Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Departamento de Física
Grupo de Teoria da Matéria Condensada

UMA INTRODUÇÃO A SÉRIES DE TAYLOR E SÉRIES DE FOURIER

GIOVANI PERUZZO

Fevereiro de 2013

- Sequências
- Séries
- Convergência de Uma Série Infinita
- Testes de Convergência
- Séries de Potência
- Raio de Convergência
- Intervalo de Convergência
- Séries de Taylor
- Desigualdade de Taylor
- Séries Trigonométricas
- Séries de Fourier

Sequência

- Definição:

Uma função {a}: N $\longrightarrow$ R é chamada sequência de números reais.

Ex.: A sequência harmônica $\{a_i\} = \frac{1}{i}$

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a_3 = \frac{1}{3}, a_4 = \frac{1}{4}, a_5 = \frac{1}{5}, \ldots$$

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots\right\}$$

Séries

- Definição:

Uma série S_n é a soma dos n termos de uma sequência real a_i .

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

EXEMPLO 1

A série com quatro termos

$$S_5 = \sum_{i=1}^{5} \frac{1}{i}$$

-

$$S_5 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} = \frac{137}{60} \cong 2{,}283.$$

Se a soma for sobre infinitos termos de uma sequência real, a série S é chamada série infinita.

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{+\infty} a_i$$

Convergência de Uma Série Infinita

- A série infinita pode ser definida como:

$$S \equiv \lim_{n \to \infty} S_n$$

Se esse limite existir, ou seja, se S for um número real, então a série dita é convergente, caso contrário, é dita divergente.

Testes de Convergência

Com a ajuda de alguns testes e teoremas podemos verificar a convergência ou não de uma série infinita. Dentre esses testes temos:

- Teste de comparação;
- Teste da integral;
- Teste da série alternada;
- Teste da razão;
- Etc...

- EXEMPLO 2 (Série Geométrica)

Se $|x| < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} bx^n = \frac{b}{(1-x)}$$

Se $|x| \geq 1$, a série é divergente.

Séries de Potência

- Uma **série de potências** é uma série da forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots$$

onde x é uma variável e c_n's são os coeficientes da série.

Raio de Convergência

- Teorema 1

Para uma série de potência

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \,,$$

existem apenas três possibilidades:

(i) A série converge apenas quando $x = a$.

(ii) A série converge para todo x.

(iii) Existe um número real positivo R tal que a série converge se $|x-a| < R$ e diverge se $|x-a| > R$.

O número R no caso é chamado raio de convergência.

Intervalo de Convergência

- O intervalo de convergência de uma série de potências é aquele que consiste em todos os valores de x para os quais a série converge.

EXEMPLO 3

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^n}{n}$$

R=1 , $x \in [2,4)$

Representação de Funções como Séries de Potência

- A série de potência é uma função f cujo domínio é o intervalo de convergência I.

$$Dom(f) = I$$

$$f: I \to R$$

- É possível representar uma função g, qualquer, através de f?

Isso já foi feito no Exemplo 2, onde

$$g(x) = \frac{b}{(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} bx^n$$

para $|x| < 1$.

Derivação e Integração de Séries de Potência

- Teorema 2

Se a série de potências $\sum c_n(x-a)^n$ tiver um raio de convergência R > 0, então a função f definida por

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

É diferenciável (e portanto contínua) no intervalo $(a-R, a+R)$ e ...

-

$$(i) \qquad f^{(i)} = \sum_{n=i}^{\infty} \frac{n!}{(n-i)!} c_n (x-a)^{n-i}$$

$$(ii) \qquad \int f(x)dx = C + c_0(x-a) + c_1(x-a) + c_2(x-a) + \cdots$$

$$= C + \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{(x-a)^{n+1}}{n+1}$$

Os raios de convergência das séries de potências nas Equações (i) e (ii) são ambos R.

Séries de Taylor

- Teorema 3

Se f tiver uma representação (expansão) em série de potência em a, isto é, se

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n (x-a)^n \qquad |x-a| < R$$

então, seu coeficientes são dados pela equação

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

- De outra forma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

$$= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

A série acima é chamada **série de Taylor** da função f em torno de a. Para o caso particular, onde $a = 0$, a série é chamada de **série de Maclaurin**.

- Quando uma função é igual à soma de sua série de Taylor?

Tomando a soma parcial

$$T_n(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}}{i!}(x-a)^i$$

onde T_n é chamado polinômio de Taylor de grau n de f em a.

- Espera-se que, e existe um teorema que diz isso,

$$\lim_{n\to\infty} T_n = f(x)$$

e

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0$$

onde R_n é chamado de resto da série de Taylor e é definido como

$$R_n = f(x) - T_n$$

Desigualdade de Taylor

- Se $\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M$ para $|x-a| \leq d$, então o resto R_n da série de Taylor satisfaz a desigualdade

$$|R_n(x)| \leq \frac{M}{(n+1)!}|x-a|^{n+1} \text{ para } |x-a| \leq d$$

- EXEMPLO 4 Série de Taylor de $f(x) = \cos x$

$$f(x) = cos\ x \qquad f(0) = 1$$

$$f'(x) = -sen\ x \qquad f'(0) = 0$$

$$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$$

$$f'''(x) = sen\ x \qquad f'''(0) = 0$$

$$f^{(4)}(x) = \cos x \qquad f^{(4)}(0) = 1$$

Assim, para todo x,

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

- EXEMPLOS 5

a) $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad R = \infty$

b) $e^{-x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^n}{n!} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} \ldots \quad R = \infty$

$$\int e^{-x^2} dx = \int (1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} + \frac{x^6}{3!} \ldots) dx$$

$$= C + x - \frac{x^3}{3 \cdot 1!} + \frac{x^5}{5 \cdot 2!} - \frac{x^7}{7 \cdot 3!} + \cdots$$

$$+ (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

- c)

$$\int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \cdots$$

$$\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} \approx 0{,}7475$$

d)

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1 - x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\left(1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) - 1 - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!}}{x^2} = \frac{1}{2}$$

- A medida que $n \to \infty$ o gráfico de T_n fica mais "parecido" com o da f. A figura abaixo mostra isso:

- Definição:

Uma função {a}: N R
reais.

Ex.: A sequência harmô

$$a_1 = 1, a_2 = \frac{1}{2}, a$$

O gráfico de f é o que está em verde.

Séries Trigonométricas

- Uma série de senos e cossenos do tipo

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n sen\,(nx)]$$

, onde a_ne b_n são coeficientes, é chamada série trigonométrica.

- A série trigonométrica é uma função f que depende de x. Então, é possível que f represente uma função qualquer g?

  A resposta para essa pergunta é: apenas funções periódicas, com período 2π ou um período menor T, mas 2π tem que ser um múltiplo inteiro de T.

  Há mais alguma diferença entre a série de Taylor e a série trigonométrica?

Séries de Fourier

- Se a série trigonométrica representa uma função g no intervalo $-\pi \leq x \leq \pi$, ou seja, ela converge para esse intervalo, então, ela convergirá para todo os valores de x.

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nx) + b_n sen\,(nx)]$$

Séries de Fourier

- Multiplicando a série trigonométrica por $\cos(mx)$, onde m é um número inteiro, obtemos

$$g(x)\cos(mx) = \frac{a_0}{2}\cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n\cos(nx)\cos(mx) + b_n sen\,(nx)\cos(mx)]$$

A série, por ser convergente, pode ser integrada termo a termo, assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(mx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}\frac{a_0}{2}\cos(mx)dx$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}[a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,dx + b_n\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx]$$

- Pelas *propriedades de ortogonalidade* dos senos e cossenos:

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)\cos(mx)\,dx = 0 \qquad \mathrm{n, m} > 0$

(ii) $\int_{-\pi}^{\pi} cos(nx)\cos(mx)\,dx = \begin{cases} 0 & se\; n \neq m \\ \pi & se\; n = m \end{cases}$

(iii) $\int_{-\pi}^{\pi} sen(nx)sen(mx)dx = \begin{cases} 0 & se\; n \neq m \\ \pi & se\; n = m \end{cases}$

- Através dessas propriedades, é possível determinar a_ne b_n.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)\cos(nx)dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)sen(nx)dx$$

- A série trigonométrica construída a partir desses coeficientes é conhecida como a **série de Fourier**.

Para o caso mais geral, onde o período é menor do que T, temos:

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[a_n \cos(\frac{2\pi n}{T}x) + b_n sen\,(\frac{2\pi n}{T}x)]$$

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\,dx$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\cos(\frac{2\pi n}{T}x)\,dx$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{-T/2}^{T/2} g(x)\,sen\left(\frac{2\pi n}{T}x\right)dx$$

- EXEMPLO 6 A série de Fourier para

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ (x < 0) \\ +1 \ (x \geq 0) \end{cases}$$

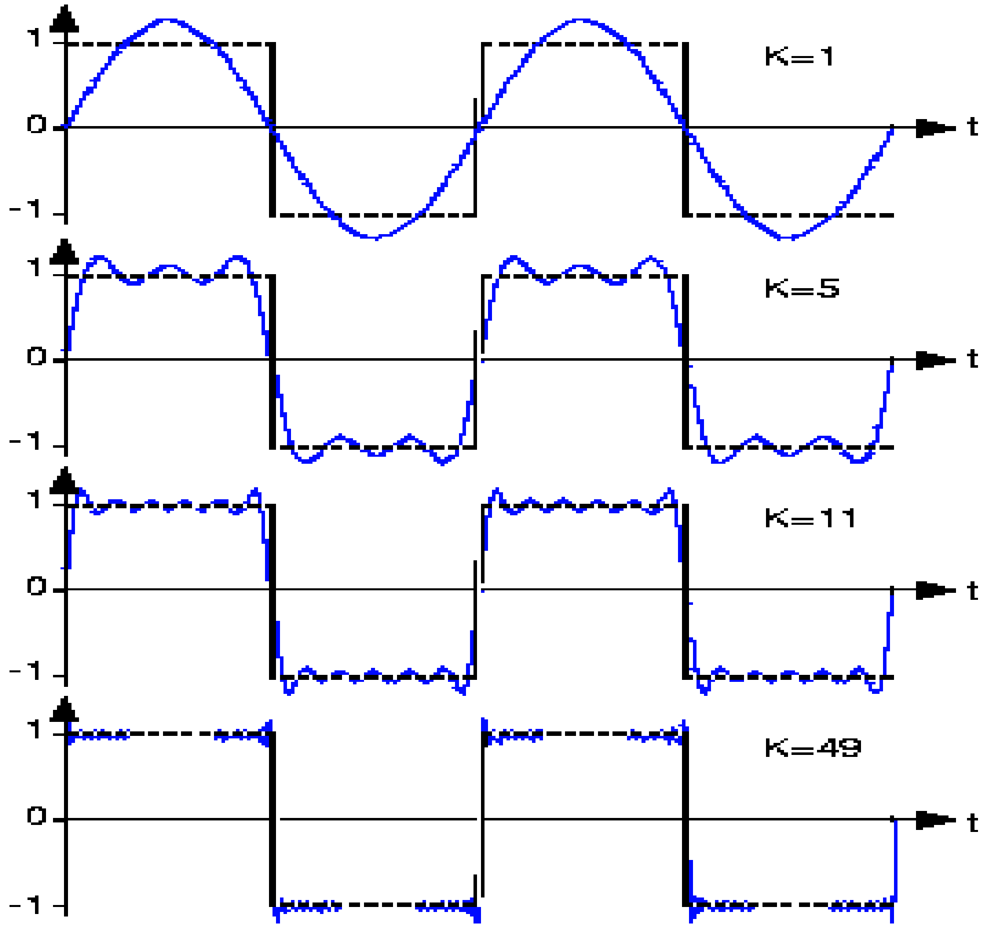
com

$$a_0 = 0, a_n = 0, b_n = \frac{4}{n\pi} \ (n = ímpar)$$

será

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=ímpar}^{\infty} \frac{1}{n} sen(nx)$$

Gráfico de g(x):



Propriedade de Paridade

- (i) Se $g(x)$ for uma função par, todos os coeficientes b_n devem anular-se. E os coeficientes a_n são obtidos simplesmente pela integração de $0 \ a \ T/2$.

  (ii) Se $g(x)$ for uma função ímpar, todos os coeficientes a_n devem anular-se. E os coeficientes b_n são obtidos pela integração de $0 \ a \ T/2$.

Forma complexa das Séries de Fourier

- A série de Fourier

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(\frac{\pi n}{L} x) + b_n sen\, (\frac{\pi n}{L} x)]$$

pode ser escrita sob forma complexa, fazendo as seguintes substituições:

$$\cos\frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2}(e^{i(n\pi x/L)} + e^{-i(n\pi x/L)})$$

$$\operatorname{sen}\frac{n\pi}{L} x = \frac{1}{2i}(e^{i(n\pi x/L)} - e^{-i(n\pi x/L)})$$

- Daí,

$$g(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i(n\pi x/L)} \qquad -L \leq x \leq L$$

onde

$$c_n = (1/2L) \int_{-L}^{L} f(x) e^{-i(n\pi x/L)} dx$$

- EXEMPLO 7 A série de Fourier na forma complexa para

$$f(x) = \begin{cases} -1 \ (x < 0) \\ +1 \ (x \geq 0) \end{cases}$$

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} dx = \frac{1}{2},$$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} e^{-inx}\, dx = \frac{1 - e^{-in\pi}}{2\pi n i} = \begin{cases} 0 & (n = par\ ) \\ \dfrac{1}{\pi n i} & (n = ímpar) \end{cases}$$

Portanto,

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi i}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{n} e^{inx} \quad (n = ímpar)$$

Bibliografia

- BOAS, Mary L.. Mathematical Methods In The Physical Sciences. Wiley: 1961.
- BUTKOV, Engene. Física Matemática.
- STEWART, James. Antonio Carlos Moretti. Cálculo, volume2. São Paulo: Cengage Learning, 2012.