Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Departamento de Física
Laboratório de Teoria da Matéria Condensada

Geometria fractal e aplicações

Tiago de Souza Farias

10 de junho de 2013

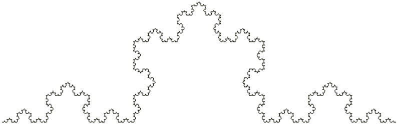
CONCEITOS

Dimensão euclidiana

- Dimensão euclidiana de um objeto é definida como o número mínimo de coordenadas necessárias para descrever a posição de um objeto para qualquer sistema de coordenadas;
- Em geral, associa-se a dimensão euclidiana ao número de graus de liberdade de um corpo, embora seja válido, é possível extender este conceito para outros casos (por exemplo, o estado termodinâmico de um gás ideal é bidimensional - pressão e volume);
- Objetos irregulares não são satisfeitos pela definição de dimensão euclidiana;

Dimensão topológica

- Um conjunto S tem dimensão topológica N se cada ponto em S tem seus pontos próximos cujo limite toca em S em um conjunto de dimensão N-1, sendo N não negativo.
- A dimensão topológica pode ser entendida como a medida que um corpo preenche o espaço ou a menor quantidade de pontos necessários para tornar um objeto desconexo;
- Sobre estas condições, um objeto com dimensão topológica possui a propriedade de manter-se invariente sobre transformações contínuas de escala ou homeomorfismos.
- A definição de dimensão topológica não é o suficiente para descrever um objeto fractal.



Dimensão Hausdorff-Besicovitch

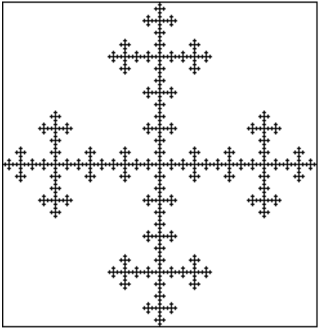
- Para determinar a dimensão de um fractal, precisamos de um conceito que esteja relacionado a escala de objetos;
- Dividimos uma linha em 3 partes iguais, cada parte possue 1/3 de tamanho da linha original;
- Dividimos um quadrado em 9 partes iguais, cada parte possue 1/3 de lado do quadrado original;
- Dividimos um cubo em 27 partes iguais, cada parte possue 1/3 de lado do cubo original;
- Pecebe-se que o número de partes é igual ao número de divisões na potência da dimensão do objeto, esta dimensão é definida como dimensão Hausdorff-Besicovitch, e, essencialmente, é chamada de dimensão fractal;

  $N = S^D$

  $D = \frac{log(N)}{log(S)}$

Definição formal

- Um objeto é considerado fractal quando sua dimensão Hausdorff Besicovitch estritamente excede sua dimensão topológica.



D = 1.46497

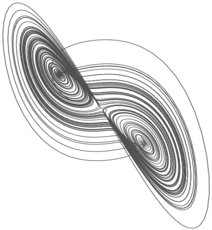
Outras definições

- A maioria dos fractais é auto-similar, isto é, o objeto permanece invariante sobre transformações de escala;
- Todo objeto com dimensão não inteira é fractal, mas nem todo fractal tem dimensão não inteira;

D = 2
Curva de dragão

Descrição matemática

- Fractais podem ser construídos através de funções iterativas; Exemplo: $z \leftarrow z^2 + c$
- Certas equações ou sistema de equações levam a geometria fractal;
- Exemplo: equações de Lorenz geram um atrator;
$\frac{dx}{dt} = \sigma(-x + y)$
$\frac{dy}{dt} = rx - y - xz$
$\frac{dz}{dt} = -bz + xy$



Descrição matemática

- Objetos fractais possuem a propriedade de minimizar sua área e maximizar seu perímetro;
- As relações matemáticas na geometria fractal carregam uma grande dinâmica de comportamentos, como sensibilidade as condições iniciais, perturbações e imprevisibilidade;
- Integrodiferenciação fracionária é útil para sistemas que carregam "memória";

  $\frac{d^{1/2}x}{d^{1/2}} = 2(\frac{x}{\pi})^{1/2}$

A HISTÓRIA DOS FRACTAIS

Antiguidade

- Os egípcios já conheciam os padrões fractais simples.

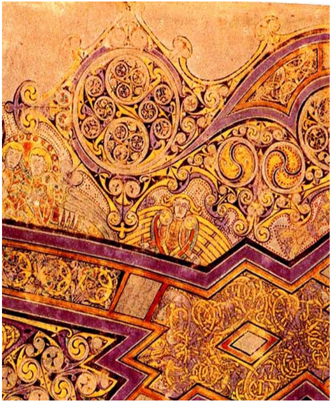
- Aristóteles acreditava que as diferenças entre uma espécie animal e outra poderia ser preenchida por outras espécies de forma contínua.

Antiguidade

- Na Índia encontram-se arquiteturas com o mesmo padrão.

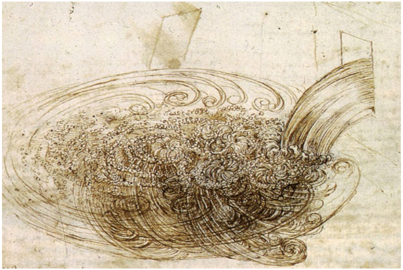
Antiguidade

- Na idade média já era conhecido padrões fractais, como mostrado pelas pinturas:



Antiguidade

- Leonardo da Vinci estudou os efeitos relacionados a turbulência.



- Leibniz e l'Hospital já discutiam a possibilidade de integrodiferenciação fracionária.

Os primeiros passos

- Helge von Koch conseguiu descrever matematicamente os flocos de neve;
- Giuseppe Peano desenvolveu técnicas de curvas de preenchimento espacial, utilizados, por exemplo, para estudar nuvens;
- Georg Cantor desenvolveu a teoria de conjuntos, utilizado no estudo de probabilidades;
- Albert Einstein chegou a conclusão que o movimento browniano é causado por movimentos térmicos irregulares das moléculas de um líquido;
- Gaston Julia estudou funções iterativas que estão diretamente relacionadas aos fractais;

Benoit B. Mandelbrot

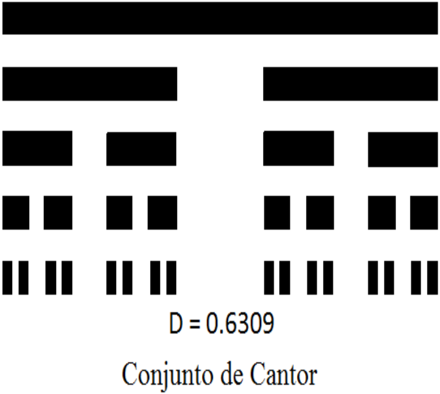
- Mandelbrot (20/11/1924 – 14/10/2010) nasceu em Varsóvia. Estudou matemática na graduação e obteve mestrado em aeronática na Caltech. Trabalhou na IBM durante maior parte de sua vida, tendo acesso a computadores, foi o primeiro a ter visualizado os fractais complexos.
- É considerado o pai da geometria fractal, pois cunhou o termo fractal (fractus - fragmento).

Benoit B. Mandelbrot

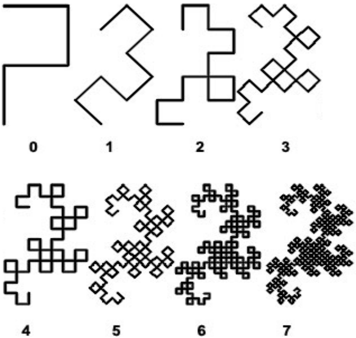
- Sua maior contribuição foi ter mostrado que a relação entre a natureza e o padrão fractal não era puramente abstrata e possuia diversas aplicações em quase todos os campos da ciência.
- Ganhou o prêmio Wolf de física em 1993, o prêmio Lewis Fry Richardson da sociedade européia de geofísica, o prêmio de ciências do Japão e o prêmio Einstein Lectureship da sociedade americana de matemática.
- Seu trabalho foi popularizado através de seu livro "A geometria fractal da natureza".

A GEOMETRIA FRACTAL DA NATUREZA

Fractais abstratos



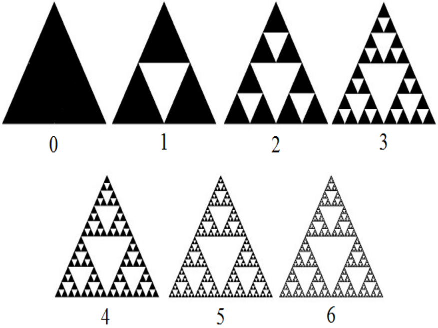
Fractais abstratos



D = 1.5236

Curva de dragão

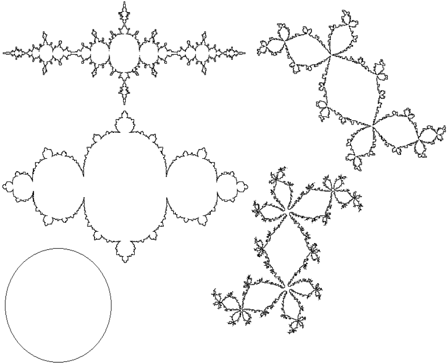
Fractais abstratos



D = 1.5849
Triângulo de Sierpinski

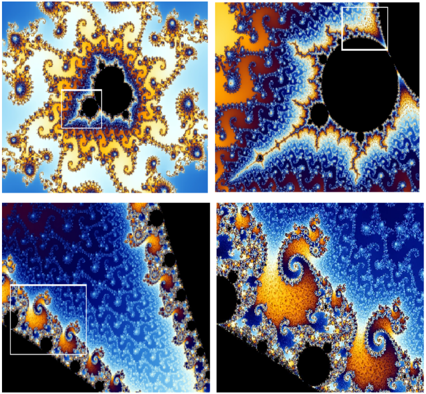
Fractais abstratos

Conjunto de Julia - D = 2



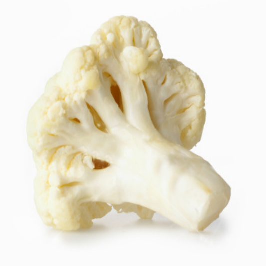
Fractais abstratos

Conjunto de Mandelbrot - $D = 2$



Fractais naturais

Couve-flor - D = 2.33



Fractais naturais

Descargas elétricas - D = 2.5

Fractais naturais

Bróculis - $D = 2.66$

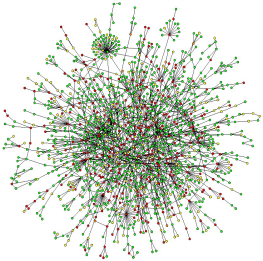
Fractais naturais

Superfície do cérebro humano - D = 2.79

Fractais naturais

Superfície pulmonar humana - $D = 2.97$

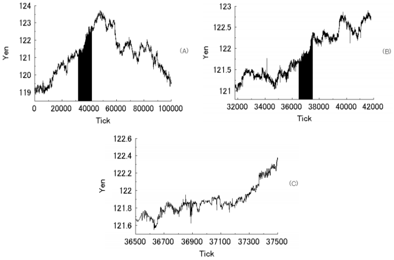
APLICAÇÕES DA GEOMETRIA FRACTAL



Economia

- Mandelbrot mostrou que o valor das ações no mercado econômico se comportam de forma semelhante ao movimento browniano.
- Exemplo: modelo de função auto-correlação do valor das ações pelo tempo:

$$C(T) = \frac{<Dr(T_0+T)Dr(T_0)> - <Dr(T_0)>^2}{<Dr(T_0)^2> - <Dr(T_0)>^2}$$

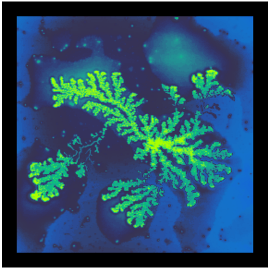


Biologia

- Muitos órgãos e estruturas em formas de vida possuem geometria fractal;
- O comportamento de vírus e bactérias podem ser modelos através de regras determinísticas cuja matemática possue padrão fractal;
- O vírus HIV adquiri estrutura fractal quando se torna ativo no corpo humano;
- Células cancerígenas possuem maiores irregulares (aspereza) que células saudáveis. Técnicas modernas para encontrar estas células são baseadas em geometria fractal.
- Batimentos cardíacos e células ósseas também possuem estrutura fractal.
- Os vegetais crescem em forma fractal;
- A reprodução de coelhos seguem um padrão fractal: a sequência de fibonacci.

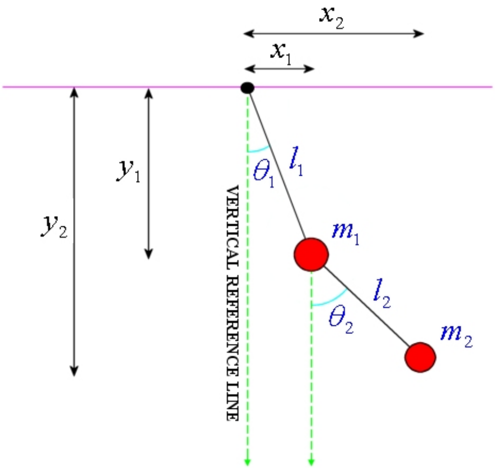
Química

- Fenômenos como reações químicas, absorção, catálise e agregações seguem padrões fractais.



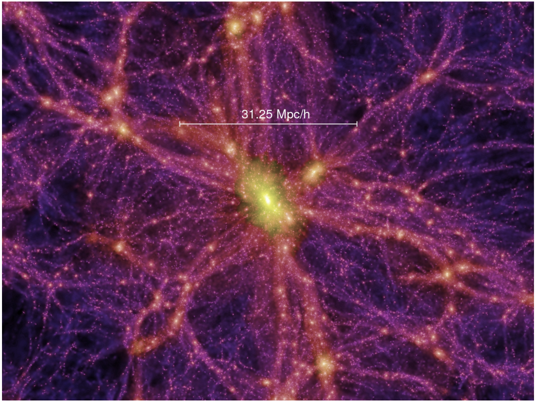
Física geral

- Turbulência, sistemas dinâmicos e sistemas caóticos são estudados utilizando conceitos de geometria fractal;



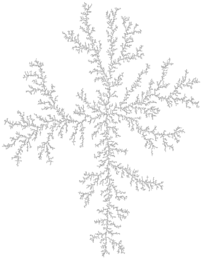
Astronomia

- A distribuição de massa do universo é fractal.



Física da matéria condensada

- Percolação
- Modelos de crescimento, como deposição eletrolítica formam estruturas fractais.

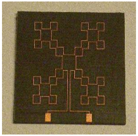


- Em modelos complexos, redes com percolação possuem quasipartículas chamadas fractons associadas as vibrações atômicas.

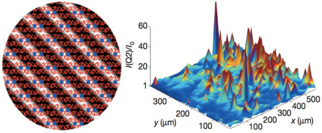
O FUTURO DOS FRACTAIS

O futuro dos fractais

- A dimensão calculada de campos magnéticos solares é fracionária;
- A matéria escura parece ter comportamento fractal;
- Antenas fractais possuem melhor recepção de sinal;



- Parece haver uma relação entre supercondutividade e fractais;



Bibliografia

MANDELBROT, Benoit B., The fractal geometry of nature. New York. W.H. Freeman and Company, 1982.

BOYCE, William E., Equações diferencias elementares. Rio de Janeiro, LTC, 2012.

Hideki, Takayasu, Fractal Properties in economics.

Kirillov, A. A., Modification of the field theory and the dark matter problem.