CONSTRUÇÃO

DE

GRÁFICOS

E

LINEARIZAÇÃO

Física Experimental

Departamento de Física
Centro de Ciências Tecnológicas/UDESC

III. MEDIDAS

III.1. Introdução

Entre os diversos recursos à disposição dos pesquisadores para o desenvolvimento da ciência, sem dúvida alguma, os gráficos ocupam uma posição de destaque. Em vez de olhar para uma tabela com um conjunto de medidas realizadas, o cientista olha para o gráfico traçado a partir dessas medidas e percebe o comportamento geral das grandezas físicas envolvidas naquela particular medição.

Se voltarmos nossa atenção para a mídia, em particular as revistas e os programas de televisão, vamos inevitavelmente encontrar informações que são dadas através de gráficos. Podemos citar como exemplos: a evolução no tempo do salário mínimo, da mortalidade infantil, do número de furtos, do número de acidentes de trânsito, e outros tantos.

Em seu computador pessoal você poderá verificar a ocupação do disco rígido através de um gráfico do tipo “pizza”. Se você fizer um exame do seu coração, verificará que o resultado é um gráfico chamado de “eletrocardiograma”, cuja análise permite ao médico ter informações sobre o funcionamento desse órgão. Diga-se de passagem, a medicina moderna utiliza-se de uma série de equipamentos que fornecem gráficos como resultado da medida do funcionamento de certas partes do corpo humano.

Portanto, através da “leitura” de um simples gráfico o médico, ou o cientista, ou o estudante, pode “compreender” o que está acontecendo com aquelas grandezas medidas.

O uso de gráficos na Física é tão importante quanto o conceito de função na Matemática. Sua utilização na representação de fenômenos permite ilustrar propriedades importantes. Um gráfico serve, entre outras coisas, para mostrar a conexão entre duas ou mais grandezas físicas, sendo uma representação visual do modo como umas variam em relação às outras.

Neste curso, vamos trabalhar apenas com a relação entre **duas grandezas físicas**, sendo **uma independente** e a **outra dependente** desta. Por exemplo, a grandeza física *velocidade* é dependente da grandeza física *tempo*, que é independente. Ou seja, o tempo flui independentemente de como a velocidade varia, porém, a velocidade varia em função de como o tempo flui.

Atualmente, é quase impossível imaginar alguma área da ciência ou tecnologia em que a construção e o estudo de gráficos não seja necessário.

Nas disciplinas de Física Experimental é indispensável o conhecimento e o domínio do conteúdo deste texto.

Existem inúmeros tipos de gráficos. Neste texto aprenderemos a trabalhar apenas com gráficos que envolvam duas variáveis e podem ser traçados em *papel milimetrado*.

Iniciaremos com o estudo de gráficos cartesianos em papel milimetrado e seus fundamentos. Na seqüência vamos aprender a linearizar algumas funções gerais (anamorfose) ainda em papel milimetrado. E concluiremos com a técnica da *linearização* aplicada a funções exponenciais e logarítmicas, através do uso de papéis em escala logarítmica: *mono-log* e *di-log*.

A experiência tem nos mostrado que todos os estudantes têm dificuldades no aprendizado da construção de gráficos, e principalmente no uso da técnica da linearização. Mas a experiência também nos mostra que a dedicação e a construção de muitos gráficos, na prática, tem ótimos resultados. Queremos dizer que, só se aprende a lidar com gráficos fazendo muitos exercícios. Neste sentido apresentamos ao final uma certa quantidade de sugestões de *exercícios de gráficos* a fim de que você desenvolva esse conhecimento.

Bom estudo!

III.2. Sistema de Coordenadas Cartesianas

Considere uma grandeza física dependente u que varia como função de uma grandeza independente z. Matematicamente, isto pode ser representado pela função: $u = f(z)$.

Se for conhecida de forma explícita a função $\boldsymbol{u = f(z)}$, pode-se representá-la graficamente em um sistema de coordenadas cartesianas, que consiste de duas retas perpendiculares: o eixo **x** (eixo das abscissas), onde deve ser representada a variável independente (z), e o eixo **y** (eixo das ordenadas), onde deve ser representada a variável dependente ($\boldsymbol{u}$).

A cada par ordenado $(x_i\,;\,y_i) = (z_i\,;\,u_i)$ corresponde um ponto P_i de abscissa $x_i = z_i$ e ordenada $y_i = u_i$. O conjunto dos vários pontos P_i é denominado de curva da função $u = f(z)$. Convém salientar que os valores representados nos eixos podem ter sinal negativo ou positivo, arbitrado conforme a conveniência, ou seja, conforme a função que se queira representar. Geralmente usa-se apenas o quadrante em que os valores das variáveis são positivos.

Veja a figura III.1 abaixo.

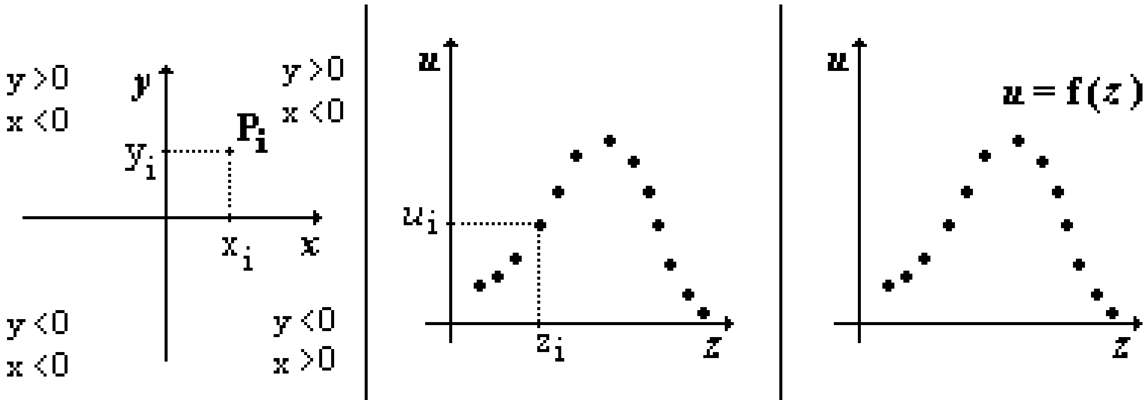


Figura III.1

III.3. Construção de Gráficos em Papel Milimetrado

A observação de um fenômeno físico qualquer é feita, geralmente, através do tabelamento de valores medidos. Através do exemplo abaixo, vejamos como se constrói o gráfico a partir deste tabelamento, usando o papel milimetrado.

<u>Exemplo 15:</u> Em um experimento de dilatação volumétrica mediu-se o volume (V) de uma esfera para várias temperaturas (T), obtendo-se uma tabela de valores de V e de T, cujos dados foram anotados na tabela abaixo.

V (10^{-9} m^3)	64,1	80,7	97,8	114,9	138,0	162,5	195,0	223,3	260,0
T (^oC)	60,00	65,00	70,00	75,00	80,00	85,00	90,00	95,00	100,00
i	1	2	3	4	5	6	7	8	9

Cada par de valores $(T_i\,;\,V_i)$, onde i é o índice que indica a ordem da medida (i = 1,2,3,..., 9), deve ser representado por um ponto em um gráfico cartesiano do tipo *y versus x* (veja figura III. 1), ou *V versus T*, pois o volume da esfera é dependente da temperatura. Nota-se na própria tabela, que à medida que a temperatura aumenta, o volume da esfera dilata-se, como conseqüência.

Para construir o gráfico, a partir da tabela acima, devemos obedecer às instruções a seguir.

1) Seleção do papel. No caso será o papel milimetrado.

Mais adiante você aprenderá como escolher o tipo de papel que deverá usar para fazer um gráfico, dependendo do tipo de função associada ao comportamento físico observado. Por enquanto, estudemos como fazê-lo em uma folha de papel milimetrado. Em princípio, qualquer função de uma variável pode ser traçada graficamente neste tipo de papel. Não há restrições!

2) Definição dos eixos.

- No eixo das abcissas (eixo horizontal) deve ser registrada a variável independente (eixo dos *x*) associada à grandeza física que, ao variar, assume valores que não dependem dos valores da outra grandeza física.
- No eixo das ordenadas (eixo vertical) deve ser registrada a variável dependente (eixo dos *y*) associada à grandeza física que, para variar, depende de como varia a outra grandeza física. Em outras palavras, registra-se a causa: variável *x* no eixo horizontal e o efeito: variável *y*, ou função *y*(*x*), no eixo vertical.

Por exemplo, quando um experimentador mede a distância (d) que um corpo móvel percorre em um certo intervalo de tempo (t), verifica que essa distância varia de acordo com o tempo medido, e não o contrário: "o tempo varia de acordo com a distância", o que é um absurdo! Assim, o gráfico *y versus x* deve ser de *d versus t*, e nunca de *t versus d*, pois *d = d(t)*.

Para o caso que estamos considerando (exemplo 15), o gráfico cartesiano do tipo *y versus x* deve ser, então, *V versus T*, pois o volume da esfera é dependente da temperatura. Veja a figura III.2 abaixo.

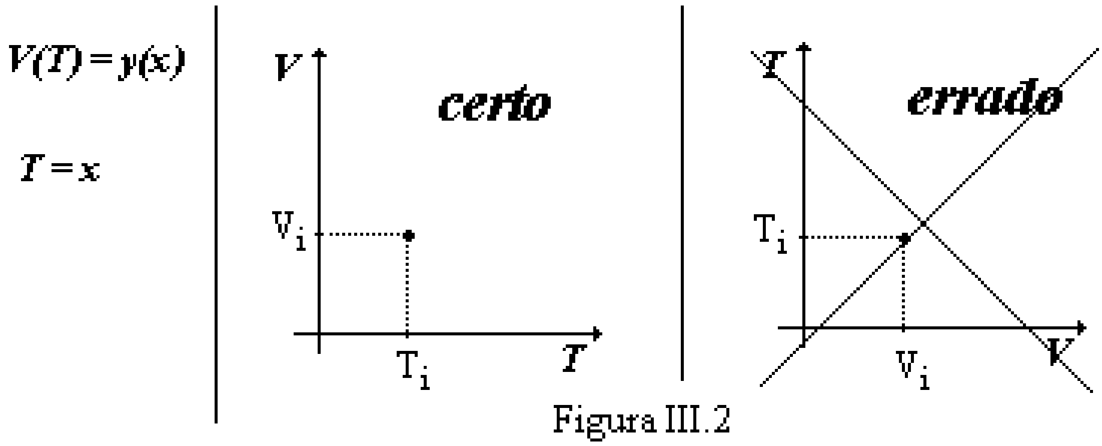


Figura III.2

3) Registros dos eixos.

- Na parte inferior do eixo das abcissas, à direita, e preferencialmente fora da região quadriculada do papel milimetrado, deve ser registrada a variável independente, com sua unidade entre parênteses.
- Na parte superior do eixo das ordenadas, à esquerda, e preferencialmente fora da região quadriculada do papel milimetrado, deve ser registrada a variável dependente, com sua unidade entre parênteses.

Note que a unidade de uma grandeza física inclui uma eventual potência de 10, que pode ter expoente positivo ou negativo. No caso que estamos considerando (exemplo 15), observe que a medida do volume está expressa na unidade: 10^{-9} m^3 e, portanto, deve ser registrada no gráfico, conforme mostrado na figura III.3 ao lado.

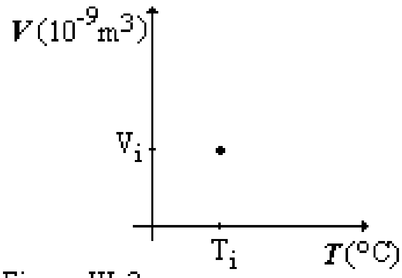


Figura III.3

4) Determinação das escalas e da posição do papel.

- Geralmente, uma folha de papel milimetrado tem 280 mm no eixo vertical, e 180 mm no eixo horizontal, então, podemos usá-la nesta posição ("retrato") ou em outra posição, invertendo os eixos ("paisagem"). Deve ser escolhida uma destas duas possibilidades: "retrato" ou "paisagem", de modo a otimizar a construção do gráfico visando ocupar o melhor possível a folha.

Entretanto, "ocupar o melhor possível a folha" não significa que se deve usar a escala que preenche todo o papel. Na prática, deve-se escolher uma escala que facilite a leitura dos pontos experimentais, ou qualquer outro ponto representado no gráfico.

Vamos estimar, a seguir, as várias possibilidades de escala para representar as variáveis V e T, e adotar aquelas que melhor ocupam o papel em uma das duas posições possíveis.

<u>**Variável Dependente**</u>**: volume (V)**

A grandeza física varia entre os valores 64,1 e 260,0x10^{-9} m^3. Momentaneamente ignoremos a unidade (inclusive a potência) para facilitar.

1ª possibilidade: **considerando o papel na posição "retrato" - Eixo Vertical (280 mm)**

(a) Começando do zero: Se começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para o volume é de (260,0 – 0,0) = 260,0 unidades de volume. A escala direta é

1,0 unidade de volume : 1 mm do papel ,

e a maior medida do volume (260,0) corresponde a 260 mm do papel. (cabe bem no papel!). Note que, se usarmos qualquer escala diferente desta, ou o gráfico não caberá no papel, ou não o ocupará bem.

(b) Não começando do zero: Se não começarmos o gráfico a partir do valor zero, o intervalo de variação para o volume é de (260,0 – 64,1) = 195,9 unidades de volume. Iniciamos a partir do valor 60,0 (por exemplo), e fazemos o seguinte cálculo: (260,0 – 60,0) = 200,0 unidades de volume

280 mm	corresponde a	200,0 unidades de volume
1 mm	corresponde a	200,0 unidades de volume / 280 mm

200,0 unidades de volume / 280 mm = 0,714 unid. / mm

Note que para cada unidade de volume teremos 1,40 (1/0,714) mm. Complicado!!
Para facilitar, tanto para quem faz o gráfico, quanto para quem vai lê-lo, adota-se a escala mais próxima desta que seja bem clara para todo mundo. Mesmo que isso signifique não ocupar todo o papel milimetrado.

*Deve-se adotar uma **"escala limpa e fácil de ser lida"** de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Aliás, se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.*

Adotando o primeiro valor igual a 60,0 unidades de volume, por tentativa e erro, achamos a escala:

1ª tentativa:
1,0 unidade de volume / 1 mm – o maior valor (260,0) é considerado (260,0 – 60,0) = 200,0 unidades de volume, o que corresponde a 200 mm no papel (sobra bastante papel!).

2ª tentativa:
1,0 unidade de volume / 2 mm – o maior valor (260,0) é considerado (260,0 – 60,0) = 200,0 unidades de volume, o que corresponde a 400 mm no papel (não cabe no papel!).

Conclusão, considerando o papel na posição "retrato", o melhor é começar do zero, e adotar no eixo vertical a escala **1,0 unidade de volume : 1 mm do papel.**

2ª possibilidade: **considerando o papel na posição "paisagem" - Eixo Vertical (180 mm)**

(a) Começando do zero: Se começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para o volume é de (260,0 – 0,0) = 260,0 unidades de volume.

A escala direta é **1,0 unidade de volume : 1 mm do papel**, e a maior medida do volume (260,0) corresponde a 260 mm do papel. (fora do papel!)
Então, calcula-se

180 mm	corresponde a	260,0 unidades de volume
1 mm	corresponde a	260,0 unidades de volume / 180 mm

260,0 unidades de volume / 180 mm = 1,4444 unidades de volume / mm

A escala mais próxima seria **1,5 unidades de volume / mm**. Mas, esta escala é submúltiplo de 3, e como todo submúltiplo ou múltiplo de 3, leva sempre a uma dízima periódica. Portanto, fuja de escalas do tipo: 0,375 ; 0,75 ; 1,5 ; 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; etc.

A escala mais fácil e mais próxima é **2,0 unidades de volume / mm.** Note que a maior medida do volume (260,0) estará representada em 130 mm (sobra bastante papel!).

Qualquer escala acima dessa faz com que os pontos saiam fora do papel!

(b) Não começando do zero: Se não começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para o volume é de (260,0 – 64,1) = 195,9 unidades de volume. Iniciamos a partir do valor 60,0 (por exemplo), e fazemos o seguinte cálculo: (260,0 – 60,0) = 200,0 unidades de volume

180 mm	corresponde a	200,0 unidades de volume
1 mm	corresponde a	200,0 unidades de volume / 180 mm

200,0 unidades de volume / 180 mm = 1,11 unid. / mm

Note que para cada unidade de volume teremos 0,901 (1/1,11) mm. Complicado!! Para facilitar, tanto para quem faz o gráfico, quanto para quem vai lê-lo, adota-se a escala mais próxima desta que seja bem clara para todo mundo. Mesmo que isso signifique não usar todo o papel milimetrado.

*Deve-se usar uma **"escala limpa e fácil de ser lida"** de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Aliás, se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.*

Adotando o primeiro valor igual a 60,0 unidades de volume, por tentativa e erro, achamos a escala:

1ª tentativa:
1,0 unidade de volume / 1 mm – o maior valor (260,0) é considerado (260,0 – 60,0) = 200,0 unidades de volume, o que corresponde a 200 mm no papel (não cabe no papel!).

2ª tentativa:
2,0 unidade de volumes / 1 mm – o maior valor (260,0) é considerado (260,0 – 60,0) = 200,0 unidades de volume, o que corresponde a 100 mm no papel (sobra bastante papel!).

Conclusão, considerando o papel na posição "paisagem" pode-se começar do zero, adotando-se a escala **2,0 unidade de volumes : 1 mm do papel,** ou não começar do zero (sendo o primeiro valor: 60,0 unidades de volume) adotando-se a escala **2,0 unidades de volume : 1 mm do papel**,. Em ambas as escolhas sobra bastante papel.

Agora, vamos estimar a escala para representar a outra grandeza física, sabendo que:

A escala usada em um eixo é totalmente independente da escala usada no outro.

Isto significa que, para representar graficamente as medidas de temperatura, podemos adotar uma *escala diferente* daquela que determinamos para apresentar as medidas do volume no gráfico.

Variável Dependente: temperatura (T)

A grandeza física varia entre os valores 60,0 e 100,0 ^{o}C. Momentaneamente ignoremos a unidade, para facilitar.

***1ª possibilidade:* considerando o papel na posição "paisagem" - Eixo Horizontal (280 mm)**

(a) Começando do zero: Se começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para a temperatura é de (100,00 – 0,00) = 100,00 unidades de temperatura. A escala direta é

1,00 unidade de temperatura : 1 mm do papel ,

e a maior medida da temperatura (100,00) corresponde a 100 mm no papel (sobra muito papel).

A escala mais próxima, a seguir, é **1,00 unidade de temperatura / 2 mm.** A maior medida da temperatura estará representada em 200 mm (sobra bastante papel!).

Qualquer escala diferente dessas faz com que os pontos, ou saiam fora do papel, ou não o ocupem bem.

(b) Não começando do zero: Se não começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para a temperatura é de (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura. Iniciamos a partir do valor 60,0 (por exemplo), e fazemos o seguinte cálculo

280 mm	corresponde a	40,00 unidades de temperatura
1 mm	corresponde a	40,00 unidades de temperatura / 280 mm

40,00 unidades de temperatura / 280 mm = 0,143 unid. / mm

Note que para cada unidade de temperatura teremos 6,99 (1/0,143) mm. Complicado!! Para facilitar, tanto para quem faz o gráfico, quanto para quem vai lê-lo, adota-se a escala mais próxima desta que seja bem clara para todo mundo. Mesmo que isso signifique não usar todo o papel milimetrado.

Deve-se usar uma ***"escala limpa e fácil de ser lida"*** *de modo a que não seja necessário fazer cálculos para achar a localização dos pontos no gráfico. Aliás, se você precisar fazer muitos cálculos, algo está inadequado.*

Adotando o primeiro valor igual a 60,00 unidades de temperatura, por tentativa e erro, achamos a escala:

1ª tentativa:
1,00 unidade de temperatura / 1 mm – o maior valor (100,00) é considerado (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura, o que corresponde a 40 mm no papel (sobra muito papel!).

2ª tentativa:
1 unidade de temperatura / 2 mm – o maior valor (100,00) é considerado (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura, o que corresponde a 80 mm no papel (sobra muito papel!).

3ª tentativa:
1 unidade de temperatura / 5 mm – o maior valor (100,00) é considerado (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura, o que corresponde a 200 mm no papel (sobra muito papel!).

Conclusão, considerando o papel na posição "paisagem" pode-se começar do zero, adotando-se a escala **1,00 unidade de temperatura : 2 mm do papel** ou não começar do zero (sendo o primeiro valor: 60,00 unidades de temperatura) adotando-se a escala **1,00 unidade de temperatura : 5 mm do papel**,. Em ambas as escolhas sobra bastante papel.

2ª possibilidade: **considerando o papel na posição "retrato" - Eixo Horizontal (180 mm)**

(a) Começando do zero: Se começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para a temperatura é de (100,00 – 0,00) = 100,00 unidades de temperatura.

A escala direta é **1,00 unidade de temperatura : 1 mm do papel**, e a maior medida da temperatura (100,0) corresponde a 100 mm do papel. (sobra muito papel!)
A próxima tentativa é **1,0 unidade de temperatura : 2 mm do papel**, e a maior medida da temperatura (100,0) corresponde a 200 mm do papel. (fora do papel!)

(b) Não começando do zero: Se não começarmos o gráfico a partir do zero, o intervalo de variação para a temperatura é de (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura. Iniciamos a partir do valor 60,0 (por exemplo), e fazemos o seguinte cálculo

180 mm	corresponde a	40,00 unidades de temperatura
1 mm	corresponde a	40,00 unidades de temperatura / 180 mm

40,00 unidades de temperatura / 180 mm = 0,222 unid. / mm

Note que para cada unidade de temperatura teremos 4,50 (1/0,222) mm. Complicado!! Para facilitar, tanto para quem faz o gráfico, quanto para quem vai lê-lo, adota-se a escala mais próxima desta que seja bem clara para todo mundo. Mesmo que isso signifique não usar todo o papel milimetrado.

Adotando o primeiro valor igual a 60,0 unidades de temperatura, por tentativa e erro, achamos a escala:

1ª tentativa:
1,00 unidade de temperatura / 1 mm – o maior valor (100,00) é considerado (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura, o que corresponde a 40 mm no papel (sobra muito papel!).

2ª tentativa:
1,00 unidade de temperatura / 4 mm – o maior valor (100,00) é considerado (100,00 – 60,00) = 40,00 unidades de temperatura, o que corresponde a 160 mm no papel (ocupa bem o papel!).

Conclusão, considerando o papel na posição "retrato", pode-se começar do zero, adotando-se a escala **1,00 unidade de temperatura : 1 mm do papel** ou não começar do zero (sendo o primeiro valor: 60,00 unidades de temperatura) adotando-se a escala **1,00 unidade de temperatura : 4 mm do papel**. A última escolha ocupa melhor o papel e, portanto, é a melhor.

Conclusão das conclusões: Da análise acima verificamos que a melhor maneira de ocupar o papel milimetrado, adotando escalas limpas e claras para representar as medidas no gráfico, é a seguinte:

- Posição do papel: "RETRATO"

***Eixo vertical* – volume V** – escala **1,0 unidade de volume : 1 mm do papel**, começando do zero, isto é, 0 unidades de volume.

***Eixo horizontal* – temperatura T** – escala **1,0 unidade de temperatura : 4 mm do papel**, sendo o primeiro valor: 60,00 unidades de temperatura.

5) Indicação de valores nos eixos.

- Tanto no eixo vertical, quanto no horizontal, devem ser indicados valores referenciais adequados à escala. Esses valores devem ser, preferencialmente, múltiplos de 2, 5, 10, 20, 50, 100, etc. Nunca use múltiplos ou submúltiplos de números primos ou fracionários, tais como 3, 7, 9, 11, 13, 15, 17, ou 2,5; 3,3; 7,5; 8,25; 12,5; 16,21; etc.

- Jamais indique nos eixos os valores dos pontos experimentais.

- Os valores indicados nos eixos devem ter a mesma quantidade de algarismos significativos das medidas, por exemplo, no caso do volume, os valores indicados serão: 50,0; 100,0; 150,0; etc.

6) Marcação dos pontos experimentais.

- É fundamental que os pontos experimentais sejam bem marcados no gráfico e identificados por um sinal que não deixe dúvidas sobre sua localização. Veja os exemplos na figura III.4 abaixo.

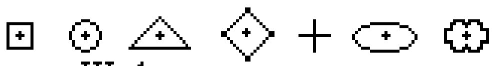


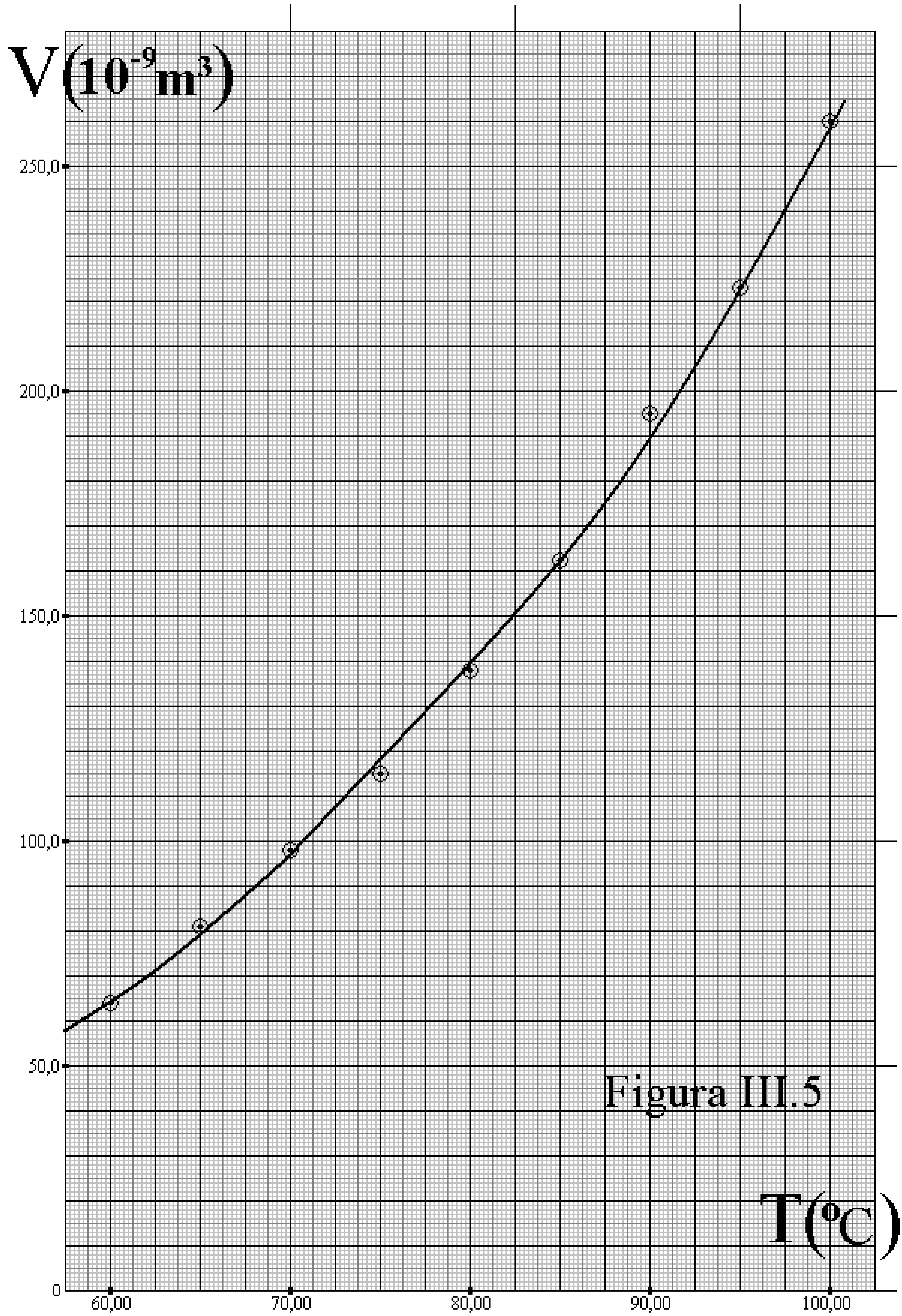
Figura III.4

- Depois de marcado o ponto experimental não faça nenhuma marcação adicional, tal como fazer tracejados desde o ponto até os eixos. *Identifique apenas os pontos experimentais!*

7) Traçado da curva.
- O traçado da curva deve ser suave e contínuo, ajustando-se o melhor possível aos pontos experimentais.

- Nunca uma os pontos experimentais por linhas retas, pois isto significa que a relação entre as grandezas físicas é descontínua, o que dificilmente será verdadeiro.

Seguindo as instruções acima, veja a figura III.5 (na página seguinte) que mostra como deve ficar o gráfico. Observe que o valor inicial para a temperatura, no eixo horizontal, foi levemente deslocado para a direita, a fim de facilitar a visualização dos pontos. Caso contrário, o primeiro ponto ficaria sobre o eixo vertical das ordenadas, o que não é recomendável!


V(10-9m3)
250,0
200,0
150,0
100,0
50,0
0
60,00
70,00
80,00
90,00
100,00
T(ºC)
Figura III.5

III.3.a. Construção de Gráfico Linear em Papel Milimetrado

Vamos aprender, através de um novo exemplo, como obter informações a partir de um gráfico em papel milimetrado, quando a curva traçada for uma reta.

Exemplo 16: Observou-se o movimento de um bloco que desce deslizando um plano inclinado. Obteve-se um conjunto de medidas da velocidade e do tempo, que foram anotados na tabela abaixo.

v (10^{-3} m/s)	105,0	150,0	240,0	290,0	340,0	430,0	500,0
t (10^{-2} s)	1,00	2,50	6,00	8,00	10,00	13,50	16,00

Cada par de valores (t_i ; v_i) deve ser representado por um ponto em um gráfico cartesiano do tipo *y versus x*, ou, no exemplo, *v versus t*, pois a velocidade do bloco é função do tempo.

Seguindo as instruções dadas na seção III.3., você poderá traçar um gráfico como o que está representado na figura III.6, na próxima página. Note que a curva traçada é uma reta.

Sabemos da geometria analítica, que a equação da reta na sua forma reduzida é dada por: **y(x) = ax + b** , onde **a** é o coeficiente angular e **b** é o coeficiente linear da reta.

A partir do gráfico podemos determinar esses coeficientes e associá-los a grandezas físicas que não estão evidentes. Em outras palavras, podemos extrair informações do gráfico.

Daqui para a frente adotaremos como regra: *sempre que obtivermos uma reta em um gráfico, fazer o cálculo desses coeficientes.*

– Cálculo do coeficiente angular

Pode-se mostrar que o coeficiente angular é dado pelo quociente:

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$$

onde (x_1, y_1) e (x_2, y_2) são dois pontos quaisquer, pertencentes à reta.

Observando a reta traçada no gráfico, encontramos os dois pontos *não experimentais*:

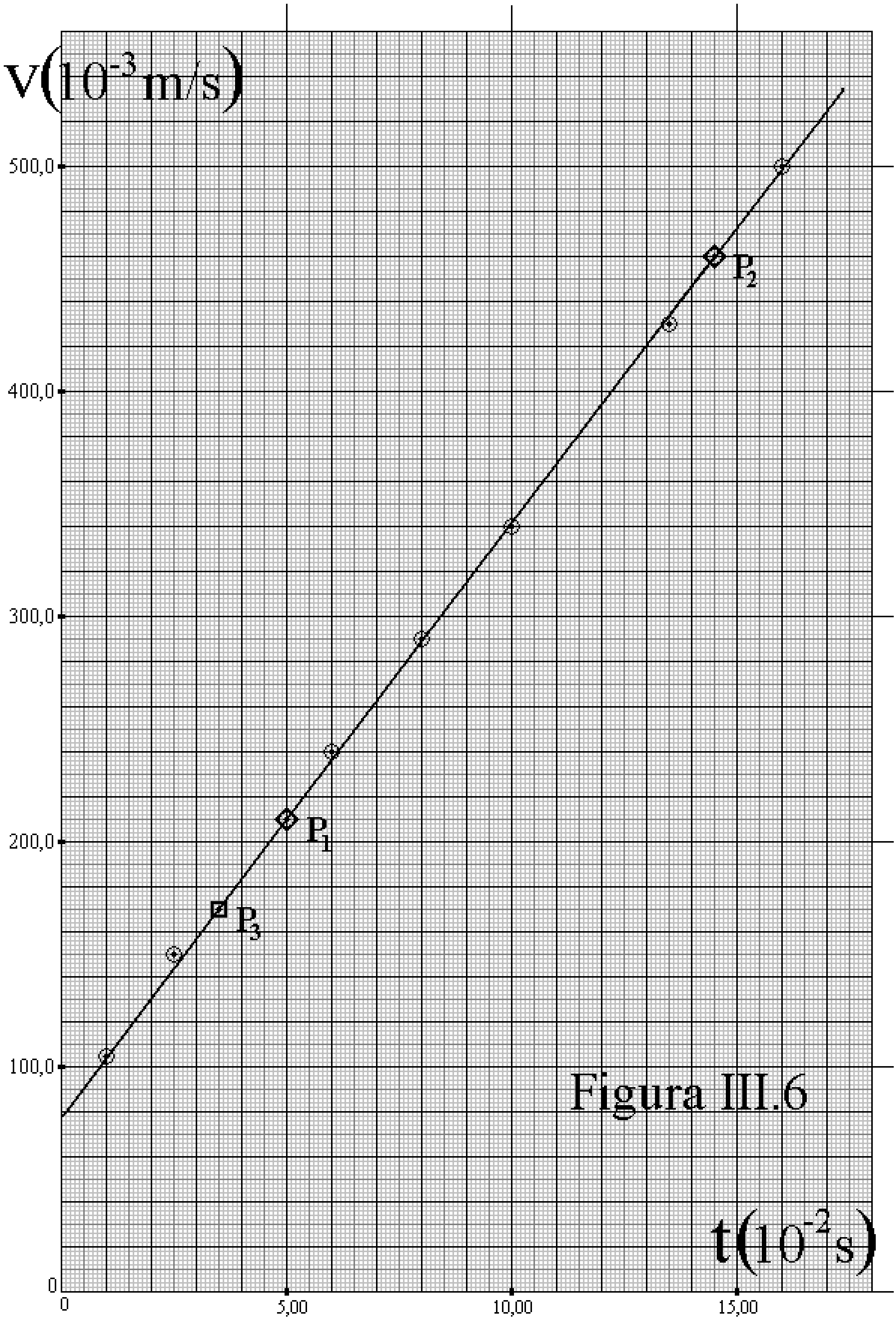
$$P_2 = (x_2 , y_2) = (t_2 , v_2) = (14{,}50 \text{ x } 10^{-2} \text{ s} ; 460{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s})$$

$$P_1 = (x_1 , y_1) = (t_1 , v_1) = (5{,}00 \text{ x } 10^{-2} \text{ s} ; 210{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s})$$

os quais são indicados na reta com uma notação diferente daquela usada para indicar os pontos experimentais. Isto porque *para o cálculo dos coeficientes não podem ser usados pontos experimentais!* Então,

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{(v_2 - v_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{(460{,}0 - 210{,}0)\text{x}10^{-3} \text{ m/s}}{(14{,}50 - 5{,}00)\text{x}10^{-2} \text{ s}} = 2{,}6315789 \text{ m/s}^2 = 2{,}63 \text{ m/s}^2$$

Concluímos que o coeficiente angular da reta é igual a 2,63 m/s^2, e corresponte à grandeza física conhecida como *aceleração*.



v(10^-3 m/s)
500,0
400,0
300,0
200,0
100,0
0
0
5,00
10,00
15,00
P2
P1
P3
Figura III.6
t(10^-2 s)

– Cálculo do coeficiente linear

Para fazer esse cálculo há duas maneiras:

1ª – Escolhe-se um ponto *não experimental* qualquer da reta: $P_3 = (x_3,y_3) = (t_3,v_3)$, o qual é indicado na reta com uma notação diferente daquela usada para indicar os pontos experimentais. Isto porque *para o cálculo dos coeficientes não podem ser usados pontos experimentais!* Substitui-se o valor desse ponto na equação reduzida da reta, pois o coeficiente angular já é conhecido.

Observando novamente a reta traçada no gráfico, encontramos um terceiro ponto não experimental:

$$P_3 = (x_3 , y_3) = (t_3 , v_3) = (3{,}50 \text{ x } 10^{-2} \text{ s} ; 170{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s})$$

Então, $y(x) = ax + b$, ou $b = y(x) – ax$, ou $b = y_3 - ax_3 = v_3 - at_3$

$b = (170{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s}) – (2{,}63 \text{ m/s}^2).(3{,}50 \text{ x } 10^{-2} \text{ s}) = 0{,}07795 \text{ m/s} = 78{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s}$.

2ª – Quando for possível prolongar a reta (*extrapolação*) até cortar o eixo dos y (em x = 0), basta ler o valor da reta em y(x = 0), pois este é o coeficiente linear.

$$y(x) = ax + b, \quad \text{ou} \quad y(x = 0) = a.0 + b \quad \text{ou} \quad y(x = 0) = b$$

Observando a reta traçada, encontramos o ponto em que corta o eixo dos y (em x = 0), ou o eixo dos v (em t = 0), isto é, $b = v (t = 0) = 79{,}0 \text{ x } 10^{-3}$ m/s.

Finalmente, obtivemos o coeficiente linear de duas maneiras:

$$79{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s (lido)} \quad \text{e} \quad 78{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s (calculado)}$$

Observe que há uma pequena diferença entre os valores. Isto ocorre como resultado do arredondamento que é feito nos cálculos. Mas, não se preocupe, ambos os resultados obtidos são aceitos, porque estão dentro de uma margem de erro muito pequena.

Concluímos que o coeficiente linear da reta pode ter qualquer um dos dois valores acima, e corresponde à grandeza física conhecida como *velocidade inicial*, isto é, $v(t = 0) = v_o$.

Em resumo, em um gráfico linear de *v versus t*, o coeficiente angular corresponde à aceleração, e o coeficiente linear corresponde à velocidade inicial.

Para o caso exemplificado,

$$\mathbf{y(x) = ax + b = v(t) = \alpha t + v_o}$$

onde $\mathbf{a = \alpha = 2{,}63 \text{ m/s}^2}$ $\mathbf{b = v_o = 79{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s}}$

ou, finalmente,

$$\mathbf{v(t) = (2{,}63 \text{ m/s}^2).t + (79{,}0 \text{ x } 10^{-3} \text{ m/s})} \qquad \textbf{sendo t em s.}$$

III.4. Linearização

Agora que aprendemos a trabalhar com gráfico linear, vamos desenvolver um método que permite transformar o gráfico de uma curva qualquer em um gráfico linear, pois sabemos calcular os coeficientes da reta e associá-los a grandezas físicas. Esta técnica é chamada de linearização (ou anamorfose) e consiste basicamente em "desentortar" e "retificar" o gráfico de uma curva que não é reta. Vejamos como se aplica essa técnica através do exemplo a seguir.

Exemplo 17: Considere que foram realizadas medidas do movimento retilíneo de um móvel que se desloca ao longo de uma estrada. Obteve-se um conjunto de valores de sua posição e do tempo, que foram anotados na tabela abaixo.

x (m)	58,0	84,0	105,0	150,0	188,0	240,0
t (s)	5,25	7,00	8,00	10,00	11,50	13,00

Cada par de valores (t_i ; x_i) deve ser representado por um ponto em um gráfico cartesiano do tipo *y versus x*, ou, no exemplo, *x versus t*, pois a posição do móvel é função do tempo.

Seguindo as instruções para a construção de gráficos em papel milimetrado, dadas na seção III.3., você poderá traçar um gráfico como o que está representado na figura III.7, na próxima página.

Note que a curva traçada não é uma reta.

A curva obtida nesse gráfico é uma parábola, e obedece a uma equação geral do tipo:
$y(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$, onde os coeficientes são constantes, e no caso, $a_1 = 0$. Portanto, a curva representada no gráfico pode ser representada pela equação: $\mathbf{x(t) = \varepsilon t^2 + \gamma}$, onde os coeficientes ε e γ são constantes.

A questão é: *como determinar graficamente as constantes* ε e γ *?*

Resposta: usando a técnica da *linearização*.

Vejamos, então, através do exemplo 17, quais são os procedimentos que devem ser obedecidos para linearizar o gráfico.

- Primeiro passo: *Comparação com a equação reduzida da reta*

Comparar a função associada à curva ($x(t) = \varepsilon t^2 + \gamma$) graficada com a equação reduzida da reta: $y'(x') = a'x' + b'$. Observe que se adota um super-índice "linha" para identificar os termos da reta, a fim de evitar confusão na eventualidade da outra equação ter notação similar. Obtemos,

$$x(t) = y'(x'); \qquad \varepsilon = a'; \qquad t^2 = x'; \qquad \gamma = b'$$

Sabemos que o gráfico " $y'(x')$ versus x' " é uma reta. Por analogia, o gráfico em que a curva aparece linearizada (reta) é dado por " $x(t)$ versus t^2 ".

x(t) versus t $\Rightarrow$ gráfico não linear

y'(x') versus x' $\Rightarrow$ x(t) versus t² $\Rightarrow$ gráfico linear

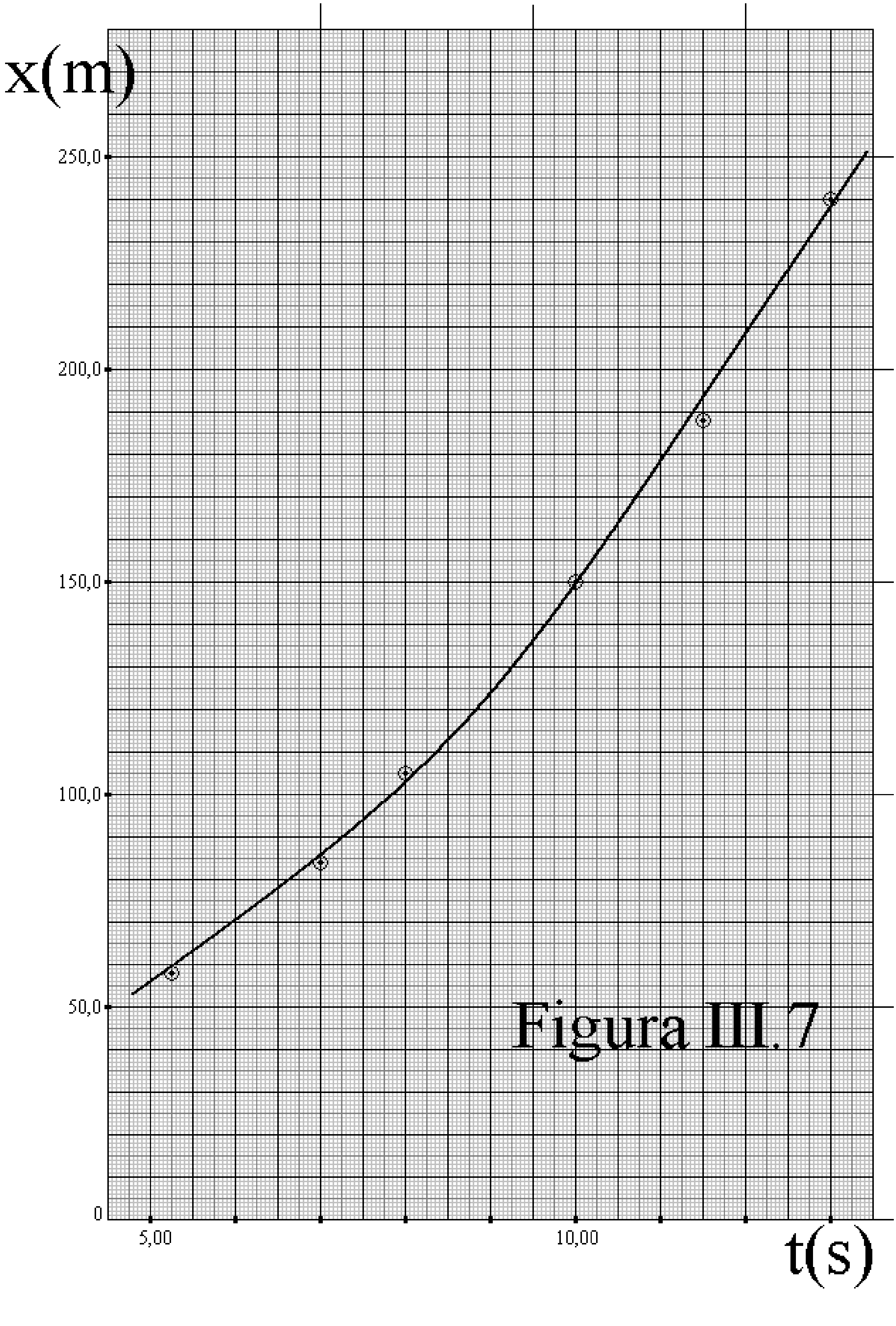


Figura III.7

- Segundo passo: *Cálculo de nova tabela*

A partir dos dados experimentais tabelados acima, calcula-se uma nova tabela. No exemplo 17, mantêm-se os valores de x e calculam-se os novos valores para t^2. Respeite os algarismos significativos, e não se esqueça das unidades.

x (m)	58,0	84,0	105,0	150,0	188,0	240,0
t (s)	5,25	7,00	8,00	10,00	11,50	13,00
t^2 (s^2)	27,6	49,0	64,0	100,0	132,2	169,0

- Terceiro passo: *Construção do gráfico linear*

A partir dos dados da nova tabela faz-se o novo gráfico: *x versus t^2* . Seguindo as instruções para a construção de gráficos em papel milimetrado, dadas na seção III.3., você poderá traçar um gráfico como o que está representado na figura III.8, na próxima página.

- Quarto passo: *Cálculo do coeficiente angular da reta*

Observando a reta traçada no gráfico, encontramos os dois *pontos não experimentais*:

$$P_2 = (x'_2 , y'_2) = (t^2_2 , x_2) = (165,0 \text{ s}^2 ; 230,0 \text{ m})$$

$$P_1 = (x'_1 , v'_1) = (t^2_1 , x_1) = (85,0 \text{ s}^2 ; 130,0 \text{ m}) \text{ e}$$

$$a' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{(y'_2 - y'_1)}{(x'_2 - x'_1)} = \varepsilon = \frac{\Delta x}{\Delta(t^2)} = \frac{(x_2 - x_1)}{[(t^2)_2 - (t^2)_1]} = \frac{(230,0 - 130,0)\text{ m}}{(165,0 - 85,0)\text{ s}^2} = 1,25000 \text{ m/s}^2 = 1,25 \text{ m/s}^2$$

Concluímos que o coeficiente angular da reta é igual a 1,25 m/s^2, e tem a mesma unidade da grandeza física *aceleração*. Portanto, o valor da constante é: $\boldsymbol{\varepsilon = a' = 1,25 \text{ m/s}^2}$

- Quinto passo: *Cálculo do coeficiente linear da reta*

Observando novamente a reta traçada no gráfico, encontramos um terceiro *ponto não experimental*:

$$P_3 = (x'_3 , y'_3) = (t^2_3 , x_3) = (125,0 \text{ s}^2 ; 180,0 \text{ m})$$

$$b' = y'_3 - a'x'_3 = \gamma = x_3 - \varepsilon . t^2_3$$

$$b' = \gamma = (180,0 \text{ m}) - (1,25 \text{ m/s}^2).(125,0 \text{ s}^2) = 23,75000 \text{ m} = 23,8 \text{ m (calculado)}$$

Ou, observando a reta traçada, encontramos o ponto em que corta o eixo dos y' (em x' = 0), ou o eixo dos x (em $t^2 = 0$), isto é, $b' = x (t^2 = 0) = 24,0$ m (lido)

Concluímos que o coeficiente linear da reta pode ter qualquer um dos dois valores acima, e corresponde à grandeza física *posição inicial*, isto é, $x(t^2 = 0) = x_o$. Portanto, o valor da constante é:

$$\boldsymbol{\gamma = b' = 23,8 \text{ m (calculado)} \quad \text{ou} \quad \gamma = b' = 24,0 \text{ m (lido)}}$$

Em resumo, em um gráfico linear de *x versus t^2*, o coeficiente angular corresponde à aceleração, e o coeficiente linear corresponde à posição inicial. Para o caso do exemplo 17,

$$\boldsymbol{x(t) = \varepsilon t^2 + \gamma = (1,25 \text{ m/s}^2)\, t^2 + (24,0 \text{ m}) \qquad \text{sendo t em s.}}$$

Para determinar o valor da aceleração α, basta lembrar que, para esse tipo de movimento: $x(t) = x_o + v_o t + (1/2)\, \alpha t^2$. No caso, $v_o = 0$, e $(1/2)\,\alpha = \varepsilon$, logo, $\boldsymbol{\alpha = 2\varepsilon = 2,50 \text{ m/s}^2}$.

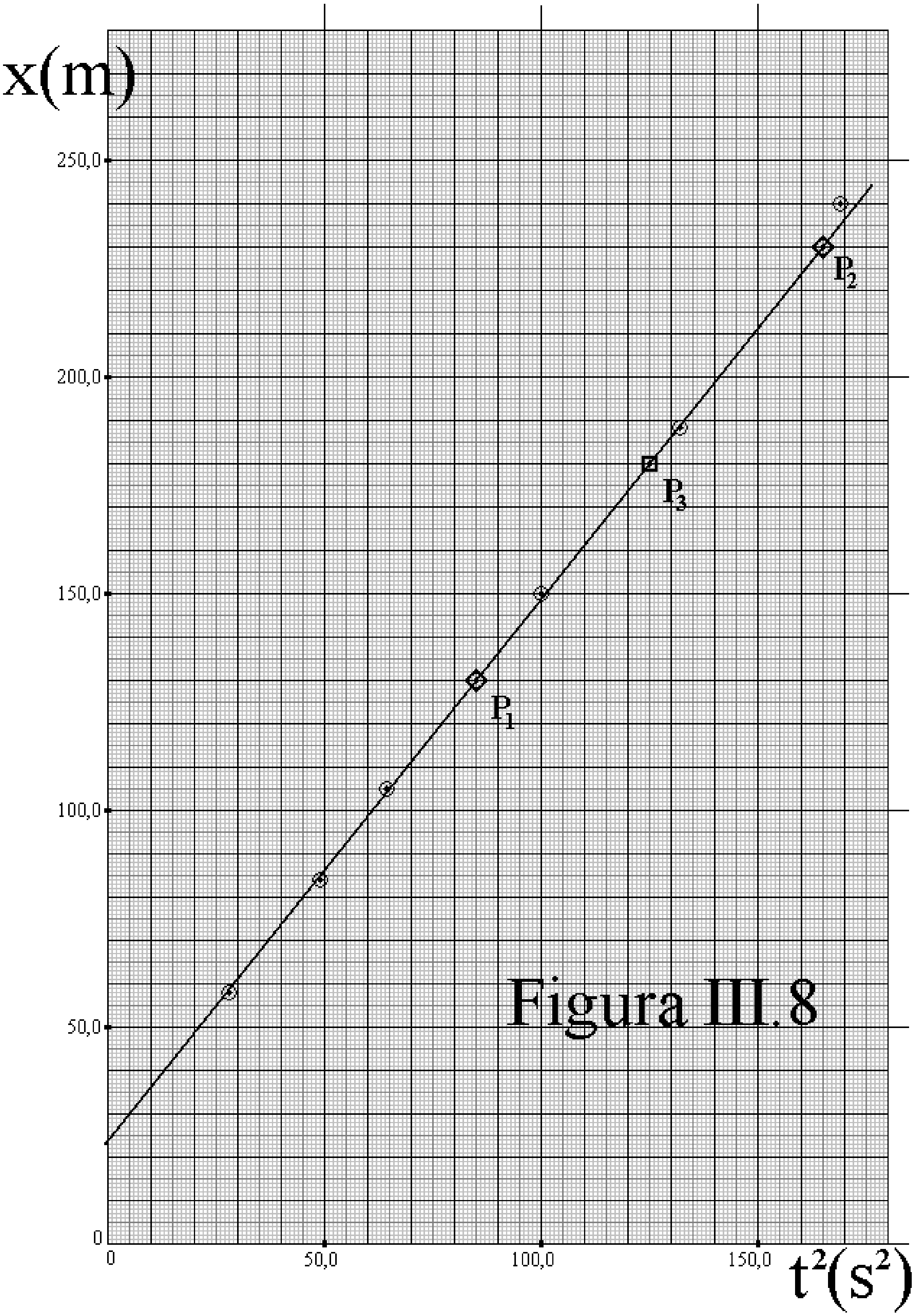


Figura III.8

III.5. Linearização em Papel com Escala Logarítmica

Até aqui aprendemos como:
1 – construir um gráfico qualquer em papel milimetrado;
2 – trabalhar com um gráfico linear, e calcular os coeficientes da reta;
3 – transformar o gráfico de uma curva que não é reta em um gráfico linear (linearização);
4 – calcular, a partir do gráfico linear, as constantes relacionadas com a curva não linear.

Em princípio, todas as curvas resultantes de medidas experimentais podem ser graficadas em uma folha de papel milimetrado. A técnica da linearização permite-nos calcular, a partir de um gráfico linearizado, as constantes que estão relacionadas com o comportamento das grandezas físicas medidas. Veja os exemplos abaixo.

Equação do fenômeno físico (C e D são constantes)	Gráfico não linear	Gráfico Linearizado (C = a' ; D = b')
$Y(X) = CX^2 + D$	Y versus X	Y versus X^2
$Y(X) = CX^{1/2} + D$	Y versus X	Y versus $X^{1/2}$
$Y(X) = CX^{-1} + D$	Y versus X	Y versus X^{-1}
$Y(X) = CX^3 + D$	Y versus X	Y versus X^3
$Y(X) = C\cos(X) + D$	Y versus X	Y versus cos(X)
$Y(X) = C\ln X + D$	Y versus X	Y versus lnX
$Y(X) = C\log X + D$	Y versus X	Y versus logX
$Y(X) = Ce^X + D$	Y versus X	Y versus e^X
$Y(X) = CX^n + D$ n = número qualquer	Y versus X	Y versus X^n

Entretanto, existem duas funções especiais que tem uma variação muito grande, e que aparecem freqüentemente na Física, são as funções logarítmicas. Para essas funções foi criado um tipo de papel que, em vez da escala linear milimetrada, tem uma escala logarítmica. Nesse tipo de papel, essas funções resultam diretamente em um gráfico linearizado, o que facilita a determinação das constantes desconhecidas.

III.5.a. Construção de Gráfico Linear em Papel Mono-Log

Vamos aprender a técnica de utilização do papel mono-log para determinar constantes desconhecidas através do seguinte exemplo.

<u>Exemplo 18</u>: Mediu-se a diferença de potencial nos terminais de um capacitor em processo de carga, como função do tempo, e os dados experimentais foram tabelados abaixo.

V (μVolt)	3,60	8,00	14,00	31,00	80,00	180,00	270,00
t (ms)	5,00	15,00	20,00	30,00	41,50	50,00	55,00

Sabendo que a equação que rege o fenômeno é do tipo: $\mathbf{V(t) = Ae^{Bt}}$, onde A e B são constantes, que devemos fazer para determiná-las a partir do gráfico?

O gráfico *V versus t* em papel milimetrado, como você pode verificar fazendo-o, fornece uma curva não linear. Portanto, devemos aplicar a técnica da linearização. Antes, porém, para podermos comparar a equação acima com a equação reduzida da reta, é necessário aplicar a função inversa da exponencial, que é o logaritmo natural ou neperiano, como segue:

$\ln [V(t)] = \ln [Ae^{Bt}] = \ln [A] + \ln[e^{Bt}] = \ln [A] + B.t.\ln[e] = \ln [A] + B.t.1 = \ln [A] + B.t$

Comparando com a equação reduzida da reta: $y'(x') = a'x' + b'$, temos

$$\ln [V(t)] = y'(x'); \qquad B = a'; \qquad t = x'; \qquad \ln [A] = b'$$

Sabemos que o gráfico " y'(x') versus x' " é uma reta, então, por analogia o gráfico em que a curva aparece linearizada (reta) é dado por " ln[V(t)] versus t ".

V(t) versus t ⇒ gráfico não linear

y'(x') versus x' ⇒ ln[V(t)] versus t ⇒ gráfico linear

Você pode verificar que esse gráfico é linearizado no papel milimetrado, construindo-o de acordo com os procedimentos descritos na seção III.3., anteriormente. Inclusive, você pode calcular as constantes A e B. Seguem algumas expressões que você vai desenvolver.

$$a' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{(y'_2 - y'_1)}{(x'_2 - x'_1)} = B = \frac{\Delta(\ln V)}{\Delta t} = \frac{(\ln V)_2 - (\ln V)_1}{(t_2 - t_1)}$$

$$b' = y'_3 - a'x'_3 = \ln[A] = (\ln V)_3 - B.t_3 \qquad \text{logo,} \qquad A = e^{b'}$$

É evidente que essa linearização é trabalhosa, pois é preciso calcular uma nova tabela para, a partir dela, construir o gráfico que fornece uma reta. Para evitar todo este trabalho existe o papel mono-log, que consiste de um papel quadriculado, onde

o eixo das abcissas tem uma escala linear, geralmente dividida em 120 unidades, e

o eixo das ordenadas tem uma escala logarítmica de base 10, dividida em décadas (cada década multiplica por 10 os valores da década anterior) .

Cada década do papel mono-log pode variar entre os múltiplos ou submúltiplos de 1 a 10. Entre o início de uma década e o de outra subseqüente, há uma diferença de um fator de dez. Isto significa que, se a primeira linha da primeira década vale 1 ($1\text{x}10^0$), a primeira linha da segunda década vale 10 ($1\text{x}10^1$), e a primeira linha da terceira década vale 100 ($1\text{x}10^2$). Isto significa também que, se a última linha da primeira década vale 10 ($1\text{x } 0^1$), a última linha da segunda década vale 100 ($1\text{x}10^2$), e a última linha da terceira década vale 1000 ($1\text{x}10^3$). Na figura III.9, a seguir, estão representadas somente duas décadas. Em geral o papel mono-log tem três décadas.

Sendo logarítmica a escala do eixo das ordenadas, nesse eixo estão representados diretamente, não os valores, mas sim os logaritmos desses valores. Não existe o valor zero no eixo logarítmico, uma vez que a função logaritmo não está definida para este ponto. A escala pode ser iniciada de um valor unitário qualquer em potência de dez, NUNCA DE ZERO. Pode iniciar em ... ; $1\text{x}10^{-4}$; 0,001 ; 0,01 ; 0,1 ; 1 ; 10 ; 100 ; 1000 ; $1\text{x}10^4$; ...

No exemplo 18, que estamos considerando, optamos pela utilização do papel mono-log, de modo que não é mais necessário calcular todos os logaritmos dos valores tabelados, como seria feito se fosse utilizado o papel milimetrado. Basta que se indique os pontos tabelados diretamente no gráfico *V(t) versus t* em papel mono-log, conforme é mostrado na figura III.10, em página mais à frente. O gráfico assim obtido no papel mono-log, será equivalente ao gráfico *lnV versus t* obtido no papel milimetrado.

Vejamos, então, como determinar as constantes A e B neste exemplo.

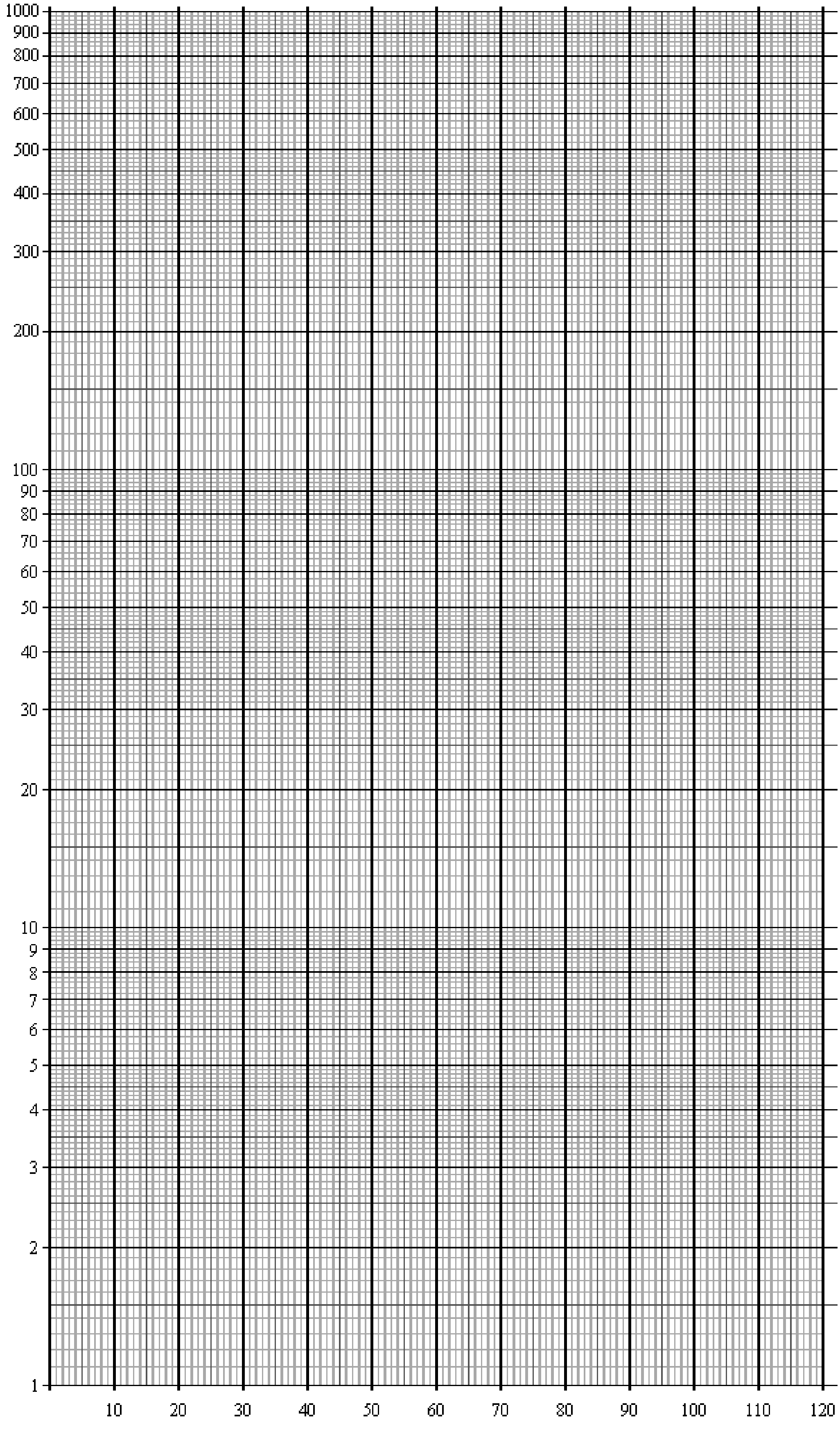


Figura III.9: Papel mono-log

O coeficiente angular da reta é dado por: $a' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{(y'_2 - y'_1)}{(x'_2 - x'_1)} = B = \frac{\Delta(\ln V)}{\Delta t}$.

Se for no papel milimetrado (gráfico *lnV versus t*), temos $B = \frac{\Delta(\ln V)}{\Delta t} = \frac{(\ln V)_2 - (\ln V)_1}{(t_2 - t_1)}$.

Porém, no papel mono-log A ESCALA DO EIXO DAS ORDENADAS É LOGARÍTMICA, então,

$$B = \frac{\Delta(\ln V)}{\Delta t} = \frac{\ln(V_2) - \ln(V_1)}{(t_2 - t_1)}.$$ ***Note bem a diferença, e anote!***

Quando se adota o papel milimetrado, um ponto da reta corresponde a $(x'_i , y'_i) = [t_1 , (\ln V)_1]$, e quando se adota o papel mono-log, ponto da reta corresponde a $(x'_i , y'_i) = [t_1 , \ln(V_1)]$.

Assim, escolhem-se dois pontos quaisquer da reta traçada em papel mono-log, indicando-os no gráfico (*não podem ser pontos experimentais!*):

$$P_2 = (x'_2 , y'_2) = (t_2 , \ln(V_2)) = (45{,}00 \times 10^{-3} \text{ s} ; \ln(110{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt}))$$

$$P_1 = (x'_1 , y'_1) = (t_1 , \ln(V_1)) = (25{,}00 \times 10^{-3} \text{ s} ; \ln(20{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt}))$$

Observe que os pontos foram lidos diretamente no gráfico. Logo,

$$B = \frac{\ln(V_2) - \ln(V_1)}{(t_2 - t_1)} = \frac{\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}{(t_2 - t_1)} = \frac{\ln\left(\frac{110{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt}}{20{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt}}\right)}{(45{,}00 - 25{,}00) \times 10^{-3} \text{s}} = \frac{1{,}70474809}{20{,}00 \times 10^{-3} \text{s}} = 85{,}2374046 \ s^{-1} = 85{,}24\, s^{-1}$$

A constante A, por sua vez, pode ser lida diretamente no gráfico, pois:

$$V(t) = A\, e^{Bt} \text{ , então, } \quad V(t{=}0) = A\, e^{B.0} = A \, . \, 1 = A \, .$$

Seu valor corresponde ao ponto onde a reta corta o eixo vertical em t = 0, ou seja, A é o valor de V para t = 0, V(t = 0) = A. No caso (exemplo 18),

$$A = 2{,}35 \ \mu\text{Volt} = 2{,}35 \times 10^{-6} \text{ Volt} \quad \text{(lido)}$$

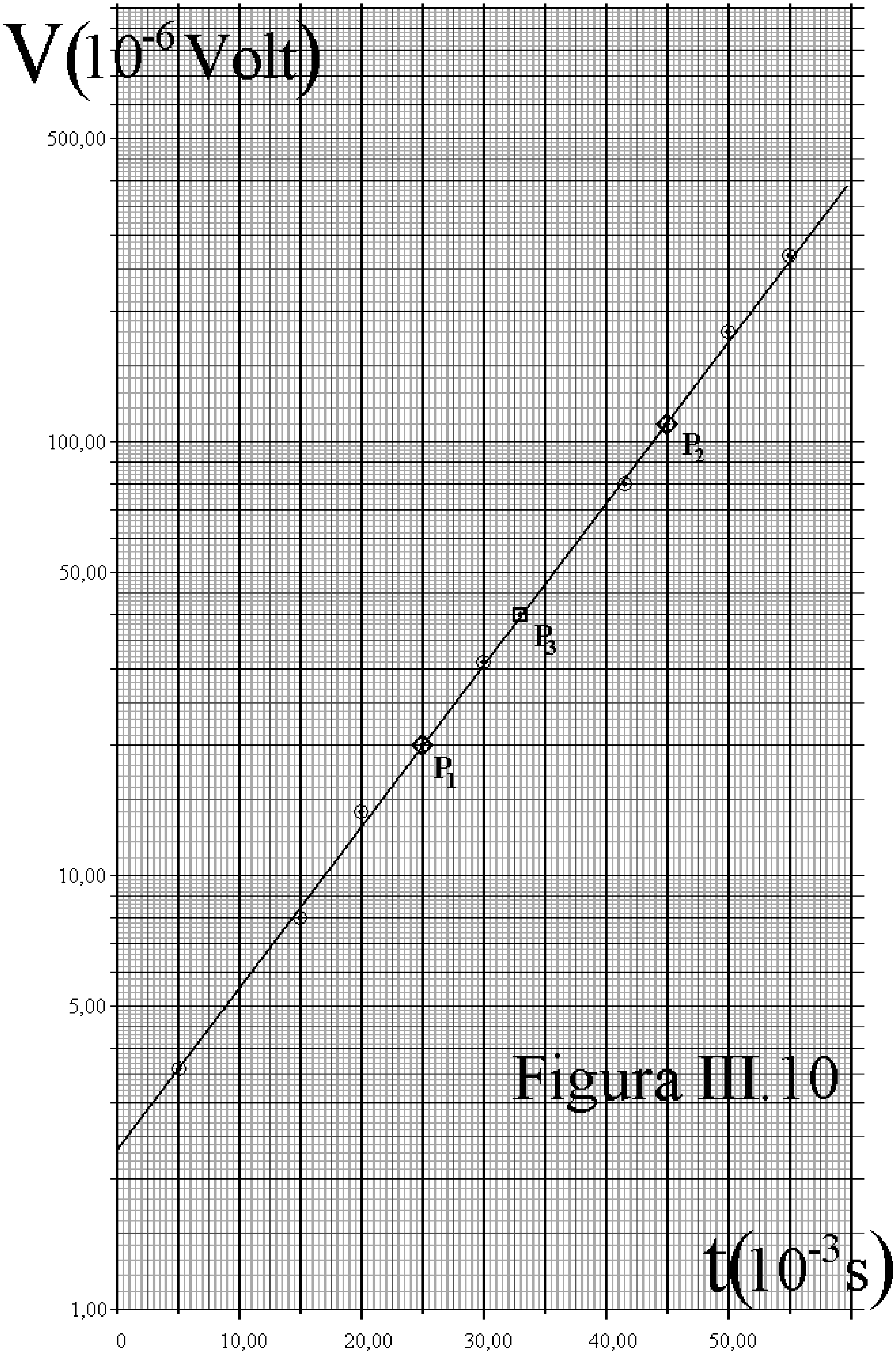
Quando não for possível determinar a constante A lendo diretamente no gráfico, deve-se escolher um *ponto não experimental* qualquer pertencente à reta, indicando-o no gráfico.

$$P_3 = (t_3 , V_3) = (33{,}00 \times 10^{-3} \text{ s} ; 40{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt})$$

E, uma vez determinada a constante B, pode-se calcular A diretamente da equação, isto é,

$$A = \frac{V(t_3)}{e^{Bt_3}} = \frac{V_3}{e^{Bt_3}} = \frac{40{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt}}{\exp[85{,}24 \text{ s}^{-1} . 33{,}00 \times 10^{-3} \text{ s}]} = \frac{40{,}00 \times 10^{-6} \text{ Volt}}{16{,}658490} = 2{,}4011780 \times 10^{-6} \text{ Volt}$$

$$A = 2{,}40 \times 10^{-6} \text{ Volt} = 2{,}40 \ \mu\text{Volt} \quad \text{(calculado)}$$


V(10^-6 Volt)
500,00
100,00
50,00
10,00
5,00
1,00
P1
P2
P3
Figura III.10
t(10^-3 s)
0
10,00
20,00
30,00
40,00
50,00

Os valores obtidos para as constantes A e B, a partir do gráfico (*V versus t*) em papel mono-log, devem concordar com aqueles obtidos através de gráfico (*lnV versus t*) em papel milimetrado.

Registre também, que o resultado, tanto da função logarítmica, quanto da função exponencial, é adimensional. Preste atenção a este fato, porque as unidades das constantes dependem disto. A unidade da constante dentro da exponencial (B no exemplo) é sempre a inversa da unidade de x', pois o argumento da função exponencial deve ser adimensional.

Em resumo, quando a equação de um fenômeno físico for do tipo: $y(x) = Ae^{Bx}$, o gráfico *y(x) versus x* em papel mono-log será uma reta, e as constantes A e B serão dadas por:

$$B = \frac{\Delta(\ln y)}{\Delta t} = \frac{\ln(y_2) - \ln(y_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{\ln\left(\frac{y_2}{y_1}\right)}{(x_2 - x_1)} \qquad \text{e}$$

$$A = \frac{y_3}{e^{Bx_3}} \quad \text{(calculado),} \qquad \text{ou lido no gráfico} \qquad A = y(x=0) \quad \text{(lido)}$$

III.5.b. Construção de Gráfico Linear em Papel Di-Log

Muitos fenômenos físicos são descritos por equações matemáticas do tipo: $\mathbf{y(x) = kx^n}$, onde k e n são constantes. Para linearizar esta equação, existem duas possibilidades:

1ª – <u>Se n for conhecido</u>, faz-se a comparação com a equação reduzida da reta e tem-se $x^n = x'$ e $y(x) = y'(x')$. O gráfico " y'(x') versus x' " (na verdade " y(x) versus x^n ") feito em papel milimetrado fornece uma reta. E então, basta calcular a constante k usando os procedimentos já conhecidos. No entanto, em geral, o valor de n é desconhecido;

2ª – <u>Se n for desconhecido</u>, usa-se o papel di-log para facilitar. Vamos aprender a técnica de utilização do papel di-log para determinar constantes desconhecidas através do seguinte exemplo.

<u>Exemplo 19</u>: Em um experimento realizado com uma lâmpada, mediu-se a corrente em função da tensão aplicada ao filamento incandescente, e foram obtidos os dados experimentais tabelados abaixo.

I (mA)	22,0	60,0	91,0	180,0	330,0	520,0
V (Volt)	0,600	2,500	4,000	11,500	26,000	49,000

Sabendo que a equação que rege o fenômeno é do tipo: $I(V) = CV^w$, onde C e w são constantes, o que devemos fazer para determiná-las a partir do gráfico?

O gráfico *I versus V* em papel milimetrado, como você pode verificar fazendo-o, fornece uma curva não linear. Portanto, devemos aplicar a técnica da linearização. Antes, porém, para podermos comparar a equação acima com a equação reduzida da reta, é necessário aplicar a função inversa da função de potência, que é o logaritmo (na base 10), como segue:

$$\log [I(V)] = \log [CV^w] = \log [C] + \log[V^w] = \log [C] + w.\log[V]$$

Comparando com a equação reduzida da reta: $y'(x') = a'x' + b'$, temos

$$\log [I(V)] = y'(x'); \qquad w = a'; \qquad \log[V]= x'; \qquad \log [C] = b'$$

Sabemos que o gráfico " y'(x') versus x' " é uma reta, então, por analogia, o gráfico em que a curva aparece linearizada (reta) é dado por " log[I(V)] versus log[V] ".

I(V) versus V ⇒ gráfico não linear

y'(x') versus x' ⇒ log[I(V)] versus log[V] ⇒ gráfico linear

Você pode verificar que esse gráfico é linearizado no papel milimetrado, construindo-o de acordo com os passos descritos na seção III.3., anteriormente. Inclusive, você pode calcular as constantes w e C. Seguem algumas expressões que você vai desenvolver.

$$a' = \frac{\Delta y'}{\Delta x'} = \frac{(y'_2 - y'_1)}{(x'_2 - x'_1)} = w = \frac{\Delta(\log I)}{\Delta(\log V)} = \frac{(\log I)_2 - (\log I)_1}{(\log V)_2 - (\log V)_1}$$

$$b' = y'_3 - a'x'_3 = \log[C] = (\log I)_3 - w.(\log V)_3 \qquad \text{logo,} \quad C = 10^{b'}$$

É evidente que essa linearização é trabalhosa, pois é preciso calcular uma nova tabela para, a partir dela, construir o gráfico que fornece uma reta. Para evitar todo este trabalho existe o papel di-log, que consiste de um papel quadriculado, onde ambos os eixos, **o eixo das abcissas** e **o eixo das ordenadas,** têm uma escala logarítmica de base 10, dividida em décadas (cada década multiplica por 10 os valores da década anterior).

Cada década do papel di-log pode variar entre os múltiplos ou submúltiplos de 1 a 10. Entre o início de uma década e o de outra subseqüente, há uma diferença de um fator de dez. Isto significa que, se a primeira linha da primeira década vale 1 ($1x10^0$), a primeira linha da segunda década vale 10 ($1x10^1$), e a primeira linha da terceira década vale 100 ($1x10^2$). Isto significa também que, se a última linha da primeira década vale 10 ($1x10^1$), a última linha da segunda década vale 100 ($1x10^2$), e a última linha da terceira década vale 1000 ($1x10^3$). Na figura III.11, a seguir, estão representadas somente duas décadas em cada eixo. Em geral o papel di-log tem duas décadas no eixo das ordenadas e três décadas no eixo das abcissas.

Sendo logarítmica a escala dos eixos, estão representados diretamente, não os valores, mas sim os logaritmos desses valores. Não existe o valor zero no eixo logarítmico, uma vez que a função logaritmo não é definida para este ponto. A escala pode ser iniciada de um valor qualquer em potência de dez, NUNCA DE ZERO. Pode iniciar em ... ; $1x10^{-4}$; 0,001 ; 0,01 ; 0,1 ; 1 ; 10 ; 100 ; 1000 ; $1x10^4$; ...

No exemplo 19, que estamos considerando, optamos pela utilização do papel di-log, não é mais necessário calcular todos os logaritmos dos valores tabelados, como seria feito se fosse utilizado o papel milimetrado. Basta que sejam indicados os pontos tabelados diretamente no gráfico *I(V) versus V* em papel di-log, conforme é mostrado na figura III.12, na próxima página. O gráfico assim obtido no papel di-log, será equivalente ao gráfico *logI versus logV* obtido no papel milimetrado.

Vejamos, então, como determinar as constantes C e w neste exemplo.

O coeficiente angular da reta é dado por: $a' = \dfrac{\Delta y'}{\Delta x'} = \dfrac{(y'_2 - y'_1)}{(x'_2 - x'_1)} = w = \dfrac{\Delta(\log I)}{\Delta(\log V)}$.

Se for no papel milimetrado (gráfico *logI versus logV*), temos $w = \dfrac{\Delta(\log I)}{\Delta(\log V)} = \dfrac{(\log I)_2 - (\log I)_1}{(\log V)_2 - (\log V)_1}$.

Porém, no papel di-log AS ESCALAS DOS EIXOS SÃO LOGARÍTMICAS., então,

$$w = \frac{\Delta(\log I)}{\Delta(\log V)} = \frac{\log(I_2) - \log(I_1)}{\log(V_2) - \log(V_1)} .$$

Note bem a diferença, e anote!

Quando se adota o papel milimetrado, um ponto da reta corresponde a
$(x'_i , y'_i) = [(\log V)_i , (\log I)_i]$, e quando se adota o papel di-log, um ponto da reta corresponde a
$(x'_i , y'_i) = [\log(V_i), \log(I_i)]$.

papel milimetrado $\Rightarrow$ $\mathbf{(x'_i , y'_i) = [(\log V)_i , (\log I)_i]}$

papel di-log $\Rightarrow$ $\mathbf{(x'_i , y'_i) = [\log(V_i), \log(I_i)]}$.

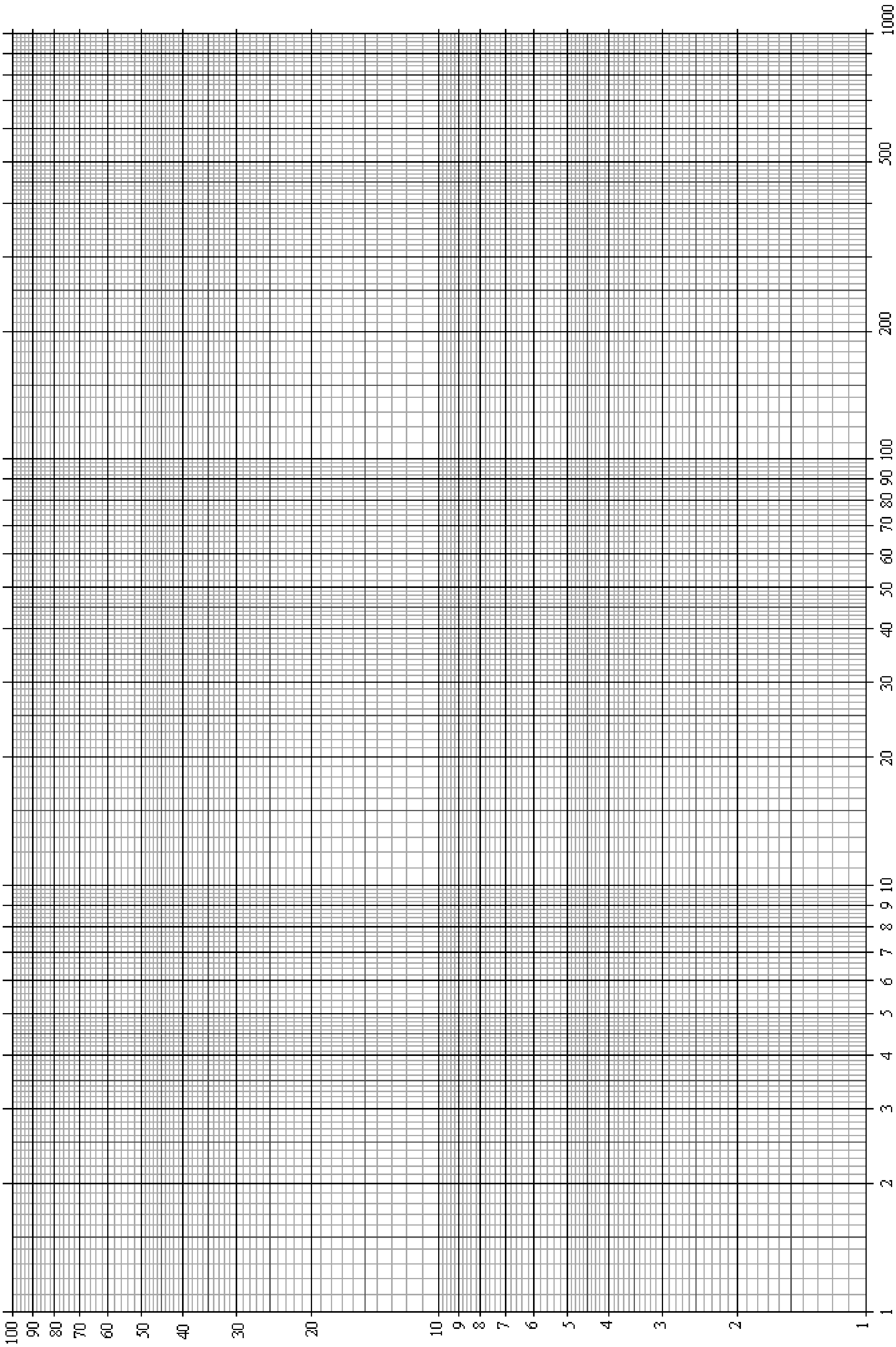


Figura III.11: Papel di-log

Assim, escolhem-se dois pontos quaisquer da reta traçada em papel di-log, indicando-os no gráfico (*não podem ser pontos experimentais!*):

$$P_2 = (x'_2 , y'_2) = (\log(V_2) , \log(I_2)) = (\log(20{,}000 \text{ Volt}) ; \log(280{,}0 \times 10^{-3} \text{ A}))$$

$$P_1 = (x'_1 , y'_1) = (\log(V_1) , \log(I_1)) = (\log(1{,}000 \text{ Volt}) ; \log(30{,}0 \times 10^{-3} \text{ A}))$$

Observe que os pontos foram lidos diretamente no gráfico. Logo,

$$w = \frac{\Delta(\log I)}{\Delta(\log V)} = \frac{\log(I_2) - \log(I_1)}{\log(V_2) - \log(V_1)} = \frac{\log\left(\frac{I_2}{I_1}\right)}{\log\left(\frac{V_2}{V_1}\right)} == \frac{\log\left(\frac{280{,}0 \times 10^{-3} \text{ A}}{30{,}0 \times 10^{-3} \text{ A}}\right)}{\log\left(\frac{20{,}000 \text{ Volt}}{1{,}000 \text{ Volt}}\right)} =$$

$$w = \frac{0{,}97003678}{1{,}3010300} = 0{,}74559140 = 0{,}746$$

Observe que o resultado da função logarítmica é adimensional, portanto, w é um número puro. Como era de se esperar, pois w é um expoente.

A constante C, por sua vez, pode ser lida diretamente no gráfico, pois:

$$I(V) = C\, V^w \text{ , então, } I(V = 1) = C.1^w = C.1 = C$$

Seu valor corresponde ao ponto onde a reta corta a linha vertical que passa em V = 1, ou seja, C é o valor de I para V = 1, $I(V = 1) = C$. No caso (exemplo 19),

$$C = 30{,}0 \text{ mA.Volt}^{-0{,}746} \quad \text{(lido)}$$

Coincidentemente, este é o ponto P_1 , o qual escolhemos para calcular o coeficiente angular.

Quando não for possível determinar a constante C lendo diretamente no gráfico, deve-se escolher um *ponto não experimental* qualquer pertencente à reta, indicando-o no gráfico.

$$P_3 = (V_3 , I_3) = (5{,}000 \text{ Volt} ; 100{,}0 \times 10^{-3} \text{ A})$$

E, uma vez determinada a constante w, pode-se calcular C diretamente da equação, isto é,

$$C = \frac{I_3}{V_3^w} = \frac{100{,}0 \text{ mA}}{[5{,}000 \text{ Volt}]^{0{,}746}} = 30{,}1001304 \text{ mA Volt}^{-0{,}746} = 30{,}1 \text{ mA Volt}^{-0{,}746}$$

$$C = 30{,}1 \text{ mA Volt}^{-0{,}746} \quad \text{(calculado)}$$

Os valores obtidos para as constantes C e w, a partir do gráfico (*I versus V*) em papel di-log, devem concordar com aqueles obtidos através de gráfico (*logI versus logV*) em papel milimetrado.

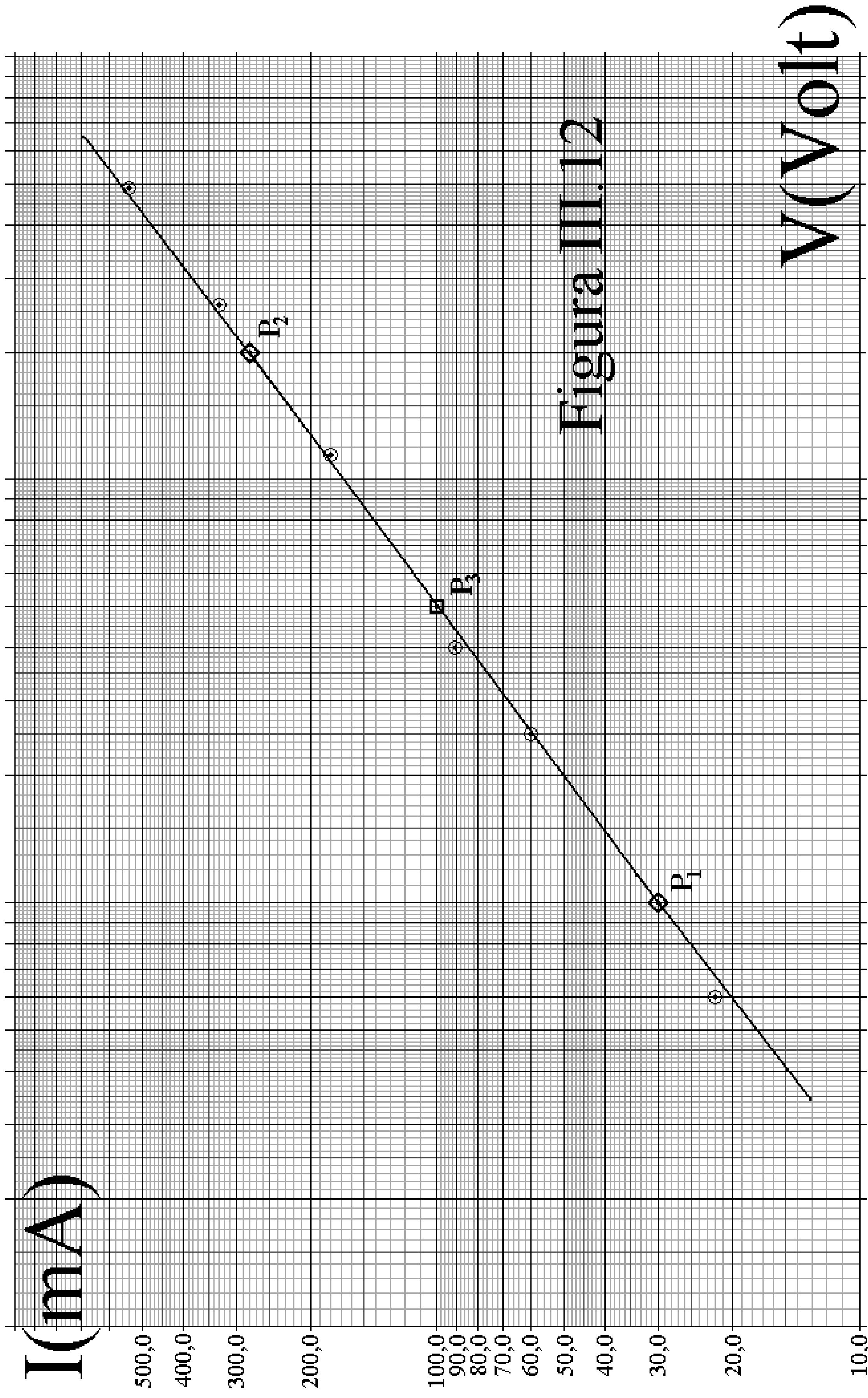


Figura III.12
I(mA)
V(Volt)
500,0
400,0
300,0
200,0
100,0
90,0
80,0
70,0
60,0
50,0
40,0
30,0
20,0
10,0
0,100
0,500
1,000
5,000
10,000
50,000
P_1
P_2
P_3

Em resumo, quando a equação de um fenômeno físico for do tipo: $\mathbf{y(x) = kx^n}$, o gráfico *y(x) versus x* em papel di-log será uma reta, e as constantes k e n serão dadas por:

$$n = \frac{\Delta(\log y)}{\Delta(\log x)} = \frac{\log(y_2) - \log(y_1)}{\log(x_2) - \log(x_1)}$$

e, $k = \dfrac{y_3}{(x_3)^n}$ (calculado), ou lido no gráfico $k = y(x = 1)$ (lido)

É interessante, ainda, chamar sua especial atenção para a unidade, no caso desse tipo de função, veja:

$\mathbf{y(x) = kx^n}$, então, $[y] = [k].[x]^n$ e, portanto, a unidade de k é dada por:

$$[k] = [y].[x]^{-n}$$

E X E R C Í C I O S   I V

Faça os exercícios abaixo seguindo as regras para a construção de gráficos. Respeite as operações com algarismos significativos e os critérios de arredondamento. Apresente os resultados com a unidade adequada.

1) Num experimento sobre MRUV, um grupo de alunos obteve os seguintes dados:

x (m)	8,0	61,0	200,0	317,0	402,0
t (s)	2,0	8,0	15,0	18,0	20,0

(a) Faça o gráfico "x(t) versus t" em papel milimetrado. Observe o tipo de curva obtida.
(b) Faça a curva " x(t) versus t^2 " para linearizá-lo.
(c) Determine os coeficientes angular e linear da reta obtida.
(d) Escreva a equação para x(t), ajustada aos coeficientes calculados.

2) Os dados abaixo tabelados estão relacionados por uma equação do tipo: $y(x) = ax^n$

y (litro)	3,21	5,31	8,23	15,00	26,10	53,80
x (h)	1,69	4,93	10,97	28,47	88,83	288,00

(a) Faça um gráfico "y(x) versus x" em papel milimetrado. Observe que a curva obtida não é linear.
(b) Para linearizá-la, faça o gráfico "log(y) versus log(x)" em papel milimetrado.
(c) Determine os coeficientes angular e linear da reta obtida.
(d) Faça o gráfico "y(x) versus x" em papel di-log.
(e) Determine os coeficientes angular e linear da reta obtida.
(f) Compare os resultados obtidos para as constantes a e n, nos dois tipos de papéis.

3) Os dados tabelados estão relacionados por uma equação do tipo: $y(x) = ae^{bx}$.

y (mC)	2410	826	419	348	104	22
x (s)	1,37	3,39	4,57	4,71	7,02	9,48

(a) Trace um gráfico "y(x) versus x" em papel milimetrado. Note que não é linear.
(b) Para linearizá-la, faça o gráfico "ln(y) versus x" em papel milimetrado.
(c) Determine os coeficientes angular e linear da reta obtida.
(d) Faça o gráfico "y(x) versus x" em papel mono-log.
(e) Determine os coeficientes angular e linear da reta obtida.
(f) Compare os resultados obtidos para as constantes a e b, nos dois tipos de papéis.

4) Um dos métodos para medir a constante elástica de uma mola é o Método Dinâmico, que consiste em colocar massas diferentes na extremidade de uma mola e fazê-la oscilar, medindo, para cada massa diferente, o período de oscilação. A equação que relaciona as duas variáveis (período T e massa m) é $T = 2\pi(m/k)^{1/2}$, onde k é a constante elástica. Os valores tabelados abaixo foram obtidos experimentalmente,

T (s)	0,703	1,062	1,251	1,472	1,640
m (kg)	0,050	0,100	0,150	0,200	0,250

Determine, a partir de um gráfico linear em papel milimetrado a constante elástica da mola.

5) Em um experimento em que o vapor de água tem a sua pressão medida para várias temperaturas, foram obtidos os seguintes resultados:

P (mm-Hg)	2,149	4,579	14,532	50,218	149,381	355,239
T (K)	263,2	273,1	293,2	313,1	333,1	353,2

Sabe-se que $P(T) = P_0 e^{-\lambda/RT}$, onde R = 8,314, J/mol.K. Escolhendo o papel adequado, faça um gráfico em que a curva seja linear, e a partir dele, calcule P_0 e λ, com suas respectivas unidades.

6) Em um experimento para determinar a taxa por unidade de tempo e por unidade de área, com que a energia de uma onda eletromagnética flui, foram colhidos os dados:

$S(W/m^2)$	18,00	35,00	65,00	110,00	150,00
E(V/m)	80,0	120,0	160,0	200,0	240,0

Sabendo-se que $S(E) = AE^B$, escolha o papel adequado para a linearização, e a partir do gráfico, determine as constantes A e B, com suas respectivas unidades.