JORNAL UμA TEMÁTICA, EDIÇÃO 25, ANO 10, 2018

Uμa temática

EDITORIAL

Ravine Taís Wenningkamp
Viviane Lopes Garcia

Por que ler?

♦ Café com Matemático: Edição 25 anos do PET

Neste artigo, o petiano Guilherme conta como foi realizada a sexta edição do Café com Matemático, em setembro de 2017. Leia e fique informado sobre este evento promovido pelo PET Matemática! Quem sabe na próxima você não participa também?

Veja também:

- A irracionalidade do número e
- A função das imagens nos livros didáticos de matemática
- Códigos matemáticos
- A matemática por trás do algoritmo de criptografia RSA
- A evolução da calculadora
- Funções para modelar variações
- Coincidência ou matemática?
- Direitos ou “privilégios”?
- Álgebra linear e suas aplicações
- O mistério da Torre de Pisa

Por que ler?

♦Nem brincadeira, tampouco drama. Depressão é doença!

A petiana Silvianne traz uma abordagem sobre a depressão, doença que tem afetado uma grande parte da população mundial. Citando sintomas e tratamento, o artigo tem finalidade de expor o quanto a doença é perigosa e como podemos agir para ajudar as vítimas.

PET matemáticaufsm

Café com Matemático: edição 25 anos do PET

Guilherme Schimanko de Godoy, *UFSM*.

O Café com Matemático é uma atividade desenvolvida pelo PET Matemática, que até a presente edição, restringia-se aos membros do Grupo. Diferente das outras edições, das quais convidávamos um único profissional da área da matemática, nesta edição, convidamos os tutores egressos do PET Matemática da UFSM, pois no corrente ano da realização da atividade, o Programa completou 25 anos de existência na referida instituição.

Em geral, os profissionais convidados para o Café realizam suas falas em uma língua estrangeira (geralmente a inglesa). Contribuindo de certa forma para a formação dos petianos. No entanto, por se tratar de uma edição especial, isto não aconteceu. Esta edição fez parte de uma série de propostas em comemoração aos 25 anos do PET, dentre elas, destacamos o Evento dos 25 Anos dos Grupos PET da UFSM, realizado em conjunto com outros gupos da IES.

No encontro, realizado no dia 23 de setembro de 2017, estiveram presentes os professores Antônio Carlos Lyrio Bidel e João Paulo Lukazczyk, ainda, por videoconferência, conversamos com a professora Maria de Lourdes Merlini Giuliani.

Conforme pode-se encontrar em PET Matemática (2018), destacamos no quadro abaixo uma relação dos tutores egressos do PET Matemática com seus respectivos períodos de tutoria.

Tutores Egressos do PET Matemática

Tutores	**Período**
Antonio Carlos Lyrio Bidel	2005–2015
Osmar Franscisco Giuliani	2002–2005
João Paulo Lukazczyk	2000–2002
João Carlos Gilli Martins	1994–1999
Maria de Lourdes Merlini Giuliani	1992–1994

Fonte: Produzido pelo autor.

Em um primeiro momento, os convidados foram questionados quanto a motivação para com a tutoria do grupo. Ainda, neste sentido, relataram algumas informações referentes a sua trajetória acadêmica.

A professora Maria de Lourdes, graduou-se em Matemática Licenciatura, pela UNESP de São José do Rio Preto. Posterior a isso, ingressou no mestrado em Matemática na UFRJ. Em seguida, começou a lecionar na UFSM. Motivada pelo professor Irineu Magnago (professor aposentado do Departamento de Matemática), submeteu o projeto para criação do grupo em 1992. Dada a aprovação do projeto, assumiu a tutoria no período de 1992 à 1994. Atualmente, atua como professora na UFABC.

O professor João Paulo, foi o terceiro tutor do Grupo. Natural de Canoas, graduou-se em Matemática Licenciatura aqui na UFSM, no ano de 1985. Em 1992, João Paulo ingressou como docente da UFSM, posterior ao término do mestrado na UNB. Foi no ano de 2000 que assumiu a tutoria do PET. Nesta época o projeto beirava a extinção em âmbito nacional.

Resultado de um acordo com a Coordenação do Curso de Matemática, o professor Bidel assumiu a tutoria do PET em 2005. Bidel graduou-se também na UFSM, no ano de 1987. Posterior a graduação, lecionou no ensino básico em Santa Catarina. Ingressou como docente da UFSM em 1992, mas logo afastou-se para concluir o mestrado que havia começado na UFRGS.

Concluídas as preliminares de apresentação, foi dado destaque as atividades desenvolvidas pelo PET em cada período desde sua criação. Mediante a transição do PET como Programa Especial de Treinamento para Programa de Educação Tutorial, ocorreu uma readaptação no que tange as atividades desenvolvidas. Ao que se entende, nos primórdios do programa, a finalidade do projeto era unicamente desenvolver trabalhos de iniciação científica. Enquanto que atualmente, o PET se estrutura pela integração entre ensino, pesquisa e extensão.

Esta edição do Café foi de grande aprendizagem (figura 1), uma vez que, se pode fazer um apanhado histórico acerca do Grupo na UFSM. Por outro lado, ficou claro o quanto o programa é importante para a formação de cada petiano e o quanto é relevante a filosofia do projeto no que se refere aos pilares ensino, pesquisa e extensão.

Figura 1. VI Edição do Café com Matemático

Fonte: PET Matemática (2018)

Referência:

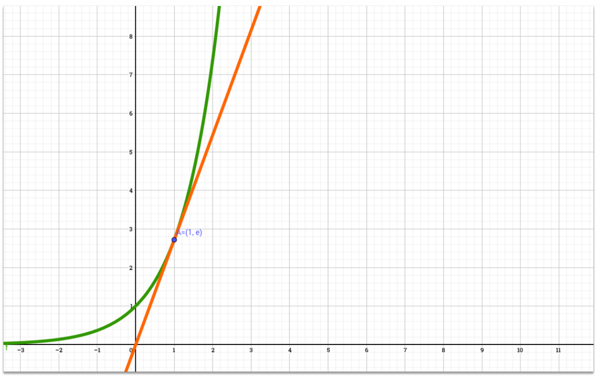
[1] UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA MARIA. **PET Matemática**. Santa Maria, 2018. Disponível em: www.ufsm.br/petmatematica. Acesso em: 21 maio 2018.

A irracionalidade do número *e*

Carolina Dalmolin Ruviaro, *UFSM*.

LEONHARD Euler $(1707-1783)$ nasceu em Basileia, na Suíça. Foi orientado por Johann Bernoulli e tornou-se um dos grandes matemáticos do século XVIII (D'AMBROSIO, 2009). É em sua homenagem que se denomina o número *e*, cuja representação geométrica (figura 1) é a inclinação da reta tangente da função $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa $x = 1$, isto é, $\left.\dfrac{de^x}{dx}\right|_{x=1}$.

Figura 1. Gráfico da função $f(x) = e^x$ e da reta tangente à função no ponto $A = (1, e)$



Fonte: o autor (2018)

Podemos também defini-lo como $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

Ou ainda, fazendo uso da representação da série de Taylor gerada pela função $f(x) = e^x$ em torno do ponto $x = 0$,

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(0)x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = x + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + ... + \frac{x^n}{n!},$$

podemos expressá-lo da seguinte maneira:

$$e = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ...$$

Agora, queremos provar a irracionalidade desse curioso número. Para isso, suponha inicialmente que e seja um número racional $\frac{p}{q}$, em que $p, q \in \mathbb{N}$ e sejam primos entre si. Sendo assim, a partir da definição de *e* acima, temos que

$$\frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right) = \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!}.$$

Faremos uma estimativa desse somatório:

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{(q+1)!} + \frac{1}{(q+2)!} + \frac{1}{(q+3)!} + ...$$

$$= \frac{1}{q!(q+1)} + \frac{1}{q!(q+1)(q+2)} + \frac{1}{q!(q+1)(q+2)(q+3)} + ...$$

$$= \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + ...\right).$$

Assim, podemos relacionar

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + ...\right)$$

$$< \frac{1}{q!}\left(\frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)^2} + \frac{1}{(q+1)^3} + ...\right) = \frac{1}{q!} \sum_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^r}.$$

Conseguimos encontrar, em nossa estimativa, a série geométrica $\sum\limits_{r=1}^{\infty} \frac{1}{(q+1)^r}$ de razão $\dfrac{1}{q+1}$, a qual converge, como sabemos, se $\left|\dfrac{1}{q+1}\right| < 1$ e converge para $\dfrac{1}{q}$. Portanto,

$$\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{1}{k!} < \frac{1}{q!}\frac{1}{q} \Rightarrow 0 < \frac{p}{q} - \left(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + ... + \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q!}\frac{1}{q}$$

e então

$$0 < q!\left(\frac{p}{q} - 1 - \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} - ... - \frac{1}{q!}\right) < \frac{1}{q}.$$

Observando o que acabamos de deduzir, vemos que o termo do meio é inteiro, pois o fator $q!$ cancela todos os denominadores das frações presentes. Porém, isso é impossível, pois a fração $\frac{1}{q} \leq 1$ e isso faria com que o termo analisado fosse um *inteiro* pertencente ao intervalo $(0, 1)$. O absurdo provém do fato de supormos *e* um número racional.

Conclusão: O número *e* é irracional.

O artigo acima foi baseado nas seguintes referências: D'Ambrosio (2009) e Figueiredo (2002).

Referências:

[1] D'AMBROSIO, U.. **Euler, um Matemático Multifacetado**. Revista Brasileira de História da Matemática, v. 9, p. 13-31, 2009. Disponível em: https://bit.ly/2MxjysT. Acesso em: maio 2018;

[2] FIGUEIREDO, D. de. **Números Irracionais e Transcendentes**. 3ª ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2002.

A função das imagens nos livros didáticos de matemática

Carmen Vieira Mathias, *UFSM*.

COMO professores e ou futuros professores, é importante pensar na escolha do livro didático a ser adotado. Em particular, participei de uma experiência interessante ao que se refere a esse tema. Isso ocorreu no segundo semestre do ano de 2017, onde houve a oportunidade de ministrar, em conjunto com duas colegas da Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), uma disciplina para o curso de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional da Universidade Federal de Santa Maria (PROFMAT/UFSM), denominada Tópicos de Matemática.

O objetivo das aulas foi desenvolver a habilidade de analisar criticamente livros escolares para o ensino básico, bem como criar atividades alternativas àquelas apresentadas nos materiais analisados. A referida cadeira seguiu os moldes da disciplina Análise e Desenvolvimento de Material Didático Escolar, ministrada no curso de Mestrado em Ensino de Matemática da UFRGS, conforme consta em (UFRGS, 2018).

Entre outros tópicos relacionados no programa, um dos temas abordados foi a análise das imagens presentes no material didático, cujo referencial foi Dalcin (2002). Nesse trabalho, a autora classificou as imagens encontradas em livros paradidáticos de Matemática em quatro categorias, a saber: Imbricadas, Visualização, Contextualização e Ornamentais.

Segundo Dalcin (2002), as imagens imbricadas são aquelas que estão totalmente articuladas ao texto escrito e com a simbologia matemática, de modo que a ausência de tal imagem tornaria o todo do texto inteligível, como ilustra a figura 1.

Fig. 1. Ilustração imbricada

Fonte: Dalcin (2002).

A mesma autora categoriza ilustrações como sendo visualização sendo as que articulam o texto escrito e a simbologia matemática, de modo a um elemento complementar o outro. Segundo Dalcin (2002), é comum a simbologia matemática aparecer inserida na imagem. Esse tipo de ilustração valoriza a relação entre imagem e Matemática. Aparece, por exemplo, quando se pretende mostrar o "passo a passo" um procedimento geométrico, quando uma situação problema é anunciada e a ilustração pretende complementar informações ou organizar o pensamento para a resolução do problema.

As imagens categorizadas por Dalcin (2002) como de contextualização, seriam aquelas que estariam de alguma forma, articuladas diretamente ao texto escrito, complementando-o por meio do apelo à imaginação e à capacidade de interpretação do leitor. A figura 2 ilustra um exemplo de uma imagem nessa categoria.

Fig. 2. Ilustração de Contextualização

Fonte: Dalcin (2002).

A última categoria apresentada por Dalcin (2002) são as ilustrações ornamentais, que não apresentam vínculo algum, seja com a simbologia matemática ou com o texto escrito, exercendo apenas a função de "quebra de ritmo de leitura", sem influência na aprendizagem do conteúdo matemático em questão, como ilustra a figura 3.

Fig. 3. Ilustração Ornamental

Fonte: Dalcin (2002).

Em geral, ao analisar criticamente os livros didáticos, não nos preocupamos com as imagens, qual a sua função, se existe a necessidade daquela ou de outra imagem se fazer presente em determinado momento. Como educadores, é importante refletir sobre isso, principalmente quando as ilustrações podem ferir ou chamar a atenção à aspectos políticos e ou sociais.

Esses termos são apontados por Rodrigues e Dalcin (2014). Nesse trabalho as autoras chamam a atenção sobre tais aspectos embutidos nas imagens, classificando-as em ilustrações que valorizam a prática de consumo, politicamente corretas preconceituosas e que valorizam o patrimônio cultural. Como exemplo são elencadas figuras que tratam da diversidade, de questões de gênero, crenças inadequadas, entre outros.

Particularmente, antes de trabalhar esses tópicos, nunca tinha refletido sobre esses aspectos. E você?

Referências:

[1] DALCIN, A. et al. **Um olhar sobre o paradidático de Matemática**. Campinas: UNICAMP, 2002.

[2] RODRIGUES, A. C.T., DALCIN, A.. "O que as imagens dos livros didáticos de matemática nos dizem sobre multiculturalismo?." Educação Matemática Pesquisa 16.2, 2014.

[3] UFRGS, Plano de Ensino. 2018. Disponível em: https://goo.gl/Div9Fc. Acesso em: maio 2018.

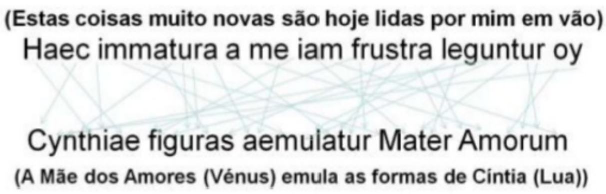
Códigos

Luiza Santos Morin, *UFSM*.

A busca pela proteção de segredos originou a criação de diferentes códigos, dentre os quais se destacam os anagramas e a criptografia, que tem seu primeiro registro em torno de 1900 a.C., no Egito (ROSA, 2015). Criptografia do grego significa (krypt'nos, oculto + graphein, escrita) escrita oculta, utilizada na troca de mensagens, a fim de escondê-las. Já os anagramas são substantivos que significam que uma palavra ou frase é construída por meio da alteração das posições das letras, sendo que esse jogo de palavras formam um código. Antigamente, os anagramas eram um meio que os cientistas usavam para assegurar suas descobertas, evitando essas virem a público.

Por exemplo, o anagrama de Galileu (1564-1642), físico, matemático e astrônomo, nascido na Itália, que foi o primeiro homem a usar um telescópio para ver os céus e, por conta disso descobriu que o planeta Vênus, assim como a lua, passa por fases. Sabendo que tinha feito uma extraordinária descoberta, ao querer revelá-la à Kepler, utilizou um anagrama (figura 1), demonstrando assim, em uma frase, sua grande descoberta. A descoberta foi feita no ano de 1610, juntamente com outras descobertas de Galileu.

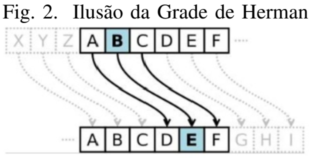
Fig. 1. Anagrama de Galileu



Fonte: Rosa (2015).

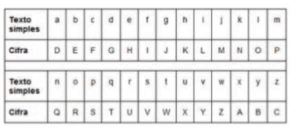
O imperador Júlio César utilizou uma técnica de codificação para comunicar-se com seus generais sem que os exércitos inimigos conseguissem entender. Essa técnica ficou conhecida como Cifra de César e baseava-se em cada letra do texto ser substituída, com uma sequência fixa de três posições, como ilustra a figura 2, tendo seu alfabeto ilustrado na figura 3. Não se tem conhecimento da efetividade da Cifra de César naquela época, contudo, já que os inimigos do exército romano em sua grande maioria eram analfabetos, poderiam pensar que eram línguas estrangeiras desconhecidas.

Fig. 2. Ilusão da Grade de Herman



Fonte: Rosa (2015).

Fig. 3. Triângulo de Penrose

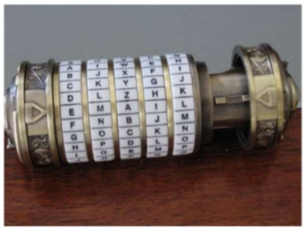


Texto simples	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m
Cifra	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
Texto simples	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z
Cifra	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z	A	B	C

Fonte: Rosa (2015).

Um dispositivo de código é Criptex, composto de cinco anéis colocados em certa posição permitindo a colocação e retirada de um papiro de seu interior. Mas, ao forçá-lo para abrir sem alinhar os anéis de maneira correta, um vidro de vinagre é quebrado e o papiro dissolve-se (figura 4).

Fig. 4. Criptex



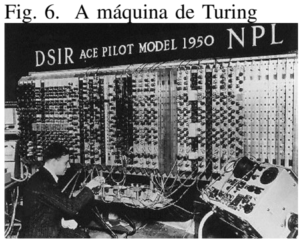
Fonte: Rosa (2015).

No século XX, como a criação das máquinas produtoras de códigos combinatórios, equipadas com rotores criptográficos, como a máquina Enigma (figura 5) criada pelos alemães, durante a segunda guerra mundial, para a comunicação. A presença dessa tecnologia de criptografia foi fator determinante para a dinâmica da guerra. Somente anos mais tarde como o primeiro "computador" do mundo (figura 6), criado pelo Alan Turing o chamado "pai da computação", que foi possível a decifração dos códigos da Enigma, e assim possibilitando o fim da guerra (FERNANDES, 2018).

Fig. 5. Máquina enigma

Fonte: Fernandes (2018).

Fig. 6. A máquina de Turing



Fonte: Rosa (2015).

Conforme Rosa (2015), tem-se que a criptografia possui várias ramificações e cada uma delas teve uma importante contribuição para a humanidade, pois, se não fosse Galileu Galilei o primeiro homem a querer esconder e proteger suas descobertas, talvez o mundo todo hoje não teria como esconder nem mesmo sua vida na internet ou sua conta do banco, afinal, a senha de um banco é um exemplo de codificação. Anagramas, cifras, criptex, enigmas, e diversos outros tipos de codificação foram evoluindo com o tempo e cada vez mais se tornando "seguros".

Referência:

[1] FERNANDES, Cláudio. "Máquina Enigma"; Brasil Escola. Disponível em: https://brasilescola.uol.com.br/historiag/maquina-enigma.htm. Acesso em: maio 2018;

[2] ROSA, A. de P.. Escondendo Segredos: Criando Códigos. Disponível em: https://pt.slideshare.net/andressarosa161/criptografias-e-anagramas. Acesso em: jul. 2017.

A matemática por trás do algoritmo de criptografia RSA

Viviane Lopes Garcia, *UFSM*.

A Criptografia é um ramo da matemática que compreende o estudo dos princípios e técnicas pelas quais a informação é transformada em códigos. Muito utilizada na internet, faz-se necessária pois, devido ao grande tráfego de informações e dados na rede, é inevitável a exigência de uma maior segurança no que diz respeito ao sigilo dessas informações. Grande parte do avanço da criptografia deve-se a matemática, que estuda e traça estratégias para tornar as codificações mais difíceis de serem decifradas, impedindo que crackers[1] tenham acesso a informações sigilosas para uso indevido.

Um dos algoritmos de criptografia mais conhecido e utilizado atualmente é o RSA, que deve o nome aos seus criadores: Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman, professores do Instituto de Tecnologia de Massachusetts e fundadores da atual empresa RSA Data Security. Fundamenta-se em teorias clássicas dos números e é considerado um dos mais seguros, sendo quase impossível quebrá-lo.

Neste algoritmo temos duas chaves: uma pública e uma privada. Na maioria das vezes, a chave pública é de livre acesso. Por meio de seu uso que serão criptografadas novas mensagens. Entretanto, só é possível descriptografar tal mensagem utilizando a chave privada, geralmente mantida em segredo. O RSA utiliza, por exemplo, o Teorema Fundamental da Aritmética. Este diz que todo número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto de forma única em um produto de números primos, por exemplo:

$$21 = 3.7$$
$$33 = 3.11.$$

A fatoração não é algo complicado, entretanto, para números grandes é algo complexo e demanda muito tempo. Decorre deste fato, a segurança que o RSA possui, visto que na criptografia avançada são escolhidos números com demasiada quantidade de dígitos. Todavia, engana-se quem acredita que é impossível descobrir a chave privada do RSA. Na verdade não é impossível, mas para isto seria necessário muito tempo, o que torna a ideia inviável.

Para a criação do algoritmo RSA são utilizadas muitas teorias e assuntos relacionados à matemática. Segue uma demonstração, listada em passos, para a criptografia de uma mensagem:

1º ***Definir valores para os caracteres***

Neste passo, será utilizado um quadro que atribuirá a cada letra um número diferente. Esse quadro pode ser criado pelo autor da mensagem ou, em casos mais avançados, podem ser utilizados quadros mais complexos.

[1]Indivíduos que utilizam seu conhecimento na área de informática para a quebra de códigos de segurança, senhas e códigos de programas com fins criminosos.

Fig. 1. Quadro que será utilizada em nosso exemplo

A	1	N	14
B	2	O	15
C	3	P	16
D	4	Q	17
E	5	R	18
F	6	S	19
G	7	T	20
H	8	U	21
I	9	V	22
J	10	W	23
K	11	X	24
L	12	Y	25
M	13	Z	26

Fonte: O autor (2018).

2º ***A escolha dos números primos***

Podem ser escolhidos quaisquer números primos. Para nosso exemplo, serão utilizados os números *p=3* e *q=11*. Depois de escolhidos os dois números primos, definiremos um número *n* que, neste caso, corresponde a:

$$n = p.q$$
$$n = 11.3$$
$$n = 33.$$

3º ***A função totiente de Euler***

É utilizada para calcular a quantidade de co-primos de um número que são menores que ele. Para números formados por dois fatores primos, a função fica da seguinte forma:

$$\varphi(x) = (p-1).(q-1).$$

Em nosso caso, queremos calcular a função totiente de 33, por isso, temos:

$$\varphi(33) = (3-1).(11-1)$$
$$\varphi(33) = 20.$$

4º ***Calculando a chave pública***

Devemos escolher um número k tal que $1 < k < \varphi(n)$, de forma que k seja co-primo de $\varphi(n)$. Em outras palavras, queremos k onde o MDC entre $\varphi(n)$ e k seja 1. Para encontrar esse número podemos ir testando para quaisquer números. Por exemplo, o número 3 atende aos requisitos, ou seja:

MDC (20,3) = 1

A chave pública pode ser definida como *(n, k)*, logo a chave pública = (33, 3).

5º ***Criptografando a mensagem***

Com a chave pública em mãos, é bem simples cifrar uma mensagem. Podemos criptografar cada letra utilizando:

$$c = m^k.mod n \text{ , onde}$$

c é a letra criptografada e corresponde ao valor do resto da divisão entre m^k e $mod n$; ***k*** vale 3, conforme supomos, e ***m*** é o valor numérico da letra de acordo com a figura 1.

Por exemplo: vamos criptografar a palavra MATEMÁTICA:

- Para a letra M:

$$\begin{array}{r|l} 2197 & 33 \\ \cline{2-2} -\ 2178 & 66 \\ \hline \color{red}{19} & \end{array}$$

$$c = 13^3.mod33$$
$$c = 2197.mod33$$
$$c = 19.$$

- Para a letra A:

$$c = 1^3.mod33$$
$$c = 1.mod33$$
$$c = 1.$$

- Para a letra T:

$$c = 20^3.mod33$$
$$c = 8000.mod33$$
$$c = 14.$$

- Para a letra E:

$$c = 5^3.mod33$$
$$c = 125.mod33$$
$$c = 26.$$

- Para a letra I:

$$c = 9^3.mod33$$
$$c = 729.mod33$$
$$c = 3.$$

- Para a letra C:

$$c = 3^3.mod33$$
$$c = 27.mod33$$
$$c = 27.$$

Com todas as letras necessárias criptografadas, podemos montar nossa mensagem. A palavra matemática, de acordo com nosso método de criptografia, fica na forma:

19 1 14 26 19 1 14 3 27 1

Como descriptografar uma mensagem?

Para descriptografar uma mensagem, precisamos ter acesso à chave privada do método utilizado. Precisaremos calcular um número ***d***, tal que:

$$k.d = mod((p-1)(q-1))$$

Utilizando o valor de ***k***, conforme havíamos encontrado anteriormente, teremos:

$$3.d = mod20.$$

Precisamos encontrar um número d que, quando multiplicado por 3 e dividido por 20, resulte em resto 1. O número 7, por exemplo, atende aos critérios, pois:

$$3.7 = mod20$$
$$21 = mod20$$
$$21 \div 20 \text{ tem resto } 1$$

Agora, usaremos a seguinte forma para descriptografar uma mensagem:

$$c^d = m.mod(n).$$

Substituindo as informações que já temos:

$$c^7 = m.mod33.$$

- Descriptografando a letra *E*:

$$26^7 = m.mod33$$
$$8031810176 = m.mod33$$
$$8031810176 \div 33$$

o resto desta divisão é 5, número correspondente a letra *E* na figura 1.

⋆ ***Desafio!***

Agora que já sabemos criptografar e descriptografar uma mensagem, utilize as mesmas fórmulas e métodos para tentar descriptografar a seguinte palavra:

27 1 18 26 14 26 3 24 1

Conseguiu? Com tudo o que vimos aqui, você percebeu como a criptografia é importante para a segurança de seus dados na internet, em transições bancárias, etc? Com ela podemos nos certificar que nossos dados estão sendo transferidos em segurança e que somente pessoas autorizadas terão acesso a eles. O método apresentado aqui foi somente um de milhares que existem e que estão por trás de toda a tecnologia que utilizamos.

Referências:

[1] COUTINHO, S.C.. Números Inteiros e Criptografia RSA. Disponível em: https://bit.ly/2JQf3Yy. Acesso em: abr. 2018;

[2] LAMBDA3, Entendendo (de verdade) a criptografia RSA. Disponível em: https://bit.ly/2jox1WN. Acesso em: abr. 2018;

[3]OLIVEIRA, P.E.R.. Introdução: RSA. Disponível em: https://bit.ly/2rhQoVY. Acesso em: abr. 2018;

[4] PIMENTEL, E.G.. Teoria de números e criptografia RSA. Disponível em: https://bit.ly/2w9ZDwf. Acesso em: abr. 2018;

[5] SOUZA, L.. Entendendo a Criptografia RSA. Disponível em: https://bit.ly/2rhnHY8. Acesso em: abr. 2018.

A evolução da calculadora

Maisa Iora, *UFSM*.

QUEM nunca recorreu a calculadora para resolver um cálculo mais complexo? É só digitar os números e a operação que em instantes a máquina já mostra o resultado no visor, facilitando a vida. Assim, a calculadora se tornou uma ferramenta essencial para cálculos com maior rapidez e precisão.

Esse texto foi baseado em Coelho (2012). Segundo ele, o ábaco foi a primeira calculadora da história e era capaz de realizar contas de adição e subtração. Criados por volta de 3500 a.C. na antiga Mesopotâmia, os primeiros ábacos eram desenhados no chão e depois colocavam as bolas de pedras para calcular. O ábaco também foi usado pelos chineses por volta de 2600 a.C., este de forma mais parecida com o que é conhecido atualmente, que dispunha de fios paralelos e arruelas deslizantes, conforme ilustra a figura 1.

Fig. 1. Ábaco

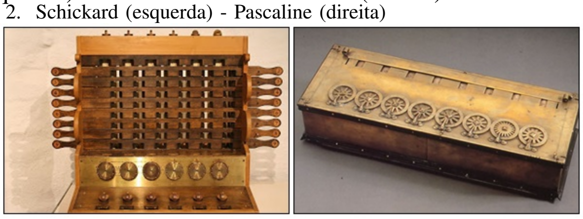
Fonte: Equipe Hora da Escola (2017).

Após o ábaco surgiram as calculadoras mecânicas, alguns historiadores atribuíram a invenção dessas ao matemático francês Blaise Pascal, pela criação da Pascaline. Porém, na década de 60, foram encontradas as anotações de um projeto do ano de 1623, do professor Wilhelm Schickard de uma calculadora mecânica capaz de somar, subtrair, dividir e multiplicar números de até 6 dígitos. Como ela indicava o resultado através de um toque de sino ficou conhecida como relógio calculador. Por conseguinte, a criação da primeira calculadora foi concedida a Schickard.

Pascaline foi construída em 1642, em seu interior tinha como elemento essencial uma roda dentada construída com 10 "dentes". Cada "dente" corresponde a um algarismo de 0 a 9. A primeira roda da direita correspondia às unidades, a segunda a sua esquerda correspondia às dezenas, a seguinte às centenas e assim sucessivamente. Por meio desse mecanismo, a Pascaline realizava operações de adição e subtração, mas a ideia original era que fizesse também multiplicação e divisão.

A figura 2 ilustra a calculadora atribuída a Schickard (esquerda) e a calculadora Pascaline (direita).

Fig. 2. Schickard (esquerda) - Pascaline (direita)



Fonte: Coelho (2012).

Já em 1957, a Casio produziu a primeira calculadora eletrônica do mundo denominada 14-A que efetuava operações de adição, subtração, multiplicação e divisão com até 14 dígitos. Em setembro de 1965, a Casio lançou uma segunda calculadora, a 001, que foi a primeira calculadora eletrônica do mundo com função de memória. As calculadoras da Casio foram bem recebidas em todo o mundo, e sua produção total alcançou a marca de 100.000 unidades em 1969, na figura 3 são ilustradas as calculadoras 14-A (esquerda) e a calculadora 001 (direita).

Fig. 3. 14-A (esquerda) - 001 (direita)

Fonte: Coelho (2012).

Após 1965, a Hp lançou seu primeiro modelo de calculadora científica no mercado, o modelo 9100, ilustrado a esquerda na figura 4. E em 1972, lançou a sua segunda calculadora científica que foi, HP-35B calculator, que tem um design mais parecido com as calculadoras científicas atuais, ilustrada a direita na figura 4.

Fig. 4. 9100 (esquerda) - HP-35B (direita)

Fonte: Coelho (2012).

Calculadoras científicas normalmente são usadas como apoio em ciências exatas ou engenharia, por ter em sua memória funções pré-programadas direcionadas a este tipo de estudo. Em sua memória é possível encontrar funções logarítmicas e trigonométricas, regressões, partes exponenciais, entre outras. É possível também armazenar em sua memória algumas macros definidas pelo usuário, com equações ou fórmulas pré-definidas.

Referências:

[1] COELHO P.. História da Calculadora. Publicado em: set. 2012. Disponível em: http://www.engquimicasantossp.com.br/2012/09/historia-da-calculadora.html. Acesso em: maio 2018;

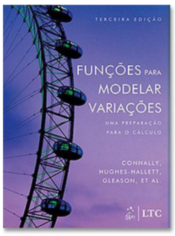
[2] EQUIPE HORA DA ESCOLA. Ábaco. Publicado em: jan. 2017. Disponível em: https://horadaescola.com/matematica/565-abaco. Acesso em: maio 2018.

Funções para modelar variações

Janaina da Silva Dornelles, *UFSM*.

AS funções podem ser agrupadas em famílias (lineares, exponenciais, potênciais, etc.) e usadas em nosso dia-a-dia para facilitar a solução de problemas que ficaríamos horas pensando e fazendo contas afim de resolvê-los. Os modelos matemáticos, que assim chamamos para descrever um momento real, nos ajudam a achar a solução desses problemas de maneira mais fácil. As funções podem ser representadas por meio de tabelas, gráficos e equações. Neste artigo vamos abordar um pouco sobre funções lineares e variações. Este trabalho será baseado na referência Connally (2001). A figura 1 ilustra a capa do livro.

Fig. 1. Capa



Fonte: Deborah Hughes-Hallett (2018)

Antes de dar início, lembremos o que é função. Descrevemos a função como uma relação de dependência que associa uma grandeza a outra. Como, por exemplo, o conjunto A será a base para o conjunto B, conforme a lei de formação $y = x^2$ no quadro abaixo (CONNALLY, 2001).

Conjunto A	$y = x^2$	Conjunto B
-3	$y = (-3)^2 = 9$	9
-2	$y = (-2)^2 = 4$	1
0	$y = 0^2 = 0$	0
2	$y = 2^2 = 4$	4
3	$y = 3^2 = 9$	9

Quando aplicamos funções em problemas do dia-a-dia devemos lembrar que, muitas vezes, ela sozinha não consegue respondê-los. Por exemplo, $T = \frac{1}{4}R + 40$ (T sendo a temperatura e R o total de cricridos) é um modelo matemático correspondente a temperatura e a taxa de cricridos do grilo. Porém, a matemática não consegue resolver esse problema em um determinado intervalo, pois, quando a temperatura fica abaixo de 40°F não conseguimos aplicar a fórmula para descobrir a taxa de cricridos do grilo. Assim como descobrir a taxa de cricridos é um modelo matemático, existem outros tipos de funções que se enquadram como modelagem (CONNALLY, 2001).

A taxa de variação é uma delas, tendo como definição, forma de medir a rapidez de uma variável (y) em relação à medida em que outra variável (x) muda. Podemos calcular a velocidade média de compras e vendas, como, por exemplo, descobrir a rapidez de uma determinada venda de produto eletrônico, basta dividir a variação das vendas pela variação do tempo (CONNALLY, 2001).

$$\frac{\triangle.vendas}{\triangle.tempo}$$

Normalmente as taxas são de variação intermitente, ou seja, inconstante, mas existe momentos em que podemos calcular a taxa de variação constante, onde consideramos que sua taxa média de variação não muda, e sim, segue sendo o mesmo intervalo. Com isso, chamamos a função representada em gráfico como reta linear. Dando como exemplo, uma aldeia de 5.000 mil habitantes diminui a uma taxa de 100 pessoas a cada ano. Como a população (p) está diminuindo a uma taxa constante de 100 pessoas por ano, p é uma função linear do tempo (t) em anos (CONNALLY, 2001).

Assim como utilizamos as equações prontas, apenas usando seu formato e calculando em um determinado problema, nós também podemos determinar uma equação, para isso, devemos dar valores para inclinação (m) e a interseção vertical (b), na equação $y = b + mx$, se as mesma forem de funções Lineares (CONNALLY, 2001).

Na sequência apresentasse um exemplo adaptado Connaly (2001). Um grupo de amigos tem um total de $R\$24,00$ para gastar. Um engradado com 6 garrafas de refrigerante custa $R\$3,00$, um saco de batatas fritas custa $R\$2,00$. O número de embalagens de seis garrafas que eles podem comprar (y) é uma função do número (x) de sacos de batatas fritas que decidiram comprar.

A) Determine uma equação que relacione x e y.

Dinheiro gasto em batatas fritas + dinheiro gasto em refrigerantes = R\$24,00. Comprando x sacos de batatas fritas a R\$2,00 cada, equivalente a $2x$. Fazendo isso com o refrigerante, ficamos com $3y$. Calculemos:

$$2x + 3y = 24$$
$$3y = 24 - 2x$$
$$y = 8 - \frac{2}{3}x$$

Obtemos uma função linear com inclinação $m = \frac{-2}{3}$ e interseçõ com eixo y, $b = 8$.

Referências:

[1] CONNALLY, E, ; C..**Funções para Modelar Variações:** Uma preparação para o cálculo. Porto Alegre: Bookman, 2001;

[2] HALLETT, H.D. Funções para modelar variações. Disponível em: http://livraria.folha.com.br/autor/deborah-hughes-hallett/21820. Acesso em: maio 2018.

Coincidência ou matemática?

Tauana Dambrós, *UFSM.*

OS números tem muitas propriedades, algumas ainda desconhecidas, mas como muitos dizem "a matemática é a ciência dos padrões". Logo, basta descobrir alguma "coincidência" para alguns números específicos e o matemático irá testar para mais alguns números. Funcionando para esses, tentará mostrar que vale para todos e, assim, acaba tornando-se um teorema ou uma propriedade.

Pensando nisso, baseado em Barco (1999) e Horta (2017), veremos duas "coincidências" que alguém percebeu e se tornaram propriedades numéricas conhecidas.

I. Multiplicando números consecutivos

O sucessor da multiplicação de quatro números inteiros consecutivos é um quadrado perfeito. Vejamos alguns exemplos:

$$\begin{aligned} 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4+1 &= 25=5^2;\\ 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9+1 &= 3025=55^2;\\ 63\cdot 64\cdot 65\cdot 66+1 &= 17297281=4159^2. \end{aligned}$$

Podemos provar que funciona para quaisquer quatro inteiros consecutivos. Para isso vamos representar os quatro inteiros consecutivos por $(n-1),\ n,\ (n+1)$ e $(n+2)$. Agora, vamos multiplicar esses quatro inteiros e somar 1:

$$(n-1)\cdot n\cdot (n+1)\cdot (n+2)+1=$$

$$n\cdot (n^2-1)\cdot (n+2)+1=$$

$$(n^3-n)\cdot (n+2)+1.$$

Usando produtos notáveis:

$$n^4+2n^3-n^2-2n+1.$$

para o completamento de quadrados adicionamos as parcelas $2n^2-2n^2$:

$$(n^2)^2+2n^2\cdot n-n^2(2n^2-2n^2)-2n+1=$$

$$(n^2)^2+2n^2\cdot n-n^2+2n^2-2n^2-2n+1=$$

$$(n^2)^2+2n^2\cdot n+n^2-2n^2-2n+1.$$

Simplificando o produto notável:

$$(n^2+n)^2-2(n^2+n)+1=$$

$$[(n^2+n)-1]^2.$$

Assim, mostramos que o sucessor da multiplicação de quatro inteiros consecutivos é um quadrado perfeito.

II. O número mágico

O número 1089 é conhecido como número mágico. Vejamos um exemplo que ilustra o porquê: escolha um número natural de três algarismos distintos, maiores que zero, por exemplo 624. Escreva esse número a partir de uma permutação reflexiva (426) e subtraia o menor do maior,

$$624-426=198,$$

some o resultado da subtração com seu contrário:

$$198+891=1089.$$

Vamos mostrar que esse resultado será sempre igual a 1089 para qualquer natural de 3 algarismos distintos, maiores que zero.

Seja a o número escolhido, esse pode ser escrito como $a=100b+10c+d$ e seja a' sua permutação reflexiva, $a'=100d+10c+b$, supondo $a>a'$ portanto, $b>d$, logo teremos:

$$a-a'=100b+10c+d-(100d+10c+b)$$

efetuando a multiplicação e subtraindo, temos:

$$a-a'=99b+0-99d$$

colocando o 99 em evidência:

$$a-a'=99(b-d).$$

Portanto, o resultado de $a-a'$, que representaremos por tuv, é um múltiplo de 99, logo um múltiplo de 9. Como nas duas parcelas c não muda de posição e $a>c$ então o u do resultado tuv será sempre igual a 9, e, como em todo número divisível por 9, a soma dos seus algarismos é também um número divisível por 9, concluímos que $t+v=9$. Logo podemos escrever o resultado da soma da subtração com seu contrário:

$$r=100t+10u+v+100v+10u+t.$$

Colocando em evidência, pode ser escrito como:

$$100(t+v)+20u+1(u+v)=100(9)+20(9)+9=1089.$$

E assim, fica provado que isso acontecerá para qualquer número natural com 3 algarismos distintos maiores que zero.

Essas são apenas duas "coincidências", mas basta procurar e você encontrará muitas outras.

Referências:

[1] BARCO, L.. O Teorema de Meneses. publicado em: jul. 1999. Disponível em: https://super.abril.com.br/comportamento/o-teorema-de-meneses/. Acesso em: maio 2018;

[2] HORTA, N. de G.. Curiosidade Matemática #9 – 1089: O Número (dito) Mágico. Publicado em: ago. 2017. Disponível em: http://www.blogviche.com.br/2007/08/11/curiosidade-matematica-9-1089-o-numero-dito-magico/. Acesso em: maio 2018.

Direitos ou “privilégios”?

Pedro Augusto de Carvalho Smidt, *UFSM*.

DIREITOS humanos são direitos fundamentais e certos que são garantidos, ou deveriam, a todas as pessoas simplesmente por serem seres humanos. No sentido mais básico possível, é aquilo que deveria ser resguardado para todo cidadão. A questão apresentada no título desse artigo deve-se primeiramente a necessidade de reflexão a respeito do quão eficaz é, na prática, a garantia dos direitos de todos, e se em um cenário negativo, os direitos não se tornam um “privilégio” de poucos.

Dessa forma, para refletir a respeito é importante haver um entendimento maior do que são direitos humanos e para isso não basta apenas aprender seu conceito, porém mais do que isso, deve-se compreender o contexto com o qual surgiram e toda carga histórica que carregam.

Ao contrário do que se imagina a uma primeira vista, existem registros históricos datados de muito tempo atrás que propuseram o conceito de direitos humanos. Um deles, e talvez o primeiro, o Cilindro de Ciro é um objeto no qual foi escrito as declarações do rei Pérsia Ciro, O Grande, logo após a sua conquista da cidade da Babilônia em 539 a.C., hoje território pertencente ao Iraque. Suas declarações anunciavam, entre outras coisas, a liberdade dos escravos e a igualdade racial (YFHRI, 1999).

Posteriormente, houve ainda outros documentos com os quais pode-se estabelecer uma relação com o conceito de direitos humanos, são estes: a Carta Magna (1215), Petition of Rights (1628), a Declaração de Independência dos Estados Unidos (1776), a Declaração dos Direitos do Homem e do Cidadão (1789), e outros.

Entretanto, em geral, quando se fala de direitos humanos trata-se dos direitos previstos em 30 artigos da Declaração Universal dos Direitos Humanos (ONU, 1948), elaborada por uma comissão e adotada pela Organização das Nações Unidas (ONU) em 1948. A própria ONU, formada após o término da Segunda Guerra Mundial, é resultante de um grande contexto histórico e social que vislumbra das consequências proeminentes dos conflitos que ocorreram naquela década. Em suma, a Segunda Guerra Mundial acarretou na morte de milhares de pessoas, sobretudo por razões étnicas e religiosas, e ainda, violações pessoais cometidas por governos fascistas. Portanto, entre os diversos direitos garantidos pela Declaração Universal, estão o direito a não escravidão, direito de independentemente da etnia ser tratado com igualdade perante as leis, direito à liberdade de pensamento e expressão, direito à liberdade religiosa, direito à participação política, e outros direitos relacionados a educação, cultura, lazer e trabalho.

Atualmente todos os países que fazem parte da ONU assinam a Declaração Universal, sendo um total de 193 países. Ainda assim que a declaração universal não tenha força de lei, ela serve como inspiração e base para a construção de diversas constituições e tratados internacionais.

Ademais, é fácil observar a fragilidade com que tais direitos se encontram. Por motivos sociais, econômicos e regionais há inúmeros casos na atualidade onde esses direitos humanos não são garantidos ou simplesmente são corrompidos e quebrados. Existe um enorme distanciamento entre colocar no papel e assegurar na prática. Basta analisar um dos exemplos anteriores, quando mencionado que a muito tempo atrás no território que hoje é do Iraque a humanidade dava um passo primitivo, porém primordial, em direção aos direitos humanos, e que recentemente foi palco da Guerra do Iraque, a qual seus eventos e acontecimentos podem ser tomados como grandes exemplos de atentado aos direitos humanos.

No Brasil, quando a Constituição Federal vigente (BRASIL, 1988), era promulgada, cresciam os direitos fundamentais garantidos na lei maior, que, reitero, estão salvos no papel, mas na pratica a realidade é diferente. Tem-se por exemplo o seguinte problema: na constituição de 1988 consta, mais precisamente no artigo 208, inciso IV, que um dos deveres do Estado com a Educação será efetivado mediante a garantia de atendimento em creche e pré-escola às crianças de 0 a 6 anos de idade. Contudo, o Plano Nacional de Educação prevê na sua meta 1 que para o ano de 2024 o Brasil deveria atender na educação infantil, no mínimo, 50% (cinquenta por cento) das crianças do país. Ou seja, a meta propõe que somente em 2024 metade das crianças serão atendidas. Evidenciando assim, o discurso que direitos muitas vezes se tornam privilégios.

Em vista dos argumentos apresentados, e surgindo como um caminho de continuação para com a reflexão inicial deste trabalho, há de se pensar maneiras de sentenciar uma efetiva garantia dos direitos humanos fundamentais. Por exemplo: o voto consciente. Pois de certa forma podemos dizer que exercer a cidadania ampliadamente se apresenta como um instrumento que transparece um diálogo entre as ações do Estado na garantia dos direitos e as ações do próprio cidadão - esse que em consciência dos seus direitos passa a participar ativamente do processo como um todo.

Referências:

[1] BRASIL. Constituição (1988). Constituição da República Federativa do Brasil. Brasília, DF: Senado Federal: Centro Gráfico, 1988. 292 p. eudo=100515.

[2] ONU. Declaração Universal dos Direitos Humanos, 217 (III) A, 1948, Paris. Disponivel em: https://goo.gl/jFfkrX. Acesso em: maio 2018;

[3] YFHRI, Youth For Human Rights International. A brief story about human rights, 1999. Disponivel em: https://goo.gl/UYmKiR. Acesso em: maio 2018.

Álgebra linear e suas aplicações

Ravine Taís Wenningkamp, *UFSM.*

A álgebra linear está presente nas mais diversas áreas do conhecimento. O estudo dos seus conceitos nos permite a possibilidade de aplicá-los em vários outros campos, sendo um deles a genética.

Denota-se hereditariedade autossômica o modo pelo qual os genes dos pais são passados para seus descendentes. Supondo que a característica hereditária é comandada por um conjunto de dois genes A e a, os prováveis pares são AA, Aa e aa, que denominamos genótipo do indivíduo. A partir disso, podemos listar todas as probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes para todas as combinações de genótipos dos pais (figura 1).

Figura 1. Probabilidades dos possíveis genótipos dos descendentes

Genótipos dos Descendentes	Genótipos dos Pais					
	AA - AA	AA - Aa	AA - aa	Aa - Aa	Aa - aa	aa - aa
AA	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	0	0
Aa	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1
aa	0	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1

Fonte: O autor (2018)

Podemos pensar por exemplo em uma plantação de bocas de leão (*Antirrhinum majus*) com todos os três possíveis genótipos AA (produz flores vermelhas), Aa (produz flores roxas) e aa (produz flores brancas). Se cada planta da população for fertilizada por uma planta do genótipo AA, como será a distribuição dos três genótipos na população depois de um número qualquer de gerações?

Para n = 0, 1, 2,..., vamos escrever:
a_n = fração de plantas do genótipo AA na n-ésima geração;
b_n = fração de plantas do genótipo Aa na n-ésima geração;
c_n = fração de plantas do genótipo aa na n-ésima geração.

Seja a_0, b_0 e c_0 a distribuição inicial dos genótipos, também temos que:

$$a_n + b_n + c_n = 1, \text{ para } n = 0, 1, 2, ...$$

A seguir, expressamos através de equações a distribuição de genótipos em cada geração a partir da distribuição na geração precedente, de acordo com a figura 1:

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1}$$
$$b_n = c_{n-1} + \frac{1}{2}b_{n-1}$$
$$c_n = 0.$$

As equações podem ser escritas em notação matricial como:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} \qquad (2)$$

para n = 1, 2, ... , onde:

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}, x^{(n-1)} = \begin{bmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e } M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Da equação (2) segue que:

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = ... = M^nx^{(0)}$$

Se encontrarmos uma expressão explícita para M^n, poderemos então encontrar uma expressão explícita para $x^{(n)}$. Para isto, diagonalizamos M, ou seja, procuramos uma matriz invertível P e uma matriz diagonal D tais que $M = PDP^{-1}$. Com esta diagonalização, teremos: $M^n = PD^nP^{-1}$, onde obtemos os autovalores e seus correspondentes autovetores. Segue a multiplicação das matrizes:
$PD^nP^{-1}x^{(0)} =$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (\frac{1}{2})^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}$$

A seguir, obtem-se as fórmulas explícitas para a fração dos três genótipos na n-ésima geração de plantas:

$$a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0$$

$$b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0$$

$$c_n = 0.$$

Como $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ tende a zero quando n tende ao infinito, segue que:

$$a_n \to 1$$
$$b_n \to 0$$
$$c_n \to 0.$$

Isso mostra que no limite todas as plantas da população serão do genótipo AA, ou seja, a plantação será composta apenas por bocas de leão vermelhas.

Ainda, podemos modificar esse exemplo nos questionando sobre o que aconteceria com essa população de plantas se cada uma delas fosse fertilizada por uma planta do mesmo genótipo. Procedendo de maneira análoga ao exemplo citado, podemos obter uma resposta a esse novo problema!

Esse artigo foi baseado em: Leon (1999) e Anton e Rorres (2012).

Referências:

[1] ANTON. H.; RORRES C.. **Álgebra linear com aplicações**. Bookman, 2012;

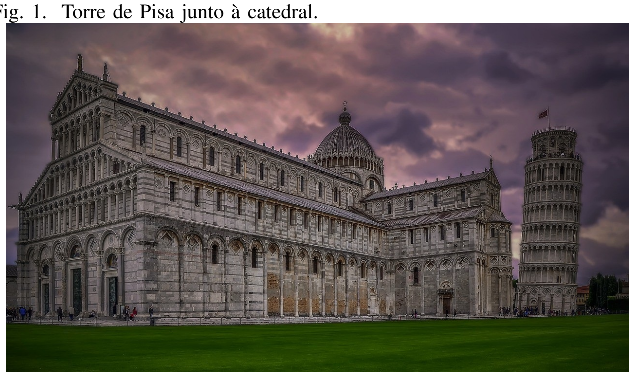
[2] LEON. S.J.. **Álgebra linear com aplicações**. Editora S/A, 1999.

O mistério da Torre de Pisa

Kaynan Casali Vieira, *UFSM.*

A Torre de Pisa é considerada um dos importantes símbolos da Itália, visto que seus cinco graus de inclinação a tornaram umas das principais atrações turísticas do mundo. Todo ano, milhares de pessoas visitam o campanário da cidade que empresta nome à torre (figura 1).

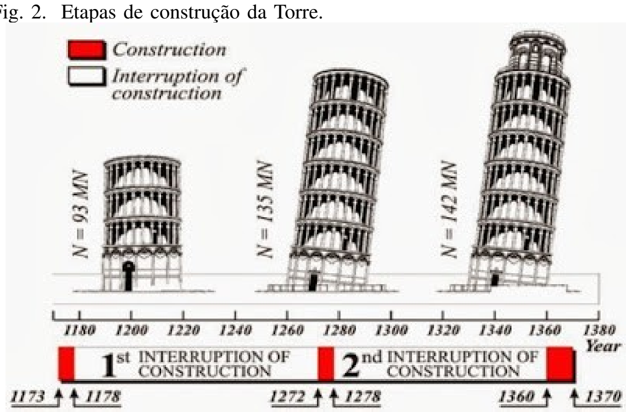
Fig. 1. Torre de Pisa junto à catedral.



Fonte: Creative Commons / Walkerssk (2010).

Desde o início, em 1173, sua construção deu errado. Quando ainda contava com apenas três andares, o frágil solo arenoso da região começou a ceder de um lado. Sua construção foi retomada somente em 1272. Para evitar que a inclinação aumentasse, os engenheiros da época tiveram a "brilhante" ideia de construir cada um dos outros cinco andares da torre um pouco mais alto no lado em que estava afundando, ou seja, a ideia era que, apesar de torta, ela parecesse normal quando completa. Contudo, isso não funcionou muito bem. O peso aumentou naquele lado, fazendo com que a torre afundasse no solo ainda mais (figura 2).

Fig. 2. Etapas de construção da Torre.



Fonte: Toda Matéria (2018).

Sua visitação chegou a ser interrompida em 1990, sob o risco de desmoronar. Para reabrir em 2011, foi realizada uma obra que reduziu a inclinação em 40 centímetros e acabou com o risco de desabamento. Mas, o que sempre intrigou os cientistas é como ela se manteve em pé durante séculos, já que além do solo frágil, pelo menos quatro grandes terremotos abalaram a região desde 1280.

Essa é uma questão de longa data investigada por um grupo de pesquisa composto por 16 engenheiros, incluindo um dos principais especialistas em engenharia sísmica e interação solo-estrutura da Universidade de Bristol, o professor George Mylonakis, do Departamento de Engenharia Civil de Bristol.

Atualmente, liderados pelo professor Camillo Nuti da Universidade Roma Tre, esse grupo de pesquisadores decidiu elucidar o mistério de uma vez por todas. Segundo Mylonakis (2018), o mesmo solo que causou a instabilidade inclinada e trouxe a Torre à beira do colapso, ironicamente, pode ser creditado por ajudá-lo a sobreviver a esses eventos sísmicos.

Segundo o estudo, a vulnerabilidade da estrutura faria com que até a atividade sísmica mais moderada causasse sérios danos ou até derrubasse a torre. Depois de estudar informações sismológicas, geotécnicas e estruturais disponíveis, a equipe de pesquisa concluiu que a sobrevivência da Torre pode ser atribuída a um fenômeno conhecido como interação dinâmica solo-estrutura (DSSI).

Seus 58 metros de altura e sua rigidez combinados com a maciez do solo da fundação fazem com que as características vibracionais da estrutura sejam substancialmente modificadas, de tal maneira que a construção não ressoa com o movimento de um terremoto. Segundo os pesquisadores, a torre seria recordista mundial nesse fenômeno.

Nos últimos anos, a Torre de Pisa passa por um processo de avaliação que inclui trabalhos de restauração e projetos de engenharia. Os especialistas afirmam que, com o tempo, a Torre irá se endireitar e parecerá cada vez menos inclinada. Estudos apontam ainda que, com os projetos realizados, ela permanecerá estável por, pelo menos, três décadas.

Referências:

[1] REDAÇÃO GALILEU. Engenheiros desvendam mistério de 500 anos na Torre de Pisa. Disponível em: revistagalileu.globo.com/Ciencia/noticia/2018/05/engenheiros-desvendam-misterio-de-500-anos-na-torre-de-pisa.html. Acesso em: maio 2018;

[2] TODA MATÉRIA. Torre de Pisa. Disponível em: https://www.todamateria.com.br/torre-de-pisa/. Acesso em: maio 2018;

[3] UNIVERSITY OF BRISTOL. 500-year-old Leaning Tower of Pisa mystery unveiled by engineers. May, 9 2018. Disponível em: https://phys.org/news/2018-05-year-old-tower-pisa-mystery-unveiled.html. Acesso em: maio 2018.

Nem brincadeira, tampouco drama. Depressão é doença!

Silvianne Amaral da Silva, *UFSM*.

CONSIDERADA como “mal do século”, os casos de depressão vêm crescendo cada vez mais, chegando a atingir 10% da população brasileira, sendo esse um dos transtornos mentais mais comuns do mundo, conforme dados da Organização Mundial da Saúde (OMS).

O transtorno depressivo maior, mais popularmente conhecido como depressão, como já diz seu nome, é um transtorno que muitas vezes está associado a situações de estresse e ansiedade. Segundo Bernik e Lopes (2018) o estresse ativa a liberação de hormônios que atuam em vários tecidos e podem causar a desregulação do eixo hipotálamo-hipófise-adrenal, que, se ativado frequentemente, aumenta a vulnerabilidade do organismo para doenças mentais, como a depressão.

Entre alguns dos principais sintomas da depressão, estão:

▷ Tristeza;
▷ Sentimento de culpa e inutilidade;
▷ Perda de energia;
▷ Alterações no sono;
▷ Ansiedade;
▷ Dificuldade de concentração;
▷ Baixa autoestima;
▷ Pensamentos de morte ou suicídio.

Para que um diagnóstico de depressão seja feito, é necessário que a pessoa apresente alguns sintomas por pelo menos duas semanas. Sua causa pode estar relacionada a diversos fatores, como genéticos, biológicos ou psicológicos, por exemplo. Assim, a depressão pode ser classificada como:

▷ **Transtorno depressivo persistente:** é caracterizado pela presença de um humor triste e deprimido por mais de dois anos.

▷ **Depressão pós-parto:** surge nas mulheres após o parto, e apresenta sintomas como tristeza, irritabilidade e rejeição ao bebê.

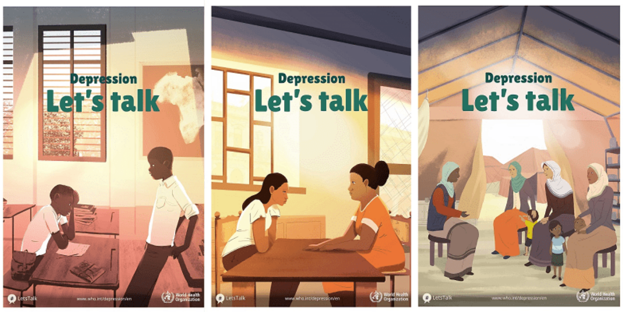
▷ **Depressão bipolar:** caracterizado por mudanças constantes no humor, variando de uma grande depressão à uma alegria extrema.

▷ **Depressão psicótica:** é uma categoria de depressão maior em que as pessoas apresentam sintomas psicóticos (como delírios e alucinações) e de depressão geral ao mesmo tempo. Os sintomas psicóticos normalmente tem um fundo depressivo, como delírios de culpa, doença ou pobreza.

A depressão pode acontecer em qualquer idade. Quando ocorre na vida adulta, no entanto, pode estar ligada a outras doenças como diabetes, câncer, doenças cardíacas e mal de Parkinson (VITTUDE, 2018). Muitas vezes os medicamentos usados para essas doenças podem causar efeitos colaterais que contribuem para a depressão. Entre seus fatores de risco estão: histórico familiar, grandes perdas ou estresses, algumas doenças físicas e medicamentos. A depressão pode ser tratada com medicamentos anti-depressivos, psicoterapia ou, em casos mais graves, terapias eletroconvulsivas e de estimulação cerebral. O tratamento muda muito de uma pessoa para outra, cada caso é específico. É de grande importância procurar um psiquiatra, caso os sintomas sejam persistentes, para que seja feito o diagnóstico mais preciso e o tratamento mais adequado.

Além dos tratamentos já falados, algumas ações como a prática de exercícios físicos, passar mais tempo com pessoas que goste, definir metas realistas para si mesmo, tentar não se isolar e aceitar ajuda do próximo, juntamente com o tratamento adequado, podem contribuir para uma melhora mais eficaz. Diante de um considerável aumento dos casos de depressão no mundo inteiro, a OMS lançou no ano de 2017 a campanha “Depressão: Vamos conversar” (figura 1) com o objetivo geral de que mais pessoas com depressão, em todo mundo, busquem e obtenham ajuda (OPAS/OMS BRASIL, 2017).

Figura 1. Cartaz da campanha “Depressão: Vamos conversar”



Fonte: Google imagens (2018)

Depressão não é brincadeira, tampouco drama. Qualquer pessoa pode ser afetada, independentemente de raça, cor ou credo. Assim, perceber os sintomas, sua persistência e reconhecer a necessidade de ajuda é muito importante para iniciar o tratamento correto e obter uma melhor qualidade de vida.

Referências:

[1] BERNIK V. e LOPES K.V. **Estresse, depressão e ansiedade**. Disponível em: https://goo.gl/TVsBKJ. Acesso em: maio 2018.

[2] OPAS/OMS BRASIL. **Com depressão no topo da lista de causas de problemas de saúde, OMS lança a campanha “Vamos conversar”**. Disponível em: https://goo.gl/ED4SJq. Acesso em: maio 2018.

[3] VITTUDE. **13 sintomas de depressão que você precisa conhecer**. Disponível em: https://goo.gl/shspXh. Acesso em: maio 2018.