Universidade Federal de Santa Maria
Centro de Ciências Naturais e Exatas
Grupo de Teoria da Matéria Condensada

Laboratório de Teoria
da Matéria Condensada

O Método SOR

Aplicações do método de Sobre-Relaxação Sucessiva em sistemas de equações lineares

Mateus Schmidt

Santa Maria - RS, 2012

Sumário

- O Método do Ponto Fixo;
- Métodos Iterativos para sistemas de equações lineares ;
- Métodos de Gauss-Seidel e Gauss-Jacobi;
- O Método SOR;
- Conclusões;
- Referências Bibliográficas;

Método do Ponto Fixo

O Método do Ponto Fixo é utilizado para encontrar a(s) raiz(es) de $f(x)$, ou seja, sua aplicação permite encontrar um valor para x tal que $f(x) = 0$.

A técnica parte do princípio de que é possível estabelecer uma relação $x = g(x)$, tal que o valor de x seja o mesmo para $f(x) = 0$.

Método do Ponto Fixo

A Teoria de Campo Médio (TCM), aplicada ao Modelo de Ising, apresenta a seguinte equação para a magnetização (m) em função da temperatura (T):

$$m = tanh(\frac{zm}{T})$$

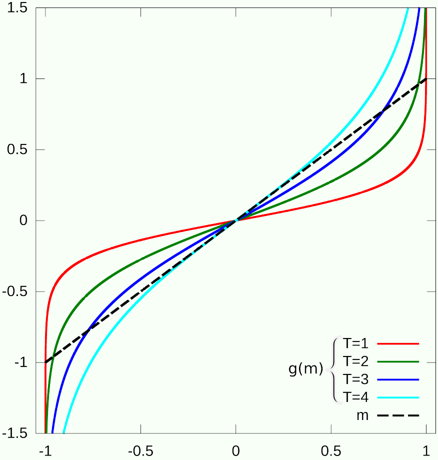
Para a rede quadrada $z = 4$, então o problema passa a ser encontrar o valor adequado de m para cada T:

$$m = tanh(\frac{4m}{T})$$

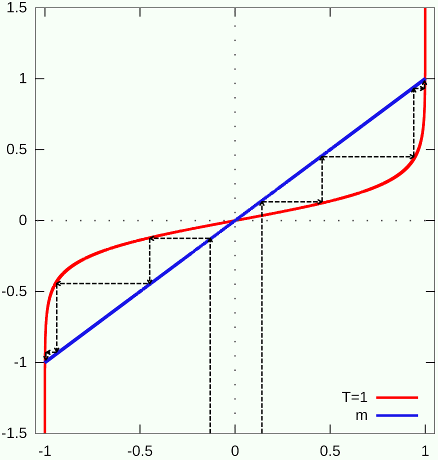
onde

$$g(m) = tanh(\frac{4m}{T})$$

Método do Ponto Fixo



Comportamento de m e da função g(m)



Funcionamento do Método do Ponto Fixo

O mesmo princípio do Método do Ponto Fixo também é útil para encontrar a solução de sistemas de equações lineares, onde

$$\vec{A}\vec{x} = \vec{B}$$

Tal implementação torna necessário encontrar uma relação para cada uma das componentes de $\vec{x}$, de modo que $\vec{x} = \vec{G}\vec{x}$.

No Método de Gauss-Jacobi cada iteração utiliza o valor de $\vec{x}$ da iteração anterior. Sua relação de recorrência é dada por

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

No Método de Gauss-Seidel cada iteração utiliza o valor mais atual de $\vec{x}$. Sua relação de recorrência é dada por

$$x_i^{(k)} = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k-1)} \right]$$

Método SOR

O Método de Sobre-Relaxação Sucessiva (Successive Over-Relaxation - SOR) é um melhoramento do método de Gauss-Seidel para a solução de sistemas de equações lineares. A relação de recorrência do método é

$$x_i^{(k)} = (1-\omega)x_i^{(k-1)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(k)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(k-1)}\right]$$

Onde o termo ω pode acelerar a convergência para a solução do sistema.

Método SOR

Existem três teoremas que ajudam a determinar qual valor de ω permite obter uma convergência ótima do sistema.

Teorema 1 - Se $a_{ii} \neq 0$ para todos os valores de i, então $\rho(T_\omega) \geq |\omega - 1|$. Isso implica que o Método SOR somente converge para $0 < \omega < 2$.

Teorema 2 - Se A é uma matriz positiva definida e $0 < \omega < 2$, então o Método SOR converge para qualquer aproximação inicial de x_i.

Teorema 3 - Se A é uma matriz positiva definida e tridiagonal, então $\rho(T_g) = [\rho(T_j)]^2 < 1$ e a opção ótima para ω é dada por $\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}}$.

Vamos analisar o seguinte sistema de equações:

$$9x_1 + 4x_2 = 20$$

$$4x_1 + 9x_2 - x_3 = 12$$

$$-x_2 + 9x_3 = 51$$

Que pode ser expresso na forma matricial

$$\begin{pmatrix} 9 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -1 \\ 0 & -1 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 12 \\ 51 \end{pmatrix}$$

Devemos obter $\rho(T_j)$ para obter ω. Então calculamos $T_j = D^{-1}(L+U)$

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \left(\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right)$$

$$T_j = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & 0 & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos obter então $\rho(T_j)$ através do $det(T_j - \lambda I) = 0$

$$det(T_j - \lambda I)_j = det \begin{pmatrix} -\lambda & -\frac{4}{9} & 0 \\ -\frac{4}{9} & -\lambda & \frac{1}{9} \\ 0 & \frac{1}{9} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + \frac{17}{81}\lambda = -\lambda(\lambda^2 - \frac{17}{81}) = 0$$

Temos $\rho(T_j) = \sqrt{\frac{17}{81}}$, que pode ser aplicado diretamente na equação

$$\omega = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}} = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\sqrt{\frac{17}{81}}]^2}} = 1.058823529.$$

Método SOR

A relação de recorrência deste sistema é:

$$x_1^{(k)} = (1-\omega)x_1^{(k-1)} + \frac{\omega}{9}\left(20 - 4x_2^{(k-1)}\right)$$

$$x_2^{(k)} = (1-\omega)x_2^{(k-1)} + \frac{\omega}{9}\left(12 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}\right)$$

$$x_3^{(k)} = (1-\omega)x_3^{(k-1)} + \frac{\omega}{9}\left(51 + x_2^{(k)}\right)$$

Utilizando $\omega = 1.058823529$ teremos a seguinte relação de recorrência

$$x_1^{(k)} = (0.058823529)x_1^{(k-1)} + \frac{1.058823529}{9}\left(20 - 4x_2^{(k-1)}\right)$$

$$x_2^{(k)} = (0.058823529)x_2^{(k-1)} + \frac{1.058823529}{9}\left(12 - 4x_1^{(k)} + x_3^{(k-1)}\right)$$

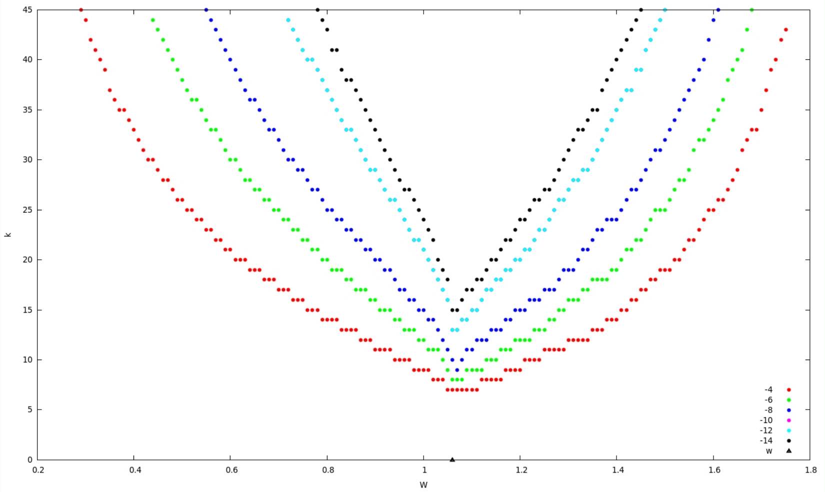
$$x_3^{(k)} = (0.058823529)x_3^{(k-1)} + \frac{1.058823529}{9}\left(51 + x_2^{(k)}\right)$$

Método SOR

Para uma tolerância de 10^{-10} foram obtidos os seguintes resultados:

Método	SOR	Gauss-Seidel	Gauss-Jacobi
Iterações	12	18	31

Método SOR



Número de iterações k para valores do parâmetro ω em diferentes ordens de grandeza da tolerância.

Conclusões

O método SOR é excelente para acelerar a convergência da solução de sistemas de equações lineares.
Porém, a determinação de ω é difícil, pois os teoremas existentes são aplicáveis a um grupo específico de sistemas de equações.
Sendo assim, a aplicação do método ainda é limitada.

Referências Bibliográficas

BURDEN, R. L. & FAIRES, J. D. Análise Numérica. São Paulo: Thomson Pioneira, 2003.