UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA — Lista de exercícios 2
DEPARTAMENTO DE FÍSICA – CCNE — Segundo Semestre/2015

- Física II – FSC 1097

1. Numa colméia, a razão de crescimento da população é uma função da população. Assim $\frac{dp}{dt} = f(p)$.

   a) Calcule $p(t)$ para $f(p) = \beta.p$ $(\beta > 0)$, considere $p(0) = p_0$ e determine a população limite do sistema (i.e. o limite de $p(t)$ quando t tende a infinito).

   b) Encontre $p(t)$ para $f(p) = \beta p - kp^2$ onde β e k são constantes positivas. Determine a população limite do sistema.

2. A taxa de crescimento da população de uma certa cidade é proporcional ao número de habitantes. Se a população em 1950 era de 50.000 e em 1980 de 75.000, qual a população esperada em 2010?

3. Um material radioativo se desintegra a uma taxa proporcional à quantidade de matéria no instante t. Supondo que a quantidade de inicial de matéria seja Q_0 e que 10 anos após já tenha se desintegrado $\frac{1}{3}$ da quantidade inicial, pede-se o tempo necessário para que metade da quantidade inicial desintegre.

5. Considere um pára-quedista em queda livre, sem o acionamento do pára-quedas. Determine a sua velocidade como função do tempo e sua velocidade limite ($t \to \infty$). Considere $v(0) = 0$. Obs.: Considere

   $P = mg =$ peso do paraquedista com o pára-quedas

   $R = -\gamma v =$ resistência do ar

7. A meia-via do cobalto radioativo é de $5,27$ anos. Suponha que um acidente nuclear tenha levado o nível de radiação por cobalto numa certa região a 100 vezes o nível aceito para a habitação humana. Quanto tempo levará até que a região seja novemente habitável? (Ignore a presença provável de outros elementos radioativos.)

8. O Carbono extraído de um crânio antigo continha apenas um sexto do ^{14}C radioativo do que o carbono extraído de uma amostra de um osso atual. Qual é a idade do crânio? Considere a meia-vida do carbono igual a 5.700 anos.

9. Suponha que um corpo, descoberto à meia-noite, tenha temperatura de $29,4$°C e que a temperatura ambiente seja constante e igual a $21,1$°C. O corpo é removido rapidamente (faça a hipótese da instantaneidade) para o necrotério onde a temperatura ambiente é $4,4$°C. Depois de uma hora a temperatura do corpo é de $15,6$°C. Estime a hora da morte.

10. Os moradores de uma certa comunidade decidiram interromper a fluorização da água local. Atualmente, o reservatório local contém 200 milhões de litros de água fluorizada que contém 1.600 Kg de flúor. A água está sendo usada a uma taxa de 4 milhões de litros por dia e está sendo substiutída a uma mesma taxa por água não fluorizada, e o flúor restante é sempre redistribuído uniformemente no reservatório. Expresse a quantidade de flúor no reservatório em função do tempo. Quanto tempo levará para que a quantidade de flúor no reservatório esteja reduzida à metade?

15. Uma pedra é solta a partir do repouso de uma altura h acima da superfície da Terra. Mostre que a velocidade com que atinge o solo é $v = \sqrt{2gh}$.

16. Determine o tempo necessário para esvaziar um tanque cilíndrico de raio 2m e altura 5m, cheio de água, admitindo-se que a água escoe através de um orifício, situado na base do tanque, de raio 10cm, com uma velocidade $v = \sqrt{2gh}\mathrm{m/s}$, sendo h a altura da água no tanque e $g = 10\mathrm{m/s^2}$ a aceleração gravitacional.

18. Segundo a lei de resfriamento de Newton, a velocidade de resfriamento de um corpo é proporcional à diferença entre as temperaturas do corpo e a do meio ambiente. Se a temperatura ambiente é 20ºC e a temperatura de um corpo passa de 100ºC para 60ºC em vinte minutos, qual é o tempo necessário para que a temperatura do corpo seja igual a 30ºC?

Respostas

1a. $p(t) = p_0 e^{\beta t}$; população limite: ∞.

1b. $p(t) = \dfrac{Ce^{\beta t}}{1 + \frac{k}{\beta} C e^{\beta t}}$; população limite: $\dfrac{\beta}{k}$.

2. 112.500 habitantes.

3. ≈ 17 anos.

4. 20m

5. $v(t) = \dfrac{mg}{\gamma}(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t})$.

6a. $y(t) = -\dfrac{2000}{3} + \dfrac{3500}{3} e^{\frac{3}{2\pi}} e^{-\frac{3}{2\pi}\cos 2\pi t}$.

6b. ≈ 2.365.

7. ≈ 35 anos.

8. ≈ 14.735 anos.

9. 23h 12min.

10. ≈ 34 dias.

11. $\approx 55,5$.

12. 48%.

13a. $Q(t) = \dfrac{V(kr+P)}{r} + \left(c_0 V - \dfrac{V(kr+P)}{r}\right) e^{-\frac{r}{V}t}$, $c(t) = \dfrac{Q(t)}{V}$; $\dfrac{V(kr+P)}{r}$.

13b. $\dfrac{V \ln 10}{r}$.

14a. $E(t) = \dfrac{e^{\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}}}{9 + e^{\frac{t}{7}\ln\frac{9}{4}}}$, $E + S = 1$.

14b. ≈ 19 dias.

16. 400 s.

17. $m(t) = 201.977,31 - 1.977,31 e^{(\ln 2)t}$.

18. 60 min.

Equações diferenciais de segunda ordem

Nos problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Nos problemas de 9 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t aumenta.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14. $2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
16. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$

17. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.
18. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{-2t}$.

Respostas

1. $y = c_1 e^{t} + c_2 e^{-3t}$

2. $y = c_1 e^{-t} + c_2 e^{-2t}$

3. $y = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{-t/3}$

4. $y = c_1 e^{t/2} + c_2 e^{t}$

5. $y = c_1 + c_2 e^{-5t}$

6. $y = c_1 e^{3t/2} + c_2 e^{-3t/2}$

7. $y = c_1 \exp[(9 + 3\sqrt{5})t/2] + c_2 \exp[(9 - 3\sqrt{5})t/2]$

8. $y = c_1 \exp[(1 + \sqrt{3})t] + c_2 \exp[(1 - \sqrt{3})t]$

9. $y = e^{t}$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$

10. $y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$

11. $y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$

12. $y = -1 - e^{-3t}$; $y \to -1$ quando $t \to \infty$

13. $y = \frac{1}{26}(13 + 5\sqrt{13}) \exp[(-5 + \sqrt{13})t/2] + \frac{1}{26}(13 - 5\sqrt{13}) \exp[(-5 - \sqrt{13})t/2]$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$

14. $y = (2/\sqrt{33}) \exp[(-1 + \sqrt{33})t/4] - (2/\sqrt{33}) \exp[(-1 - \sqrt{33})t/4]$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$

15. $y = \frac{1}{10}e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10}e^{t-1}$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$

16. $y = -\frac{1}{2}e^{(t+2)/2} + \frac{3}{2}e^{-(t+2)/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$

17. $y'' + y' - 6y = 0$

18. $2y'' + 5y' + 2y = 0$

Nos problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$

6. $y'' - 6y' + 9y = 0$

Nos problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t cresce.

11. $9y'' - 12y' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$

14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 1$

Respostas

1. $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} - e^{2t}$

2. $y = c_1e^{-t}\cos 2t + c_2e^{-t}\,\text{sen}\,2t + \frac{3}{17}\,\text{sen}\,2t - \frac{12}{17}\cos 2t$

3. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} - \frac{7}{2} + 3t - 2t^2$

4. $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t} + 2e^{3t} - 3e^{-2t}$

5. $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-t} + \frac{3}{16}te^{-t} + \frac{3}{8}t^2e^{-t}$

6. $y = c_1 + c_2e^{-2t} + \frac{3}{2}t - \frac{1}{2}\,\text{sen}\,2t - \frac{1}{2}\cos 2t$

7. $y = c_1\cos 3t + c_2\,\text{sen}\,3t + \frac{1}{162}(9t^2 - 6t + 1)e^{3t} + \frac{2}{3}$

8. $y = c_1e^{-t} + c_2te^{-t} + t^2e^{-t}$

9. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-t/2} + t^2 - 6t + 14 - \frac{3}{10}\,\text{sen}\,t - \frac{9}{10}\cos t$

10. $y = c_1\cos t + c_2\,\text{sen}\,t - \frac{1}{3}t\cos 2t - \frac{5}{9}\,\text{sen}\,2t$

11. $u = c_1\cos\omega_0 t + c_2\,\text{sen}\,\omega_0 t + (\omega_0^2 - \omega^2)^{-1}\cos\omega t$

12. $u = c_1\cos\omega_0 t + c_2\,\text{sen}\,\omega_0 t + (1/2\omega_0)t\,\text{sen}\,\omega_0 t$

13. $y = c_1e^{-t/2}\cos(\sqrt{15}\,t/2) + c_2e^{-t/2}\,\text{sen}(\sqrt{15}\,t/2) + \frac{1}{6}e^t - \frac{1}{4}e^{-t}$

14. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{2t} + \frac{1}{6}te^{2t} + \frac{1}{8}e^{-2t}$