN, teríamos $\vdash_{KT} \varphi$, o que faria KT contraditório. Pela hipótese de indução, segue que $\nvdash_{KD} \tau_1(\psi)$ e, dessa maneira, pela definição de $\tau_1(\Box\psi)$, temos $\nvdash_{KD} \tau_1(\varphi)$. ■

Corolário 6: Para a função τ_1 vale: $\vdash_{KD} \tau_1(\varphi) \Leftrightarrow \vdash_{KT} \varphi$.

Teorema 7: A tradução é conservativa: $\Gamma \vdash_{KT} \varphi \Leftrightarrow \tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$.

Demonstração: Pelo Teorema 1, $\Gamma \vdash_{KT} \varphi \Leftrightarrow$ existem $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ de maneira que $\vdash_{KT} \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi \Leftrightarrow \vdash_{KD} \tau_1(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \to \varphi) \Leftrightarrow \vdash_{KD} \tau_1(\psi_1) \wedge \ldots \wedge \tau_1(\psi_n) \to \tau_1(\varphi) \Leftrightarrow \tau_1(\Gamma) \vdash_{KD} \tau_1(\varphi)$. ■

Agora, consideremos a função τ_2: KD $\to$ K:

$\tau_2(p) = p$, quando p é atômica

$\tau_2(\neg\varphi) = \neg\tau_2(\varphi)$

$\tau_2(\varphi\#\psi) = \tau_2(\varphi) \# \tau_2(\psi)$, para $\# \in \{\wedge, \vee, \to\}$

$\tau_2(O\varphi) = \Box\tau_2(\varphi) \wedge \tau_2(\varphi)$.

Assim, $\tau_2(P\varphi) = \tau_2(\neg O\neg\varphi) = \neg\, \tau_2(O\neg\varphi) = \neg\, (\Box\tau_2(\neg\varphi) \wedge \tau_2(\neg\varphi)) = \neg\, \Box\tau_2(\neg\varphi) \vee \neg\tau_2(\neg\varphi) = \neg\, \Box\neg\tau_2(\varphi) \vee \neg\neg\tau_2(\varphi) = \Diamond\tau_2(\varphi) \vee \tau_2(\varphi)$.

A função τ_2, que mostraremos mais abaixo ser uma tradução conservativa de KD em K, é estruturalmente idêntica a τ_1, a função que mostramos acima ser uma tradução conservativa de KT em KD. Contudo, as "razões" para o sucesso na preservação de deduções são distintas. De um ponto de vista semântico, o que a tradução τ_1 de $\Box\varphi$ em $O\tau_1(\varphi) \wedge \tau_1(\varphi)$ faz é simular a reflexividade da relação de acessibilidade de KT em KD[16]; já o que a tradução τ_2 de $O\varphi$ em $\Box\tau_2(\varphi) \wedge \tau_2(\varphi)$ faz é evitar o fenômeno da vacuidade, ou seja, evitar a existência de um mundo possível w tal que nenhum mundo possível é acessível a partir de w. Isso, provavelmente, pode ser feito de mais de um modo; nós escolhemos fazê-lo ao simular a reflexividade em K, embora a serialidade fosse suficiente.

Vejamos, brevemente, os problemas associados ao fenômeno da vacuidade. Consideremos um exemplo com proposições categóricas. “Todos os unicórnios são quadrúpedes” é uma proposição categórica muito distinta, em seu comportamento lógico, de “Todos os animais são sencientes”, embora ambas sejam verdadeiras. A diferença entre elas se percebe mais facilmente ao verificar que “Todos os unicórnios não são quadrúpedes” (“Nenhum unicórnio é quadrúpede”) também é verdadeira, embora “Todos os animais não são sencientes” (“Nenhum animal é senciente”) seja falsa. Em “Todos os unicórnios são quadrúpedes” não há, propriamente, uma predicação; é somente em associação com a verdade de “Todos os unicórnios não são quadrúpedes” que descobrimos a inexistência de unicórnios. Isso não é necessário em relação a “Todos os animais são sencientes”. Que ambas, “Todos os unicórnios são quadrúpedes” e “Todos os animais são sencientes”, tenham a mesma formalização é uma infelicidade lógica.

No plano modal, a vacuidade se expressa pela admissão de um mundo possível a partir do qual nenhum mundo possível é acessível. Em um mundo desse tipo todas as proposições são necessárias (em símbolos, $\Box\varphi$ para todo φ), mesmo quando uma ou mais delas é falsa (em símbolos, $\neg\varphi$ para algum φ), ou seja, nenhuma proposição é possível (em símbolos, $\neg\Diamond\varphi$ para todo φ), mesmo quando uma ou mais delas é verdadeira (em símbolos, φ para algum φ). Isso constitui uma singularidade lógica, uma região em que as leis lógicas não acompanham nossas intuições[17].

O modo mais simples de evitar tais singularidades é exigir que a relação de acessibilidade seja serial, ou seja, para todo mundo possível w, há ao menos um mundo possível v (que pode ser o próprio w) acessível a partir de w. E isso nos leva a considerar K não propriamente uma lógica, mas uma protológica, e KD como a autêntica lógica modal mais básica. Essa proposta faz justiça a um ponto de vista exposto por Jorgensen (1938, p. 293-294), segundo o qual, pelo menos de uma perspectiva genética, o universo prescritivo tem precedência sobre o universo descritivo[18].

Consideremos, agora, a demonstração de que τ_2 é uma tradução conservativa de KD em K.

[16] Nos modelos para KD é usual interpretar “o mundo possível v é acessível a partir do mundo possível w” (em símbolos, wRv) como “o mundo possível v é ao menos deonticamente tão perfeito quanto o mundo possível w”, onde a perfeição deôntica é medida pelo cumprimento das obrigações. Nesse sentido, pode haver no máximo um mundo tal que não há um mundo deonticamente mais perfeito do que ele. Chamemo-lo “Reino dos Fins”. Semanticamente, o Reino dos Fins (em símbolos, w) é tal que somente ele é acessível a partir dele mesmo (em símbolos, não há v, distinto de w, tal que wRv).

[17] Sautter (2008) mostra que filósofos tão diversos como Berkeley, Kant, Strawson, e Feyerabend são contrários à validade de argumento por vacuidade. Um argumento é vacuamente válido se as suas premissas não podem ser simultaneamente satisfeitas.

[18] Jorgensen é enfático em afirmar que as primeiras palavras de um bebê devem ser entendidas como ordens em forma abreviada, e não como palavras isoladas ou descrições em forma abreviada.

Lema 8: Em K vale:

$\vdash_K [\Box(\varphi \to \psi) \wedge \varphi \to \psi] \to [(\Box\varphi \wedge \varphi) \to (\Box\psi \wedge \psi)]$.

Demonstração: É a mesma demonstração do Lema 3, que precisa apenas do axioma K e recursos do CPC. ■

Proposição 9: Se $\Gamma \vdash_{KD} \varphi$, então $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\varphi)$.

Demonstração: Por indução sobre o comprimento da dedução de φ a partir de Γ em KD.

Base indutiva:

- Se $\varphi \in \Gamma$, então $\tau_2(\varphi) \in \tau_2(\Gamma)$ e, deste modo, $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\varphi)$.
- Se φ é uma tautologia, então $\tau_2(\varphi)$ também é uma tautologia e, portanto, $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\varphi)$.
- Se φ é da forma K: $O(\psi \to \sigma) \to (O\psi \to O\sigma)$, então segue que $\tau_2(\varphi)$ é da forma:

$[\Box(\psi \to \sigma) \wedge (\psi \to \sigma)] \to [(\Box\psi \wedge \psi) \to (\Box\sigma \wedge \sigma)]$,

a qual, conforme o Lema 8, é válida em K.

- Se φ é da forma D: $O\psi \to P\psi$, então $\tau_2(\varphi) = (\Box\tau_2(\psi) \wedge \tau_2(\psi)) \to (\Diamond\tau_2(\psi) \vee \tau_2(\psi))$, o que é CPC válida.

Passo indutivo:

- Regra de separação ou Modus Ponens:

Para alguma fórmula ψ temos (i) $\Gamma \vdash_{KD} \psi \to \varphi$ e (ii) $\Gamma \vdash_{KD} \psi$ e, daí, $\Gamma \vdash_{KD} \varphi$. Pela hipótese de indução aplicada em (i) e (ii), temos (i') $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\psi \to \varphi)$ e (ii') $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\psi)$. Da definição de τ_2, segue que $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\psi) \to \tau_2(\varphi)$ e, pela MP de K, segue que $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\varphi)$.

- Regra da necessitação:

Se φ é da forma $O\psi$, obtemos $\vdash_{KD} O\psi$ De $\vdash_{KD} \psi$. Aplicando a hipótese indutiva em $\vdash_{KD} \psi$, obtemos $\vdash_K \tau_2(\psi)$ e, pela regra da necessitação de K, obtemos $\vdash_K \Box\tau_2(\psi)$. Logo, temos $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \Box\tau_2(\psi) \wedge \tau_2(\psi)$, ou seja, $\tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(O\psi)$. ■

Proposição 10: Se $\vdash_K \tau_2(\varphi)$, então $\vdash_{KD} \varphi$.

Demonstração: Por indução sobre a complexidade de φ. Se o operador principal de φ não é modal, o resultado segue da Proposição 2.

Agora, se φ é $O\psi$, então $\tau_2(O\psi) = \Box\tau_2(\psi) \wedge \tau_2(\psi)$. Se $\nvdash_{KD} \varphi$, então $\nvdash_{KD} \psi$, pois do contrário, pela RN, teríamos $\vdash_{KD} \varphi$. Daí, pela hipótese indutiva, $\nvdash_K \tau_2(\psi)$ e, portanto, $\nvdash_K \tau_2(\varphi)$. ■

Corolário 11: Para a função τ_2 vale: $\vdash_K \tau_2(\varphi) \Leftrightarrow \vdash_{KD} \varphi$.

Teorema 12: A tradução é conservativa: $\Gamma \vdash_{KD} \varphi \Leftrightarrow \tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\varphi)$.

Demonstração: Pelo Teorema 1, $\Gamma \vdash_{KD} \varphi \Leftrightarrow$ existem $\psi_1, \ldots, \psi_n \in \Gamma$ de maneira que $\vdash_{KD} \psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi \Leftrightarrow \vdash_K \tau_2(\psi_1 \wedge \ldots \wedge \psi_n \rightarrow \varphi) \Leftrightarrow \vdash_K \tau_2(\psi_1) \wedge \ldots \wedge \tau_2(\psi_n) \rightarrow \tau_2(\varphi) \Leftrightarrow \tau_2(\Gamma) \vdash_K \tau_2(\varphi)$. ■

Segue então que a função τ_2 é uma tradução conservativa de KD em K. A partir daí, como a função τ_3: KT $\rightarrow$ K, definida por $\tau_3(\varphi) = \tau_2 \circ \tau_1(\varphi)$, é uma composição de traduções conservativas, então é ainda uma tradução conservativa. O mapeamento relevante de τ_3 é o seguinte:

$\tau_3(\Box\varphi) = \tau_2 \circ \tau_1(\Box\varphi) = \tau_2(\tau_1(\Box\varphi)) = \tau_2(o\tau_1(\varphi) \wedge \tau_1(\varphi)) = \tau_2(o\tau_1(\varphi)) \wedge \tau_2(\tau_1(\varphi)) = [\Box\tau_2(\tau_1(\varphi)) \wedge \tau_2(\tau_1(\varphi))] \wedge \tau_2(\tau_1(\varphi)) = \Box\tau_2(\tau_1(\varphi)) \wedge \tau_2(\tau_1(\varphi)) = \Box\tau_3(\varphi) \wedge \tau_3(\varphi)$.

Assim a tradução conservativa τ_3: KT $\rightarrow$ K é:

$\tau_3(p) = p$, quando p é atômica

$\tau_3(\neg\varphi) = \neg\tau_3(\varphi)$

$\tau_3(\varphi\#\psi) = \tau_3(\varphi) \# \tau_3(\psi)$, para $\# \in \{\wedge, \vee, \rightarrow\}$

$\tau_3(\Box\varphi) = \Box\tau_3(\varphi) \wedge \tau_3(\varphi)$.

Conclusão

Neste trabalho propusemos traduções conservativas de lógicas modais mais fortes em lógicas modais mais fracas, no sentido de que o contradomínio da função de tradução é uma sublógica do domínio da função de tradução. Obtivemos uma tradução conservativa de KT em KD, dessa em K, e, por composição de funções, de KT em K. Um problema mais difícil é encontrar traduções conservativas no sentido inverso.

Um ponto de partida natural para obter uma tradução conservativa de KD em KT, que constitui o principal interesse em uma continuação deste trabalho, é a analogia proposta por Leibniz segundo a qual obrigatório (debitum) é aquilo que é necessário para o homem bom (vir bonus). Hilpinen (2001, p. 160) traduz essa analogia para a linguagem da lógica contemporânea do seguinte modo: $O_a p =_{df.} \Box(B(a) \rightarrow p)$, ou seja, p é obrigatório para o agente a quando é necessário que: se a é um homem bom, então p ("B(a)" significa que a é um homem bom). Hilpinen (2001, p. 160) posteriormente simplifica essa caracterização, omitindo a referência explícita ao agente a: $Op =_{df.} \Box(B \rightarrow p)$. Essa formulação simplificada da proposta de Leibniz é recorrente na lógica contemporânea. Hilpinen (2001, p. 160) mostra que ela ocorre na proposta de Stig Kanger, com a diferença que "B" significa aquilo que a moralidade prescreve, e também ocorre em uma formulação equivalente de Alan

Ross Anderson: Op $=_{df.}$ $\Box(\neg p \rightarrow S)$, onde "S" significa "uma sanção ou simplesmente a proposição de que os requisitos da lei ou moralidade foram violados." (Hilpinen, 2001, p. 160).

Esta família de caracterizações (Leibniz – Kanger – Anderson) apresenta pelo menos duas dificuldades para uma compreensão das relações entre o Reino do Ser (alético) e o Reino do Dever Ser (deôntico). A primeira, bastante difundida na literatura, é a permanência de um resíduo deôntico no processo de redução: B no caso das caracterizações de Leibniz e Kanger, e S no caso da caracterização de Anderson, ou seja, elas têm um matiz deôntico ineliminável. O segundo, decorrente de investigações preliminares realizadas pelos autores deste trabalho, sugere que uma função de tradução inspirada pelas caracterizações utilizadas nessa família, ou seja, uma função de tradução τ em que $\tau(O\varphi) = \Box(B \rightarrow t(\varphi))$, não é uma tradução conservativa. Isso pode significar duas coisas: há propostas de redução melhores do que a de Leibniz-Kanger-Anderson, no sentido de que inspiram autênticas traduções conservativas de KD em KT; ou não existe tradução conservativa de KD em KT, e a noção de tradução conservativa precisa ser enfraquecida de modo a acomodar a função inspirada pela caracterização de Leibniz-Kanger-Anderson. Mas isso é assunto para outro trabalho.

* * *

Referências

CHELLAS, Brian. Modal logic: an introduction. Cambridge: Cambridge University Press, 1980.

FEITOSA, Hércules de Araújo; LOFFREDO D'OTTAVIANO, Ítala Maria. Conservative translation. In: Annals of pure and applied logic. Amsterdam: [s.e.], 2011 (vol. 108, n. 1-3).

HILPINEN, Risto. Deontic logic. In: GOBLE, Lou (ed.). The blackwell guide for philosophical logic. Malden: Blackwell, 2001.

HINTIKKA, Jaakko. Deontic logic and its philosophical morals. In: HINTIKKA, Jaakko (ed.). Models for modalities: selected essays. Dordrecht: Reidel, 1969.

JORGENSEN, Jorgen. Imperatives and logic. In: Erkenntnis. [s.l.e.], [s.e.], 1938. (vol. VII).

KANT, Immanuel. Fundamentação da metafísica dos costumes. Tradução de Paulo Quintela. Lisboa: Edições 70, 2007.

SAUTTER, Frank Thomas. Um breve estudo histórico-analítico da Lei de Hume. In: Trans/Form/Ação. Marília: [s.e.], 2006. (v. 29, n. 2).

SAUTTER, Frank Thomas. Oposição lógica, supressão total e lei de anulação. In: O que nos faz pensar. Rio de Janeiro: [s.e.], 2008. (n. 23).